数理解析研究所講究録 第2098巻 2018年 104-110

有限群の自己同型に付随するカンドルの構造について

東谷　章弘（京都産業大学・理学部）
Email: ahigashi@cc.kyoto-su.ac.jp

本稿は、嶺山良介氏（大阪大学大学院理学研究科）との共同研究に基づく。

カンドル (quandle) と呼ばれる代数系 X に対し、X のカンドル自己同型群 $\mathrm{Aut}(X)$ が X に推移的に作用するとき、X を等質カンドルという。[1] によって、有限等質カンドルが "カンドル三つ組" と呼ばれる三つ組 (G, K, σ)（ただし G は有限群、σ は G の自己同型、K は $K \subset \mathrm{Fix}(\sigma, G)$ なる G の部分群）で特徴付けられることが分かった。本稿では、有限群の自己同型に付随する有限等質カンドル（一般化アレクサンダーカンドル）の構造について議論する。さらに、対称群の場合における一般化アレクサンダーカンドルの分類について紹介する。

1　導入

1.1　カンドルについて

カンドルについては [4] に詳しく書いてあるので参照されたい。

集合 X とその上の二項演算 $*$ の組 $(X, *)$ が**カンドル**であるとは、次の３条件を満たすときに言う。

(Q1)′ $x * x = x$ $(\forall x \in X)$

(Q2)′ 任意の $x, y \in X$ に対し、$z * y = x$ なる $z \in X$ が唯一つ存在する

(Q3)′ $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ $(\forall x, y, z \in X)$

$s : X \to \mathrm{Map}(X, X)$ を $s_x(y) := y * x$ $(x, y \in X)$ で定義すると、上の定義は次の条件と同値である。

(Q1) $s_x(x) = x$ $(\forall x \in X)$

(Q2) 任意の $x \in X$ に対し、s_x は全単射

(Q3) $s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$ $(\forall x, y \in X)$

以下、元々の定義ではなく (Q1)–(Q3) をカンドルの定義として採用して議論する。カンドルは正確には $(X, *)$ もしくは (X, s) として記述するべきであるが、本稿では単に X と略記することもある。

例 1.1 (a) 集合 X に対し、$x * y := x$ $(\forall x, y \in X)$ と定義すればいつでもカンドルになる。これを**自明カンドル**という。
(b) $X := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ とし、$x * y := 2y - x$ $(\forall x, y \in X)$ と定義するとカンドルの構造を持つ。これを**二面体カンドル**という。

カンドルは、元々結び目の不変量として導入され、結び目理論の研究者には広く知られた概念であるらしい。一方で、田丸博士氏を中心として「対称空間の離散化」としてカンドルをとらえた研究が進められ、リーマン対称空間論を手本としたカンドルの理論の構築が構築されていった。本稿では、カンドルの研究に関する新たなアプローチとして、有限群論との関連に焦点を置いて考察する。

1.2　カンドルに関する記号・用語

- $(X, s), (X', s')$ をカンドルとする。写像 $f : X \to X'$ が**カンドル準同型**であるとは、

$$f \circ s_x = s'_{f(x)} \circ f \ \ (\forall x \in X)$$

  を満たすときに言う。カンドル準同型 f が全単射の時、f を**カンドル同型**という。$\mathrm{Aut}(X)$ でカンドル同型全体がなす群（X のカンドル自己同型群）を表す。X から X' へカンドル同型が存在するとき、X と X' はカンドルとして同型であると言い、$X \cong_Q X'$ と表す。
- 任意の $x \in X$ に対し、$s_x \in \mathrm{Aut}(X)$ であることがわかる。そこで、$\mathrm{Inn}(X) = \langle s_x : x \in X \rangle$（つまり s_x が生成する $\mathrm{Aut}(X)$ の部分群）とおく。この $\mathrm{Inn}(X)$ を X のカンドル**内部自己同型群**という。このとき、$\mathrm{Inn}(X)$ は $\mathrm{Aut}(X)$ の正規部分群であることが容易にわかる。

命題 1.2 $(X, s), (X', s')$ をカンドルとし、f をカンドル同型 $f : X \to X'$ とする。このとき、f は $\mathrm{Inn}(X)$ と $\mathrm{Inn}(X')$ の間の群としての同型を導く。より正確には、

$$f : \mathrm{Inn}(X) \to \mathrm{Inn}(X'),\ s_g \mapsto s'_{f(g)}$$

を群準同型に拡張した写像が群としての同型写像を導く。

命題 1.2 は、$\mathrm{Inn}(X)$ がカンドル不変量であることを示している。

1.3　有限群に関する記号・用語

G を有限群とする。$\mathrm{Aut}(G)$ は有限群 G の自己同型群とする。

- $\mathrm{Inn}(G)$ を G の内部自己同型群、つまり、各 $g \in G$ に対して $x \mapsto gxg^{-1}$（σ_g と表す）で定義される群同型がなす群とする。ここで、$\mathrm{Inn}(G)$ は $\mathrm{Aut}(G)$ の正規部分群である。
- ２つの群 G と G' が群として同型であるとき、$G \cong_G G'$ と表すこととする。
- $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ に対し、$\mathrm{Fix}(\sigma, G) = \{g \in G : \sigma(g) = g\}$ とする。これは G の部分群になる。例えば、σ が $g \in G$ で定まる内部自己同型 σ_g とすると、$\mathrm{Fix}(\sigma, G) = C_G(g)$ となる。（ただし、$C_G(g) = \{x \in G : gx = xg\}$ は G の g による中心化群である。）
- G の部分群 K に対し、G/K で左剰余類全体の集合を表し、$g \in G$ に対して $[g]$ で左剰余類を表すとする。

2　等質カンドルとカンドル三つ組

・カンドル X が**等質**であるとは、$\mathrm{Aut}(X)$ が X に推移的に作用している（つまり、$\forall x, y \in X$ に対して $f \in \mathrm{Aut}(X)$ が存在して $f(x) = y$ と出来る）ときにいう。

・群 G と $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ に対し、K は G の部分群で $K \subset \mathrm{Fix}(\sigma, G)$ を満たすとする。このとき、三つ組 (G, K, σ) を**カンドル三つ組**とよぶ ([1])。

下記で説明する通り、等質カンドルとカンドル三つ組は対応している。詳しくは [1, Section 3] を参照されたい。（本質的には [2, Section 7] においても述べられている。）

<u>カンドル三つ組から等質カンドルへ</u>

G を群とし、(G, K, σ) をカンドル三つ組とする。このとき、カンドル $Q(G, K, \sigma)$ を以下のようにして定義する：

$Q(G, K, \sigma)$ は集合としては G/K とし、$[g], [h] \in G/K$ に対して

$$s_{[g]}([h]) := [g\sigma(g^{-1}h)]$$

と定義する。このとき、$Q(G, K, \sigma)$ は等質カンドルになる。

<u>等質カンドルからカンドル三つ組へ</u>

(X, s) を等質カンドルとする。カンドル三つ組を以下のようにして定義する：

$x \in X$ を任意に取り、G を $\mathrm{Aut}(X)$ の部分群で $s_x G s_x^{-1} = G$ を満たすものとせよ。（例えば $\mathrm{Aut}(X)$ そのものでも良い。）このとき、

$$\sigma(f) = s_x \circ f \circ s_x^{-1}$$

で定義された写像 $\sigma : G \to G$ は well-defined となる。さらに、

$$G_x := \{f \in G : f(x) = x\}$$

とおく。すると、(G, G_x, σ) はカンドル三つ組になる。加えて、G が X に推移的に作用しているならば、$X \cong_Q Q(G, G_x, \sigma)$ となる。

注 2.1 (a) 等質カンドル X に対し、$X \cong_Q Q(G, K, \sigma)$ となるようなカンドル三つ組 (G, K, σ) の取り方は一意ではない。

(b) 群 G と任意の $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ に対し、$(G, \{e\}, \sigma)$ は自明にカンドル三つ組になる。

そこで、$\sigma \in G$ に対し、

$$Q(G, \sigma) := Q(G, \{e\}, \sigma)$$

とおく。この等質カンドルは**一般化アレクサンダーカンドル**とよばれる。部分群として自明なものを考えているので、剰余類を考えない。よって、$Q(G, \sigma)$ は集合としては G に等しく、

$$s_x(y) := x\sigma(x^{-1}y) \quad x, y \in G$$

として s を定めたものが一般化アレクサンダーカンドル $Q(G, \sigma)$ である。さらに、$\sigma = \sigma_g$ のとき、$s_x(y) = xgx^{-1}yg^{-1}$ である。

さらに以下の命題から、一般の等質カンドルの中でも、一般化アレクサンダーカンドルが重要な役割を担うことが分かる。

命題 2.2 群 G に対し、$\sigma, \sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ とし、$K = \mathrm{Fix}(\sigma, G)$, $K' = \mathrm{Fix}(\sigma', G)$ とする。このとき、$Q(G,\sigma) \cong_Q Q(G,\sigma')$ ならば、$Q(G,K,\sigma) \cong_Q Q(G,K',\sigma')$ となる。

そこで、本稿では以下の問題について考える。

問題 2.3 有限群とその自己同型から定まる等質カンドルとしてあり得るものを全て決定せよ。つまり、与えられた有限群 G に対して

$$\mathcal{Q}(G) := \{Q(G,\sigma) : \sigma \in \mathrm{Aut}(G)\}/\cong_Q$$

を決定せよ。

問題 2.3 に対し、G が巡回群であるときは [3] において完全に解決されている。

本稿では、問題 2.3 に対するアプローチとして、いくつかのカンドル不変量を導入する。さらに、具体的な場合として、G が対称群のときにおける結果を紹介する。

3 カンドル不変量

本章では $Q(G,\sigma)$ に対するいくつかのカンドル不変量を提案する。

まず、次の命題が示せる。

命題 3.1 2 つの群同型 $\sigma, \sigma' \in \mathrm{Aut}(G)$ に対し、σ と σ' は共役である（つまり $\tau \in \mathrm{Aut}(G)$ が存在して $\sigma' = \tau\sigma\tau^{-1}$ とできる）とする。このとき、$Q(G,\sigma) \cong_Q Q(G,\sigma')$ となる。

次に、一般化アレクサンダーカンドルにおける不変量を 2 つ導入し、それらを群の言葉で記述する。

- $g \in G$ に対し、$\mathrm{ord}(g)$ で g の G における位数を表す。
- カンドル X における $x \in X$ に対し、$\mathrm{ord}(s_x) = \min\{n \in \mathbb{Z}_{>0} : \underbrace{s_x \circ \cdots \circ s_x}_{n} = \mathrm{id}\}$ （つまり s_x の X における位数を表す）とする。

ここで、等質カンドルにおいて、その等質性から、$\mathrm{ord}(s_x)$ は $x \in X$ に依らないことがわかる。さらに、$\mathrm{ord}(s_x)$ は等質カンドル不変量であることが分かる。加えて、次が分かる。

命題 3.2 $x \in Q(G,\sigma)$ に対し、$\mathrm{ord}(s_x) = \mathrm{ord}(\sigma)$ となる。

- K を G の部分群とする。このとき、$[G : K]$ で G の K による剰余類の個数（つまり G における K の指数）を表す。

命題 3.3 $Q(G,\sigma)$ における s_x の集合 $\{s_x : x \in Q(G,\sigma)\}$ と左剰余類の集合 $G/\mathrm{Fix}(\sigma, G)$ の間には、1 対 1 対応がある。つまり、$\sharp\{s_g : g \in Q(G,\sigma)\} = [G : \mathrm{Fix}(\sigma, G)]$ が成り立つ。

以上をまとめると、問題 2.3 に対するアプローチとして以下の手順が考えられる：

群 G に対し、$\mathrm{Aut}(G)$ の元 σ を動かして $Q(G,\sigma)$ としてどのようなものが現れるかを考えていく。

(i) まず、命題 3.1 から、$\mathrm{Aut}(G)$ における共役類のみを考えれば良いことが分かる。
(ii) 次に、命題 1.2, 3.2, 3.3 で紹介した不変量を用いて非同型を判定する。
(iii) (ii) において考えた不変量が同じであるときは、個別に考えて同型・非同型を判定する。

4　対称群の場合

本稿では、前章で導入した問題 2.3 に対するアプローチの具体的なケースとして、小さい n に対する n 次対称群 S_n に関する $\mathcal{Q}(S_n)$ の構造について議論する。

正の整数 n に対し、S_n で n 次対称群を表す。

4.1　S_n の自己同型群

S_n の自己同型群 $\mathrm{Aut}(S_n)$ に対し、以下の事実が良く知られている。

命題 4.1

$$\mathrm{Aut}(S_n) \cong_G \begin{cases} \mathrm{Inn}(S_n) & (n \neq 6) \\ \langle \xi \rangle \ltimes \mathrm{Inn}(S_6) & (n = 6) \end{cases}$$

ただし、$\xi : S_6 \to S_6$ は

$$\begin{aligned} (1\ 2) &\mapsto (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6) \\ (2\ 3) &\mapsto (1\ 6)(2\ 4)(3\ 5) \\ (3\ 4) &\mapsto (1\ 4)(2\ 3)(5\ 6) \\ (4\ 5) &\mapsto (1\ 6)(2\ 5)(3\ 4) \\ (5\ 6) &\mapsto (1\ 3)(2\ 4)(5\ 6) \end{aligned}$$

を群準同型に拡張することで得られる S_6 の群同型写像である。

一般の群 G に対し、$\mathrm{Inn}(G) \cong_G G/Z(G)$（ただし $Z(G) = C_G(G)$ は G の中心を表す）が成り立つが、$Z(S_n) = \{e\}$ であることが知られている。したがって $\mathrm{Aut}(S_n)$ は、$n \neq 6$ ならば S_n と同型である。

4.2　$\mathrm{Inn}(Q(S_n, \sigma_g))$

$g \in S_n$ に対し、$\mathrm{Inn}(Q(S_n, \sigma_g))$ の構造をある程度決定することが出来る。

補題 4.2 $g \in S_n$ を固定し、$Q = Q(S_n, \sigma_g)$ とおく。
(a) $n \geq 5$ とすると、

$$\mathrm{Inn}(Q) =$$

$$\begin{cases} \{\phi_{g,i} : g \in A_n, i = 0, 1, \ldots, m-1\} & (\sigma \text{ が偶置換}) \\ \{\phi_{g,i} : g \in A_n, i = 0, 2, \ldots, m-2\} \cup \{\phi_{g,i} : g \in S_n \setminus B_n, i = 1, 3, \ldots, m-1\} & (\sigma \text{ が奇置換}) \end{cases}$$

となる。（ただし $A_n \subset S_n$ は S_n における偶置換全体、つまり n 次交代群を表す。）
(b) σ の偶奇が異なれば、$\mathrm{Inn}(Q)$ は群として非同型である。

したがって、g の偶奇が $Q(S_n, \sigma_g)$ におけるカンドル不変量として機能することが分かる。

4.3 n が小さい場合における $Q(S_n, \sigma_g)$ の分類結果

S_n の場合における問題 2.3 に対する部分的解決を与える。

(i) まず、S_n の共役類は、箱 n 個のヤング図形（つまり、整数 n の分割）と 1 対 1 に対応していることがよく知られている。よって、各ヤング図形に対して、一般化アレクサンダーカンドルが 1 つ定まる。

$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ で n の分割を表す。正確には、$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ は正の整数で $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k \geq 1$ かつ $n = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$ を満たすものとする。対称群の元 g に対し、g が属する共役類に対応するヤング図形を g の型とよぶ。

(ii) 以下の表は、小さい n に対する S_n における各共役類に付随する一般化アレクサンダーカンドルの各不変量である。各共役類に対し、不変量が 1 つでも異なれば非同型なカンドルを定めることが分かる。下記の表に対し、g は S_n の元を表すが、命題 4.1 により（$n \neq 6$ ならば）$\mathrm{Aut}(S_n)$ の元と同一視できる。

g の型	(3)	$(2,1)$	(1^3)
$\mathrm{ord}(g)$	3	2	1
$[S_3 : C_{S_3}(g)]$	2	3	1
g の偶奇	偶	奇	偶

表 1: S_3 の各共役類に付随する等質カンドル不変量

g の型	(4)	$(3,1)$	$(2,2)$	$(2,1,1)$	(1^4)
$\mathrm{ord}(g)$	4	3	2	2	1
$[S_4 : C_{S_4}(g)]$	6	8	3	6	1
g の偶奇	奇	偶	偶	奇	偶

表 2: S_4 の各共役類に付随する等質カンドル不変量

g の型	(5)	$(4,1)$	$(3,2)$	$(3,1,1)$	$(2,2,1)$	$(2,1^3)$	(1^5)
$\mathrm{ord}(g)$	5	4	6	3	2	2	1
$[S_5 : C_{S_5}(g)]$	24	30	20	20	15	10	1
g の偶奇	偶	奇	奇	偶	偶	奇	偶

表 3: S_5 の各共役類に付随する等質カンドル不変量

表 1,2,3 から、$n = 3, 4, 5$ の場合は、各共役類で異なるカンドルを定めていることが分かる。同様にして、$n = 7$ も各共役類で異なるカンドルを定めていることが確かめられる。

$n = 6$ の場合において、以下のような結果が得られる。ただし、表 4 は $\sigma_g \in \mathrm{Inn}(S_6)$ のみを考えている。

g の型	(6)	$(5,1)$	$(4,2)$	$(3,3)$	$(4,1,1)$	$(3,2,1)$	$(2,2,2)$	$(3,1^3)$	$(2,2,1,1)$	$(2,1^4)$	(1^6)
$\mathrm{ord}(g)$	6	5	4	3	4	6	2	3	2	2	1
$[S_6 : C_{S_6}(g)]$	120	144	90	40	90	120	15	40	45	15	1
g の偶奇	奇	偶	偶	偶	奇	奇	奇	偶	偶	奇	偶

表 4: S_6 の各共役類に付随する等質カンドル不変量

ここで、型 (6) と型 $(3,2,1)$ のペア、型 $(3,3)$ と型 $(3,1^3)$ のペア、型 $(2,2,2)$ と型 $(2,1^4)$ のペアは、それぞれカンドル不変量が一致していることが分かる。実際、これら 3 つのペアは、命題 4.1 で与えられている $\mathrm{Aut}(S_6)$ の元 ξ を用いてカンドル同型を構成できる。つまり、これら 3 つのペアはカンドルとして同型であることが分かる。

さらに、ξ から定まる等質カンドル $Q(S_6,\xi)$ における不変量は、$\mathrm{ord}(\xi)=2$ かつ $[S_6 : \mathrm{Fix}(S_6,\xi)] = 30$ となるため、S_6 のどの共役類とも異なるので、非同型なカンドルを定義していることが分かる。

しかしながら、$n=8,9$ の場合において、以下のような例が現れる。

g の型	$(3,2,1^3)$	$(3,3,2)$	$(6,1^3)$	$(3,3,2,1)$	$(3,2,1^4)$	$(3,2,2,2)$
$\mathrm{ord}(g)$	6	6	6	6	6	6
$[S_4 : C_{S_4}(g)]$	1120	1120	10080	10080	2520	2520
g の偶奇	奇	奇	奇	奇	奇	奇

$n \geq 7$ の場合は $n=6$ の場合における ξ のような外部自己同型が存在しないので、これら 3 つのペアが同型かどうかはすぐには判定できない。これら 3 つのペアの同型・非同型の判定を含め、以下の問題は今後の課題である。

問題 4.3 $n \geq 7$ ならば、対称群 S_n の各共役類は異なる一般化アレクサンダーカンドルを定めるか？

参考文献

[1] Y. Ishihara and H. Tamaru, Flat connected finite quandles, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **144**, (2016), 4959–4971.

[2] D. Joyce, A classifying invariant of knots, the knot quandle, *J. Pure Appl. Algebra*, **23**, (1982), 37–65.

[3] S. Nelson, Classification of finite Alexander quandles, *Topology Proceedings*, **27**, (2003), 245–258.

[4] 鎌田聖一, “quandle と結び目”, 『数学』, **64**, No.3 (2012), 304–324.