

様式VI

博士学位論文調査報告書

論文題目

Studies on generalizations of the classical orthogonal polynomials where gaps are allowed in their degree sequences

(次数列に欠落が存在するような古典直交多項式の一般化に関する研究)

申請者氏名 羅 宇

最終学歴

令和2年3月

京都大学大学院情報学研究科

数理工学専攻博士後期課程

研究指導認定見込

学識確認

令和 年 月 日 (論文博士のみ)

論文調査委員 京都大学大学院情報学研究科
(調査委員長) 教授 矢ヶ崎一幸

論文調査委員 京都大学大学院情報学研究科
教授 中村佳正

論文調査委員 京都大学大学院情報学研究科
准教授 辻本 諭

(続紙 1)

京都大学	博士 (情報学)	氏名	羅 宇
論文題目	Studies on generalizations of the classical orthogonal polynomials where gaps are allowed in their degree sequences (次数列に欠落が存在するような古典直交多項式の一般化に関する研究)		
(論文内容の要旨)			
<p>本論文は、二階微分作用素の多項式固有関数である古典直交多項式に着目し、超対称量子力学理論における重要な手法であるDarboux変換及び超対称代数を用いることで、多項式列の次数条件を緩めることで得られる一般化古典直交多項式列について調べたものであり、全5章からなる。</p> <p>第1章は序論であり、古典直交多項式理論の歴史的背景を述べ、最近の進展から幅広い応用分野まで紹介し、古典直交多項式の有する双対性、すなわち三項間漸化式と固有値方程式を同時に満足する性質の重要性を説いている。これにより、古典直交多項式に現れる固有値方程式を一般化することが、古典直交多項式を一般化する際の鍵となる考え方であることを明らかにしている。</p> <p>第2章では、二階の微分方程式を満たす古典直交多項式を代表するHermite多項式、Laguerre多項式、Jacobi多項式のそれぞれに対して、多項式列の次数条件を緩めた古典直交多項式の一般化の一つである「例外型拡張」について、その零点とある静電気モデルの関係について調べている。具体的には、まず二階微分作用素に対するDarboux変換について述べた後、Hermite多項式、Laguerre多項式、Jacobi多項式の各例外型拡張が満たす二階微分方程式を導出し、それら多項式の零点が満たす関係式を用いることで、静電気モデルのエネルギー関数が最大値をとるための十分条件を明らかにした。</p> <p>第3章では、Dunkl型差分作用素の多項式固有関数として特徴づけられるBannai-Ito多項式の例外型拡張を構成している。ここでは、Dunkl型差分作用素に適用可能な一般化Darboux変換について議論した後、例外型Bannai-Ito作用素とその多項式固有関数を導いている。さらに、他の例外型拡張ではみられない例外型Bannai-Ito多項式特有の多項式次数の飛びについて調べ、その型の分類を与えている。また、一般化Darboux変換を複数回適用することで得られる例外型Bannai-Ito作用素の絡合関係式について調べ、固有関数の明示公式の導出に成功している。加えて、例外型Bannai-Ito多項式の直交性に関連して、他分野への応用を図る上で必要となる、付随する線形汎関数の正值性条件が詳細に調べられている。</p> <p>第4章では、Dunkl型微分作用素をスーパーチャージャーとするハミルトニアンを出発点として、次数列に特定の欠落がある場合の一般的な直交多項式列について議論を展開している。ここでは、ハミルトニアンから得られる多項式列をDunkl-SUSY直交多項式と名付け、一般の対称な直交多項式による定式化を与えている。さらに、超対称量子力学における可解なモデルに関する結果を用いることで、Dunkl-SUSY直交多項式に対する系統的な構成方法について述べ、Dunkl-SUSY直交多項式の基本的な性質の一つとして、Dunkl-SUSY直交多項式の満たす漸化式を導出している。</p> <p>第5章は、本論文のまとめである。前章までに得られた結果に対して考察を加え、将来の課題として、例外型Bannai-Ito多項式とDunkl-SUSY直交多項式の例に現れる次数列が偶数のみの直交多項式列の定式化への展望について述べている。</p>			

(続紙 2)

(論文審査の結果の要旨)

直交多項式の理論は、数学、物理学、情報学などの幅広い分野において重要な役割を果たしている。特に、直交性を満たす多項式列であると同時に二階の常微分方程式の固有関数である古典直交多項式は、量子力学、可積分系、近似理論、組合せ論などの様々な分野において、厳密な解析が可能な多くの重要なモデルにおいて現れる。本論文は、古典直交多項式が満たす固有値方程式に着目し、一般化した作用素に付随する固有値方程式が多項式で解ける際、作用素が満たすべき条件とその多項式固有関数に関する解析を行うことで、いくつかの古典直交多項式の一般化を具体的に導出し、その基本的な性質について調べたものである。

本論文では主に、差分作用素および微分作用素に鏡映作用素を加えたものとして、それぞれDunkl型差分作用素およびDunkl型微分作用素について議論している。特に、Dunkl型差分作用素の多項式固有関数として特徴づけられるBannai-Ito多項式は、古典直交多項式のq-Askeyスキームの頂点に位置するAskey-Wilson多項式の変形パラメータqが-1の非自明な極限から得られるものであり、いわゆる-1直交多項式の最も一般的な多項式列である。しかし、-1直交多項式は最近になって見出された新しい古典直交多項式のクラスであり、Bannai-Ito代数を始めとする代数構造とともに、-1直交多項式の一般化についても多くの注目を集めている。

本論文において得られた成果は具体的には以下の通りである。初めに、一階の差分作用素と鏡映作用素によって記述されるDunkl型作用素の固有値問題について調べることで、古典直交多項式の拡張に成功している。特に、超対称量子力学理論の重要な解析手法であるDarboux変換を用いて導出することで、Bannai-Ito多項式の例外型拡張を導出し、その直交性および次数列の飛びの型について詳細に議論している。これにより、従来にはない型の次数列の飛びをもつ例外型直交多項式が導出されており、これは例外型拡張された初めての-1直交多項式とみなせるものである。さらに、Dunkl型微分作用素をスーパーチャージャーとするモデルのハミルトニアンを導入し、付随する固有値問題の多項式固有関数として得られた新しい直交多項式をDunkl-SUSY直交多項式と名付け、対称な直交多項式の性質を用いた定式化が与えられている。この超対称量子力学モデルのハミルトニアンは二階のDunkl型微分作用素であり、それぞれ奇関数と偶関数に作用した際、鏡映作用素が消え、ともに通常の二階微分作用素とみなすことができるなど、このクラスの基本的な特徴付けに成功している。さらに、付随する漸化式を導くなど一般化固有値問題などへの応用之道を拓くものであり、重要な結果であると言える。

以上、本研究は、いくつかの-1直交多項式の一般化を導出し、それらの古典性に関する解析を行い、直交多項式の次数列に種々の飛びを許すものなど、幅広い応用分野を有する直交多項式理論において新しくかつ意義のある結果を与えている。よって、本論文は博士(情報学)の学位論文として価値あるものと認める。

また、令和2年2月18日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。なお、本論文は、京都大学学位規程第14条第2項に該当するものと判断し、公表に際しては、(全文公表時期は未定)当該論文の全文に代えてその内容を要約したものとすることを認める。

要旨公開可能日： 年 月 日以降