

# 線形シア一流上を進行する周期的深水波の2次元運動

茨城大学 理学部 数学・情報数理領域 村重 淳 (Sunao Murashige)

Department of Mathematics and Informatics, Ibaraki University

## 概要

本研究では、水平方向の流速が水深方向に直線的に変化する流れ（線形シア一流）の水面を伝播する周期的な深水波の、進行方向に沿った鉛直断面における2次元運動について考える。特に、極限波に近い大振幅運動に対して、流場を等角写像を用いて適当な複素平面に写すことにより精度のよい数値解を求める方法を提案する。

## 1 はじめに

本研究では、Fig.1(a)のような鉛直方向に速度が直線的に変化する流れ（線形シア一流）の水面を、一定速度で波形を変えずに進行する波の周期的運動について考える。特に、水深は無限大で、波の進行方向は流れと同じ方向、あるいは反対方向とする。このとき、波の運動は進行方向に沿った鉛直断面内で2次元的で、波と一緒に動く座標系で定常である。

線形シア一流は渦度が一定であるので、その摂動が2次元運動である場合は渦無し運動の理論を適用できる。そのため、線形シア一流上の水面波に関する研究は古くから行われている [1, 5, 6, 8]。線形シア一流は定常進行波の波形に大きな影響を与えるが、特に極限波高が小さくなる場合があることが知られている。したがって、線形シア一流が存在すると、比較的小さな波高で砕波する可能性がある。

Francius & Kharif [2] は、線形シア一流上の定常進行波の線形安定性を数値的に調べた。ただし、彼らの方法では定常進行波解を物理平面における級数展開で表しているため、振幅の大きな波に対しては適用できない。それに対して、Choi [1] は等角写像を用いて流場を複素平面の下半平面上に、水面を実軸上に写すことにより、波高の増加に伴う波形の変化を調べた。本研究では、この定式化をさらに発展させて、極限波に近い大振幅波の解を精度よく求める方法について考える。

## 1 問題の定式化

### 1.1 複素速度ポテンシャル $f$ の導入

Fig.1(a)のように、線形シア一流上を左方向に一定速度  $c$  で波形を変えずに進む波（定常進行波）の、進行方向に沿った鉛直断面内における流体の2次元運動を考える。水

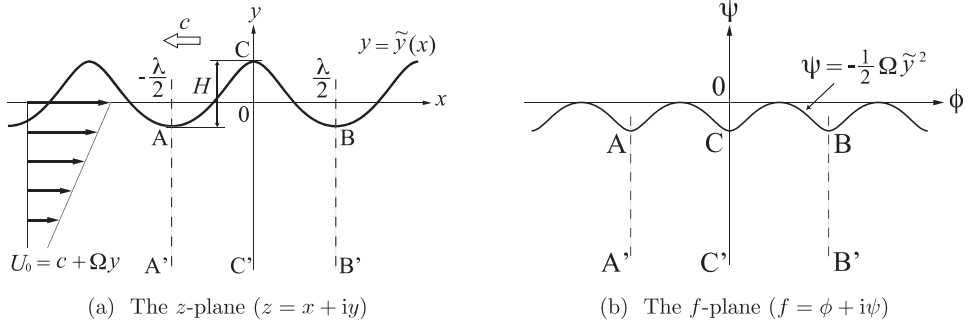


Fig. 1: Two-dimensional motion of periodic deep-water waves progressing on a linear shear current in the physical plane (the  $z$ -plane) and the complex velocity potential plane (the  $f$ -plane). The fluid motion is steady in the  $(x, y)$  frame in (a) which moves to the left with constant wave speed  $c$ .

深は無有限大とする。波とともに移動する座標系  $(x, y)$  では流体の運動は定常であるので、 $(x, y)$  平面で問題の定式化を行う。 $(x, y)$  平面における線形シア一流の水平方向の速度成分は  $U_0 = c + \Omega y$  ( $\Omega$ : 実定数) のように表されるとする。シアの強さ  $\Omega$  が定常進行波に与える影響を調べることが、本研究の目的である。 $(x, y)$  平面における流体の速度ベクトル  $(U, V)$  は、次のように表すことができる。

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (1)$$

ここで、 $(u, v)$  は

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{as } y \rightarrow -\infty \quad (2)$$

をみだす。 $(U, V)$  に対する渦度  $\omega$  は

$$\omega = V_x - U_y = -\Omega \quad (3)$$

となり、一定である。流体は非粘性・非圧縮とすると、2次元運動の渦度は保存されるので、 $(u, v)$  が与える運動は渦無しである。したがって、

$$\frac{df}{dz} = w = u - iv \quad (4)$$

により定義される複素速度ポテンシャル  $f = \phi + i\psi$  が存在する。ここで、 $z = x + iy$  は複素座標、 $w = u - iv$  は複素速度を表す。また、質量保存則  $U_x + V_y = 0$  より流れ関数  $\Psi$  ( $\Psi_y = U, \Psi_x = -V$ ) が存在し、次式で与えられる。

$$\Psi = \frac{1}{2}\Omega y^2 + \psi \quad (5)$$

波の運動は周期的で波長は  $\lambda$  とする。次節以降では、各変数を次のように無次元化し、上付きのアスタリスク \* は省略する。

$$z^* = \frac{2\pi}{\lambda}z, \quad f^* = \frac{2\pi}{c\lambda}f, \quad \Omega^* = \frac{\Omega}{\sqrt{2\pi g/\lambda}}, \quad c^* = \frac{c}{\sqrt{g\lambda}}, \quad E^* = \frac{E}{\rho g \lambda^3 / (2\pi)^2} \quad (6)$$

ここで、 $g$  は重力加速度、 $E$  はエネルギーを表す。

## 1.2 複素平面の下半平面への等角写像

水面  $y = \tilde{y}(x)$  上で流れ関数  $\Psi$  は一定であるので、線形シア一流が存在する ( $\Omega \neq 0$ ) と  $\psi$  は一定ではない。したがって、Fig.1(b) のように、 $f$  平面では水面を実軸上に写すことができない。そこで、Fig.2(a) のように、水面を実軸上  $\eta = 0$ 、流場を下半面  $\eta < 0$  に等角写像で写すような複素平面  $\zeta$  平面 ( $\zeta = \xi + i\eta$ ) を導入する [1]。  $\zeta$  平面における水面  $\eta = 0$  上の運動学的条件は、

$$\Psi_\xi = \psi_\xi + \frac{\Omega}{\sqrt{2\pi c}} y y_\xi = 0 \quad \text{at } \eta = 0 \quad (7)$$

力学的条件は、

$$\left( \phi_\xi + \frac{\Omega}{\sqrt{2\pi c}} y x_\xi \right)^2 = s_\xi^2 \left( B - \frac{y}{\pi c^2} \right) \quad \text{at } \eta = 0 \quad (8)$$

のように表すことができる。ここで、 $s_\xi = \sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2}$ 、 $B$  は実定数である。また、 $(x, y)$  平面は波と一緒に移動していることを考慮して、 $z = z(\zeta)$  と  $f = f(\zeta)$  を

$$z = \zeta + \Delta z(\zeta) \quad \text{and} \quad f = \zeta + \Delta f(\zeta) \quad (9)$$

のように表す。

## 1.3 複素平面の単位円板上への等角写像

数値計算で近似解を求めるためには、流場を新しい複素平面 ( $\Lambda$  平面) における単位円板上に写すと便利である。  $\zeta$  平面から  $\Lambda$  平面への等角写像は次式で与えられる。

$$\Lambda = e^{-i\zeta} \quad \text{or} \quad \zeta = i \log \Lambda \quad (10)$$

このとき、水面  $\zeta = \xi$  は単位円の円周上  $\Lambda = e^{i\vartheta}$  に写され、 $\xi$  と  $\vartheta$  は次のように関係づけられる。

$$-\xi = \vartheta \quad (11)$$

波高の増加とともに、波の山 C 付近の波形の変化が大きくなる。波の山 C 付近の流場の解像度を上げるためには、次式で与えられる等角写像を用いて流場をさらに新しい複素平面 ( $\hat{\Lambda}$  平面、Fig.2(b)) における単位円板上に写すことが有効である [3]。

$$\hat{\Lambda} = \frac{\Lambda - \mu}{1 - \mu\Lambda} \quad (0 \leq \mu < 1) \quad (12)$$

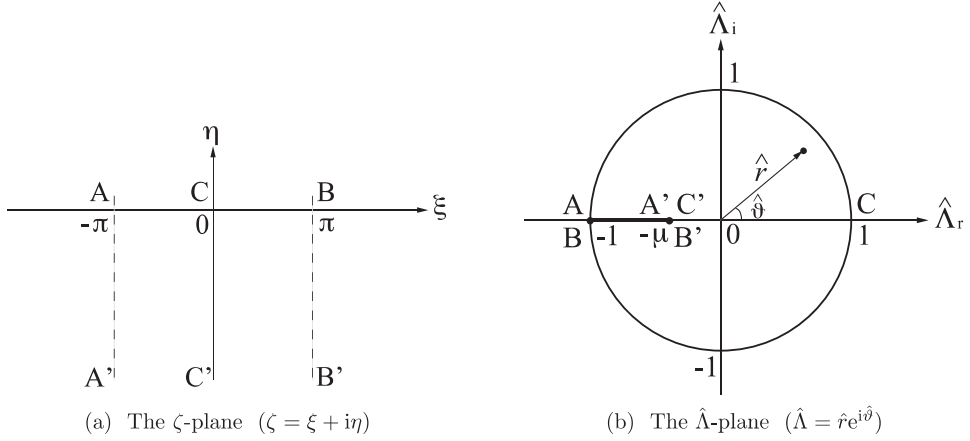


Fig. 2: Conformal mapping of the flow domain onto the lower half plane of the  $\zeta$ -plane and the unit disk in the  $\hat{\Lambda}$ -plane. When  $\mu$  in the mapping function (12) is set to zero,  $\hat{\Lambda} = \Lambda$ .

この写像により水面  $\Lambda = e^{i\vartheta}$  は  $\hat{\Lambda} = e^{i\hat{\vartheta}}$  に写されるが、 $\vartheta$  と  $\hat{\vartheta}$  は次式により関係づけられる。

$$\frac{d\vartheta}{d\hat{\vartheta}} = \frac{1 - \mu^2}{1 + 2\mu \cos \hat{\vartheta} + \mu^2} \quad (13)$$

$\mu$  ( $0 \leq \mu < 1$ ) を 1 に近づけることにより、波の山 C 付近の流場の解像度を上げることができる。

波形の対称性と (9) より、水面 ( $\hat{\Lambda} = e^{i\hat{\vartheta}}$ ) 上における  $z(\hat{\Lambda} = e^{i\hat{\vartheta}} = x(\hat{\vartheta}) + iy(\hat{\vartheta}))$  は次のように表すことができる。

$$\begin{cases} x(\hat{\vartheta}) = -\vartheta(\hat{\vartheta}) - \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \sin n\hat{\vartheta} \\ y(\hat{\vartheta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{a}_n \cos n\hat{\vartheta} \end{cases} \quad (14)$$

ここで、 $\hat{a}_n \in \mathbb{R}$ 。また、運動学的条件 (7) より水面 ( $\hat{\Lambda} = e^{i\hat{\vartheta}}$ ) 上では

$$\psi_{\hat{\vartheta}} = -\frac{\Omega}{\sqrt{2\pi c}} y y_{\hat{\vartheta}} \quad (15)$$

であるので、(9) より水面上の  $\phi_{\hat{\vartheta}}$  は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \phi_{\hat{\vartheta}} &= -\frac{d\vartheta}{d\hat{\vartheta}} + \Delta\phi_{\hat{\vartheta}} = -\frac{d\vartheta}{d\hat{\vartheta}} - \hat{\mathcal{H}}[\psi_{\hat{\vartheta}}] \\ &= -\frac{d\vartheta}{d\hat{\vartheta}} + \frac{\Omega}{\sqrt{2\pi c}} \hat{\mathcal{H}}[y y_{\hat{\vartheta}}] \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、 $\hat{\mathcal{H}}$  は

$$\Delta\phi_{\hat{\vartheta}} = \text{Re}\{\Delta f_{\hat{\vartheta}}\} = -\hat{\mathcal{H}}[\text{Im}\{\Delta f_{\hat{\vartheta}}\}] = -\hat{\mathcal{H}}[\psi_{\hat{\vartheta}}] \quad (17)$$

のように定義されるが、(15) より  $\psi_{\hat{\theta}}$  は奇関数であるので  $\hat{\mathcal{H}}[\psi_{\hat{\theta}}]$  は次のようにして求めることができる。

$$\hat{\mathcal{H}}[\psi_{\hat{\theta}}] = \hat{\mathcal{H}} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \hat{b}_n \sin n\hat{\nu} \right] = - \sum_{n=1}^{\infty} \hat{b}_n \cos n\hat{\nu} \quad (18)$$

(16) を力学的境界条件 (8) に代入すると、 $\hat{\Lambda}$  平面における水面 ( $\hat{\Lambda} = e^{i\hat{\nu}}$ ) 上の境界条件は次のように表される。

$$G_1(\hat{\nu}) = 0 \quad \text{at } \hat{\Lambda} = e^{i\hat{\nu}} \quad (19)$$

ここで、

$$G_1(\hat{\nu}) = \left\{ \frac{d\hat{\nu}}{d\hat{\theta}} - \frac{\Omega}{\sqrt{2\pi c}} (yx_{\hat{\theta}} + \hat{\mathcal{H}}[yy_{\hat{\theta}}]) \right\}^2 - s_{\hat{\theta}}^2 \left( B - \frac{y}{\pi c^2} \right) \quad (20)$$

with  $s_{\hat{\theta}} = \sqrt{x_{\hat{\theta}}^2 + y_{\hat{\theta}}^2}$

また、波の運動エネルギー  $E_k$  と位置エネルギー  $E_p$  は、次のように表すことができる。

$$\left\{ \begin{aligned} E_k &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\hat{y}(x)} \frac{1}{2} \{ (U - c)^2 + V^2 \} dy dx - \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} \left( \frac{\Omega}{\sqrt{2\pi}} y \right)^2 dy dx \\ &= -c^2 \int_0^{\pi} \left\{ \left( -y + \frac{1}{2} \frac{\Omega}{\sqrt{2\pi c}} y^2 \right) (\phi_{\hat{\theta}} - x_{\hat{\theta}}) + \frac{1}{3} \left( \frac{\Omega}{\sqrt{2\pi c}} \right)^2 y^3 x_{\hat{\theta}} \right\} d\hat{\nu} \quad , \quad (21) \\ E_p &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\hat{y}(x)} y dy dx = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} y^2 x_{\hat{\theta}} d\hat{\nu} \end{aligned} \right.$$

#### 1.4 微小振幅波の性質

線形シア一流上の微小振幅深水波に対する分散関係は、次式で与えられる。

$$c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\Omega}{2} + \sqrt{1 + \left( \frac{\Omega}{2} \right)^2} \right) \quad (22)$$

また、運動エネルギー  $E_k$  と位置エネルギー  $E_p$  の比と和は、次式で与えられる。

$$\frac{E_k}{E_p} = 1 + \frac{1}{2} \Omega^2 + \Omega \sqrt{1 + \left( \frac{\Omega}{2} \right)^2} \quad (23)$$

$$E_k + E_p = \frac{a_1^2}{2} \left\{ 1 + \left( \frac{\Omega}{2} \right)^2 + \frac{\Omega}{2} \sqrt{1 + \left( \frac{\Omega}{2} \right)^2} \right\} \quad (24)$$

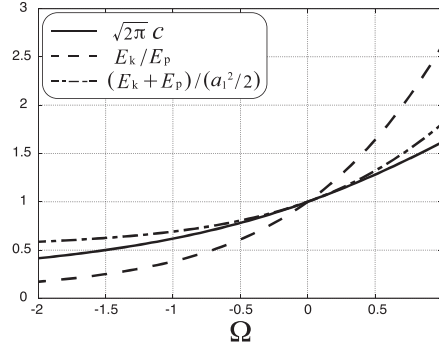


Fig. 3: Variations of the wave speed  $c$ , the kinematic energy  $E_k$  and the potential energy  $E_p$  of infinitesimal deep-water waves on a linear shear current with change of the shear strength  $\Omega$ . See (22), (23) and (24).

ここで、 $a_1$  は波の振幅を表す。Fig.3 は、(22), (23), (24) にしたがう微小振幅波の進行速度  $c$ 、波のエネルギー  $E_k$ ,  $E_p$  と線形シア一流の強さ  $\Omega$  の関係を表している。

## 2 計算方法

前節で定式化した問題は、二つのパラメータを与えることにより解くことができる。本研究では、シア一流の強さ  $\Omega$  と次式で定義される  $\gamma_0$  を二つのパラメータとして選択する。

$$\gamma_0 = 1 - \frac{q_C}{q_A} \quad (25)$$

ここで、 $q_C = q(\hat{\vartheta} = 0)$  と  $q_A = q(\hat{\vartheta} = \pi)$  はそれぞれ波の山 C と谷 A における速度の大きさ  $q = \sqrt{U^2 + V^2}$  を表す。

水面上の境界条件 (19) をみたく  $x$  と  $y$  の近似解を、以下のようにして数値計算で求めた。まず、(14) における Fourier 級数を  $N$  項で打ち切ることにより  $x$  と  $y$  を近似すると、(19) には  $N + 3$  個の未知変数  $\hat{a}_n$  ( $n = 0, 1, \dots, N$ ),  $c$ ,  $B$  が含まれる。そこで、水面  $\hat{\Lambda} = e^{i\hat{\vartheta}}$  上に  $N + 1$  個の分点  $\hat{\vartheta} = \hat{\vartheta}_j = j\pi/N$  ( $j = 0, 1, \dots, N$ ) を配置し、次のような  $N + 3$  個の条件をみたくするように、Newton 法を用いて未知変数を決定した。

$$\begin{cases} G_1(\hat{\vartheta}_j) = 0 & (j = 0, 1, \dots, N) \\ G_2 = (1 - \gamma_0)^2 \left\{ B - \frac{y_A}{\pi c^2} \right\} - \left\{ B - \frac{y_C}{\pi c^2} \right\} = 0 \\ G_3 = \int_0^{-\lambda/2} y dx = \int_0^\pi y x_{\hat{\vartheta}} d\hat{\vartheta} = 0 \end{cases} \quad (26)$$

Newton 法の停止条件は、次のように与えた。

$$\max_{j=0, \dots, N} \{|G_1(\hat{\vartheta}_j)|, |G_2|, |G_3|\} < 10^{-11} \quad (27)$$

### 3 計算例

前節の計算方法による計算例を Figs.4~7 に示す ( $N = 256$  or  $512$ ,  $\mu = 0.95$ ).

Fig.4 は、異なるシア一流の強さ  $\Omega$  ( $= -1.5, -0.6, 0, 0.6$ ) に対する波形  $y = \tilde{y}(x)$  の計算例を比較している。それぞれの  $\Omega$  の値に対して、 $\gamma_0$  の値を変えた時の結果 ( $\gamma_0 = 0.3, 0.5, 0.7, 0.95$ ) を表している。 $\gamma_0 = 1$  では波の頂点が角になり、その内角はシア一流の強さ  $\Omega$  の値によらず一定で 120 度であることが知られている [4]。Fig.4 より、頂点に角をもつ極限波形の波高は、シア一流の強さ  $\Omega$  の値により大きく変化することが予想される。Fig.5 は、Fig.4 の波形  $y = \tilde{y}(x)$  の曲率  $\kappa = d\Theta/ds$  ( $\tan \Theta = d\tilde{y}/dx$ ,  $s$ : 水面に沿って測った長さ) の計算例を比較している。これらより、 $\Omega < 0$  でその絶対値が大きくなると、最大波高は小さくなるが、波の山付近の曲率の変化は大きくなるのがわかる。したがって、シア一流が存在する ( $\Omega \neq 0$ ) と、比較的小きな波高でも碎波する可能性があり、その性質はシア一流が存在しない ( $\Omega = 0$ ) 場合と異なることが予想される。

Fig.6(a) は、異なるシア一流の強さ  $\Omega$  に対する波の進行速度  $c$  と波高と波長の比  $H/\lambda$  の関係の計算例を表している。計算は  $\Omega$  の値を固定し、(25) のパラメータ  $\gamma_0$  の値を 0.01 から 0.95 まで連続的に変化させて行った。Fig.6(b) は、 $\Omega = 0$  の場合の最大波高付近の計算結果を過去の計算結果 [3] と比較し、一致していることを表している。

Fig.7 は、異なるシア一流の強さ  $\Omega$  に対する波の運動エネルギー  $E_k$ 、位置エネルギー  $E_p$  と波高と波長の比  $H/\lambda$  の関係の計算例を表している。Fig.7 より、エネルギーの和  $E_k + E_p$  は極限波付近の大きな振幅で最大値に達し、この傾向はシア一流が存在 ( $\Omega \neq 0$ ) しても変わらないことがわかる。

### 4 まとめ

本研究では、線形シア一流上を一定速度  $c$  で波形を変えずに進行する深水波の 2 次元かつ周期的な定常運動について考えた。線形シア一流の渦度 ( $= -\Omega$ ) は一定であるので、波動に対して複素速度ポテンシャル  $f$  を導入できる。しかし、 $f$  平面における水面の位置 (流場の境界) は未知であるので、 $f$  平面における定式化は有効ではない。そこで、水面を複素平面の単位円上に、流場をその単位円の内側に写す等角写像を考え、写した複素平面 ( $\hat{\Lambda}$  平面) における定式化と計算方法を提案した。この方法により、シア一流がない場合 ( $\Omega = 0$ ) に対して開発された計算方法を、シア一流がある場合 ( $\Omega \neq 0$ ) に対して直接適用できる。特に、波の山付近の空間的解像度を高くすることにより、大振幅波の高精度計算が可能である。

波動の特徴量として、波形、水面上の曲率分布、進行速度  $c$ 、エネルギーの計算例を示し、シア一流の強さ  $\Omega$  にとまう変化を調べた。特に、エネルギーが極限波より少し低い波振幅で最大値に達する性質はシア一流がある場合も変わらないが、このことは波の安定性と関連があると考えられる [3, 7]。この点については、今後さらに詳しく調べる予定である。

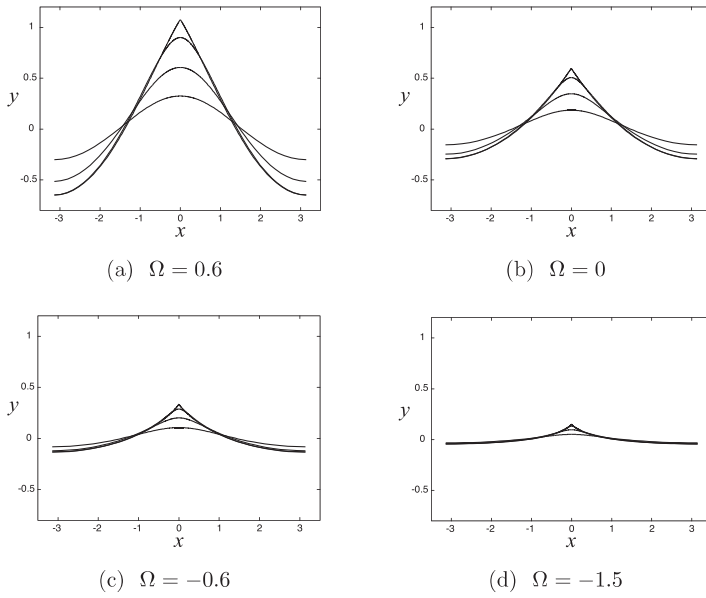


Fig. 4: Wave profiles  $y = \tilde{y}(x)$  for different values of the shear strength  $\Omega$ . Four lines in each figure correspond to  $\gamma_0 = 0.3, 0.5, 0.7$  and  $0.95$ , respectively. ( $N = 512, \mu = 0.95$ )

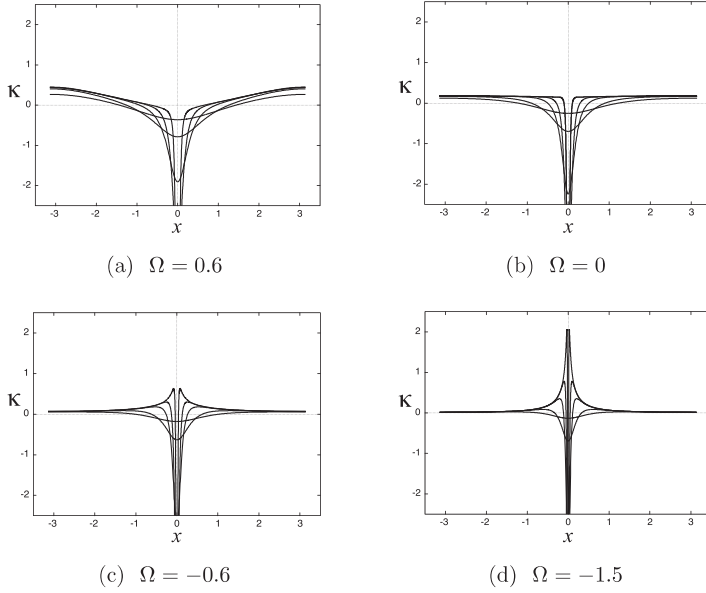
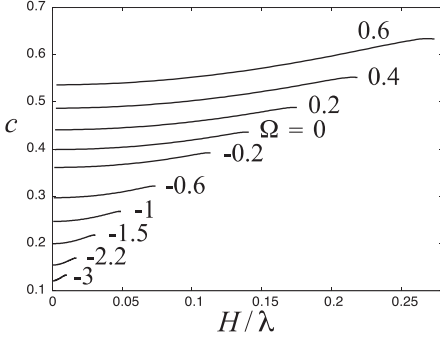
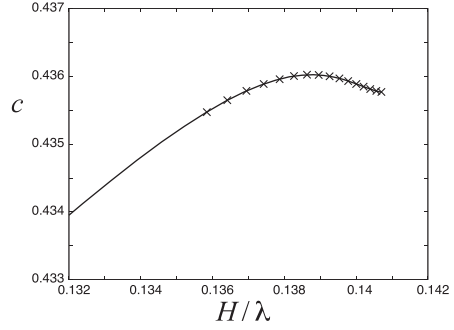


Fig. 5: The curvature  $\kappa = d\Theta/ds$  of the water surface. ( $\tan \Theta = d\tilde{y}/dx, s$  : the arclength taken along the water surface,  $N = 256, \mu = 0.95$ )



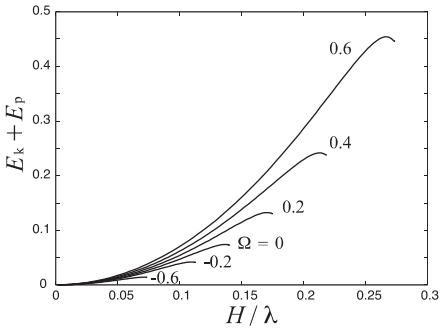


(a) Variation of  $c$  with  $H/\lambda$

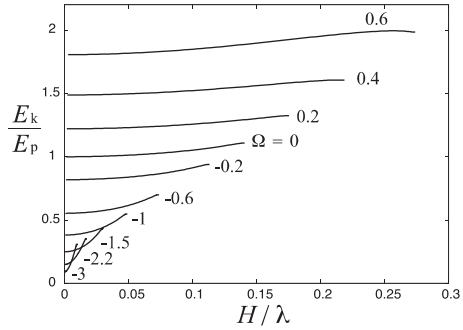


(b) Comparison with the previous results for  $\Omega = 0$ .

Fig. 6: Variation of the wave speed  $c$  with the wave height-to-wavelength ratio  $H/\lambda$  for different values of the shear strength  $\Omega$ . Numerals in this figure denote the value of  $\Omega$ . The symbol  $\times$  in (b) shows the computed results by Longuet-Higgins & Tanaka [3]. ( $0.01 \leq \gamma_0 \leq 0.95$ ,  $N = 256$ ,  $\mu = 0.95$ )



(a) The sum  $E_k + E_p$



(b) The ratio  $E_k/E_p$

Fig. 7: Variation of the kinetic energy  $E_k$  and the potential energy  $E_p$  with the wave height-to-wavelength ratio  $H/\lambda$  for different values of the shear strength  $\Omega$ . ( $0.01 \leq \gamma_0 \leq 0.95$ ,  $N = 256$ ,  $\mu = 0.95$ )

**謝辞**

本研究は JSPS 科研費（基盤研究（B）） JP17H02856 の助成を受けたものです。

**参考文献**

- [1] Choi, W. : Nonlinear surface waves interacting with a linear shear current, *Mathematics and Computers in Simulation*, 80 (2009), pp.29-36.
- [2] Francius, M. & Kharif, C., “Two-dimensional stability of finite-amplitude gravity waves on water of finite depth with constant vorticity,” *J. Fluid Mech.*, 830 (2017), pp.631–659.
- [3] Longuet-Higgins, M. & Tanaka, M., “On the crest instabilities of steep surface waves,” *J. Fluid Mech.*, 336 (1997), pp.51–68.
- [4] Milne-Thomson, L.M., “Theoretical hydrodynamics,” 5th ed., Dover (1968), §14.50, pp.405–406.
- [5] Peregrine, D.H., “Interaction of water waves and currents,” *Adv. Appl. Mech.*, 16 (1976), pp.9–117.
- [6] Simmen, J.A. & Saffman, P.G., “Steady deep-water waves on a linear shear current,” *Studies in Applied Mathematics*, 73 (1985), pp.35–57.
- [7] Tanaka, M., “The stability of steep gravity waves,” *Journal of the Physical Society of Japan*, 52 (1983), pp.3047–3055.
- [8] Teles da Silva, A.F. and Peregrine, D.H. : Steep, steady surface waves on water of finite depth with constant vorticity, *J. Fluid Mech.*, vol.195, pp.281–302, 1988.