数理解析研究所講究録 第2128巻 2019年 1-3

ナビエ・ストークス方程式の不変解と乱流

大阪大学・大学院基礎工学研究科　河原 源太（Genta Kawahara）
Graduate School of Engineering Science,
Osaka University

乱流遷移，特に亜臨界遷移問題の解明，あるいは発達した乱流の理解は，長年にわたり流体力学における最重要課題に位置付けられてきた．これらの課題では強い非線形性と非平衡性とが本質的に重要となるため，線形安定性理論あるいは平衡系統計力学をはじめとする既存の理論体系の適用は不可能であり，現象の究明は遅々として進んでいない（Davidson 2004 参照）．例えば，Reynolds (1883) が発表した乱流（遷移）に関する初期研究で扱った円管内乱流あるいはその遷移現象について見ると，その後 130 年以上経過した現在でも，円管乱流の平均速度分布あるいはその乱流遷移レイノルズ数のナビエ・ストークス方程式からの演繹的導出は未だに達成されていない．

本講演では，著者の研究グループが近年取り組んでいる，ナビエ・ストークス方程式の単純な不変解（固定点や周期軌道）を用いた乱流遷移および発達乱流に関する研究成果を紹介した．散逸力学系に対する偏微分方程式であるナビエ・ストークス方程式によって支配される乱流では，最近の数学的研究からその慣性多様体の存在が示唆されており，有限領域や周期箱における乱流を考える場合には，乱流を有限次元常微分方程式系によって記述できるものと期待される（Foias *et al.* 2001 参照）．力学系として乱流を捉えると，その時空間秩序は乱流に埋め込まれた単純な不変解によって記述され，一方乱れの発生は不変解の不安定多様体によって表されるものと期待される（Kawahara *et al.* 2012 参照）．この期待を実証するいくつかの研究成果について説明した．特に，乱流現象あるいは乱流遷移の定量的記述を実現した成果を紹介した．

矩形断面を有するダクト内の乱流においては，平均流がダクトの中心軸に直交する方向の速度成分を持つことが広く知られている．この種の流れはプラントルの第 2 種二次流れと呼ばれており，層流状態では現れない点で（外力によって駆動される）第 1 種二次流れとは著しい違いがある．この乱流によって駆動される二次流れの起源の解明あるいはその定量的記述は，工学的にも重要な研究課題である．この問題に対して，正方形ダクト流の非線形定常進行波解に基づく理論的アプローチを試みた（Uhlmann *et al.* 2010）．本研究で発見された定常進行波解は，正方形ダクト乱流の平均二次流れと同様，ダクト断面において 8 つの渦を持ち，そのダクト軸方向に沿う平均は乱流二次流れとよく一致することが判明した．さらに，定常進行波解の二次流れの強度（二次流れ速度のダクト

断面内自乗平均）のレイノルズ数依存性は，乱流二次流れのそれと概ね一致することが見出された．これらの事実は，矩形ダクト乱流の二次流れが，ナビエ・ストークス方程式の定常進行波解で表される非線形平衡状態に起因して現れること，さらにはその強度が非線形平衡状態の振幅によって決定されることを示唆している．

重力場において鉛直下方から加熱される（また鉛直上方から冷却される）流体層は，鉛直方向の温度差が増大するにつれ，熱伝導状態から超臨界遷移を経て熱対流乱流へと移行する．特に，温度差を有する水平平板間の熱対流はレイリー・ベナール対流と呼ばれ，バルク領域でのエネルギー散逸，スカラー散逸が支配的な乱流状態では，（熱伝導状態の熱流束で規格化された）無次元熱流束を表すヌセルト数 Nu と無次元温度差を与えるレイリー数 Ra との間に $Nu \sim Ra^{1/3}$ なるスケーリングが成立することが広く知られている（Grossmann & Lohse 2000 参照）．本研究では，この乱流状態で観測されるスケーリング則をレイリー・ベナール対流の非線形定常解によって再現できることを明らかにした（Motoki *et al.* 2019）．発見された定常解は，乱流熱流束のスケーリング則のみならず，水平平板間中央付近の乱流に観測される，エネルギー・スペクトル関数の $-3/5$ 乗則およびコルモゴロフ定数（Davidson 2004 参照）をも概ね再現することが確認された．

上述した円管流の乱流遷移やクエット流の乱流遷移に代表される亜臨界乱流遷移問題では，層流が線形安定であるにも拘わらず有限振幅撹乱によって発生する乱れを取り扱わねばならないため，遷移現象の理論的記述は極めて困難な課題である（Eckhardt *et al.* 2008 参照）．近年この亜臨界遷移問題に力学系理論に基づくアプローチがなされ，遷移現象の理論的記述が大きく進んでいるが（Eckhardt *et al.* 2008 参照），乱流遷移レイノルズ数のナビエ・ストークス方程式からの演繹は依然として達成されていない．本研究ではこの問題へのアプローチの第 1 歩として，乱流遷移初期段階に現れる過渡乱流（有限寿命を有し，最終的には層流化する）の発生を理論的に捉えることを試みた（Lustro *et al.* 2019）．乱流遷移を力学系理論によって記述すると，過渡乱れの発生は過渡カオス（カオス・サドル）の発生として捉えることができる．さらには，力学系理論では，カオス・サドルの発生を（周期的）エッジ状態に関するホモクリニック軌道の生成，すなわちホモクリニック・タンジェンシーとして臨界的に表すことが可能である（Grebogi *et al.* 1993）．エッジ状態とは，位相空間において層流と乱流との吸引領域境界に位置する不変解であり，不変解とその安定多様体とが乱流あるいは過渡乱流を層流から分かつ境界を与える．平面クエット流においては周期的エッジ状態が既に発見されていることから（Kawahara & Kida 2001），この周期的エッジ状態のホモクリニック軌道を探索した．その結果，最低レイノルズ数で互いに異なる 1 対のホモクリニック軌道が最初に現れる第 1 ホモクリニック・タンジェンシーが，壁面間距離の半分および壁面間速度差の半分に基づくレイノルズ数 $Re = 240.88$ で

起きることが明らかとなり，直接数値シミュレーションにおいてもこのレイノルズ数において実際に（最終的に層流化する）過渡乱流の発生が観測された．

以上の研究成果は，近年進められてきた不変解による発達乱流あるいは乱流遷移の定性的特徴付けとは一線を画し，それらの定量的記述へと歩を進めており，今後の更なる研究の進展の契機になることを切に期待している．

文　献

Davidson, P. A. 2004 *Turbulence*, Oxford University Press.

Eckhardt, B., Faisst, H., Schmiegel, A. & Scheider, T. M. 2008 Dynamical systems and the transition to turbulence in linearly stable shear flows. *Philos. Trans. R. Soc. A* **366**, 1297–315.

Foias, C., Manley, O., Rosa, R. & Temam, R. 2001 *Navier–Stokes Equations and Turbulence*, Cambridge University Press.

Grebogi, C., Ott, E. & Yorke, J. A. 1983 Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos. *Physica D* **7**, 181–200.

Grossmann, S. & Lohse, D. 2000 Scaling in thermal convection: a unifying theory. *J. Fluid Mech.* **407**, 27–56.

Kawahara, G. & Kida, S. 2001 Periodic motion embedded in plane Couette turbulence: regeneration cycle and burst. *J. Fluid Mech.* **449**, 291–300.

Kawahara, G., Uhlmann, M. & van Veen, L. 2012 The significance of simple invariant solutions in turbulent flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **44**, 203–225.

Lustro, J. R. T., Kawahara, G., van Veen, L., Shimizu, M. & Kokubu, H. 2019 The onset of transient turbulence in minimal plane Couette flow. *J. Fluid Mech.* **862**, R2.

Motoki, S., Kawahara, G. & Shimizu, M. 2019 In preparation.

Reynolds, O. 1883 An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **174**, 935–982.

Uhlmann, M., Kawahara, G. & Pinelli, A. 2010 Traveling-waves consistent with turbulence-driven secondary flow in a square duct. *Phys. Fluid* **22**, 084102.