On the discrete mean of the derivative of Hardy function

名古屋大学多元数理科学研究科　小林　弘京
Hirotaka Kobayashi
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University

1　序論

$s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ を複素変数とした時, Riemann ζ 関数 $\zeta(s)$ の一階導関数の離散平均

$$\sum_{0<\gamma\le T} |\zeta'(\rho)|^2$$

を考察する問題は, Gonek の論文 [2] に始まる. ここで和は $\zeta(s)$ の非自明零点 $\rho = \beta + i\gamma$ にわたってとり, 重複を込める. 彼はこの論文で以下の定理を示した.

定理 1. Riemann 予想の仮定下で, 充分大きい T に対して

$$\sum_{0<\gamma\le T} |\zeta'(\rho)|^2 = \frac{1}{24\pi} T \log^4 \frac{T}{2\pi} + O(T \log^3 T)$$

が成り立つ.

Riemann 予想を仮定しているので, ここでは $\rho = 1/2 + i\gamma$ である.
この離散平均に関して今では二乗平均にとどまらず, より高次のべき

$$J_k(T) := \sum_{0<\gamma\le T} |\zeta'(\rho)|^{2k}$$

についても研究されている. 例えば, Ng [14] は Riemann 予想を仮定すると,

$$J_2(T) \asymp T \log^9 T$$

が成り立つことを示した. 実は, Gonek [3] と Hejhal [5] によって, $k \geq -3/2$ に対して

$$J_k(T) \asymp_k T(\log T)^{(k+1)^2}$$

であろうと予想されている. Ng の結果は Riemann 予想の仮定下で $k = 2$ の場合はこの予想が正しいことを示したものである. さらに, Milinovich [11] は Riemann 予想が正しければ, 各 $k \geq 0$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$J_k(T) \ll_{k,\varepsilon} T(\log T)^{(k+1)^2+\varepsilon}.$$

が成り立つことを示した. また, Milinovich と Ng [12] は, Dirichlet L-関数に対する一般 Riemann 予想を仮定し, 各 $k \geq 0$ に対し, lower bound

$$J_k(T) \gg_k T(\log T)^{(k+1)^2}$$

を示した. これで Gonek と Hejhal の予想を $k \geq 0$ に対して解決するためには Milinovich による upper bound から ε を除けば良いということになった. これについては 2018 年 4 月に arXiv 上に, 各 $k \geq 0$ に対して upper bound

$$J_k(T) \ll_k T(\log T)^{(k+1)^2}$$

を得たと主張する論文 [8] が Kirila によって upload された (原稿執筆時点では未出版). さてこれで $k \geq 0$ に対するこの離散平均についての問題は一先ず片付いたかというとそうではない. さらに次の予想が Hughes, Keating, O'Connell [6] の三氏によって提出された.

予想 1. $k > -3/2$ に対して

$$J_k(T) \sim \frac{G^2(k+2)}{G(2k+3)} a_k \frac{T}{2\pi} (\log T)^{(k+1)^2}$$

が成り立つ. ここで,

$$a_k = \prod_p \left(1 - p^{-1}\right)^{k^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(m+k)}{m!\Gamma(k)}\right)^2 p^{-m}$$

であって, $G(z)$ は Barnes G 関数

$$G(z+1) = (2\pi)^{\frac{z}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z^2 + \gamma z^2 + z)\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n e^{-z+\frac{z^2}{2n}}$$

である.

この予想は $k=0,1$ の場合しか解決していない. $k=0$ の時は, $J_k(T)$ は ζ 関数の零点の個数関数 $N(T)$ に一致し, $k=1$ の場合は先の Gonek の結果による. 実は, $k=1$ の場合はより精密な漸近式を得ることができる, というのが本稿の主定理である.

主定理を紹介するために実数値関数 Hardy Z-関数の定義を与える. 複素変数を $s=\sigma+it$ とし, $h(s)=\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(s/2), \theta(t)=\arg h(1/2+it)$ とした時 Hardy Z-関数 $Z(t)$ は

$$Z(t)=e^{i\theta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$$

と定義される. 主定理は以下である.

定理 2. Riemann 予想を仮定すると, 充分大きい T に対して, 漸近式

$$\begin{aligned}\sum_{0<\gamma\le T}|Z'(\gamma)|^2=&\frac{1}{24\pi}T\log^4\frac{T}{2\pi}+\frac{2\gamma_0-1}{6\pi}T\log^3\frac{T}{2\pi}\\&+a_1T\log^2\frac{T}{2\pi}+a_2T\log\frac{T}{2\pi}+a_3T+O(T^{\frac{3}{4}}\log^{\frac{7}{2}}T)\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで γ_0 は Euler 定数で, a_i $(i=1,2,3)$ は Stieltjes 定数を用いて明示的に表すことができ, 和は $Z(t)$ の零点にわたってとる.

実は Riemann 予想の仮定下で左辺の和は $J_1(T)$ に一致する. まず, $Z(t)$ の定義から直ちに $|Z(t)|=|\zeta(1/2+it)|$ が分かるので, $Z(t)$ の零点と $\zeta(s)$ の critical line $\sigma=1/2$ 上の零点は一致する. 次に, $Z(t)$ の定義から

$$Z'(t)=ie^{i\theta(t)}\left(\zeta'\left(\frac{1}{2}+it\right)-\frac{1}{2}\omega\left(\frac{1}{2}+it\right)\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right)$$

である. ここで $\omega(s)$ は $\zeta(s)$ が満たす関数等式

$$\zeta(s)=\chi(s)\zeta(1-s)$$

に現れる $\chi(s)$ の対数微分であり,

$$\omega\left(\frac{1}{2}+it\right)=-2\theta'(t)$$

を満たす. このことから有理型関数 $Z_1(s)$ を

$$Z_1(s):=\zeta'(s)-\frac{1}{2}\omega(s)\zeta(s) \tag{1}$$

と定義すると,

$$|Z'(t)|=\left|Z_1\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|$$

が分かる. 従って, Riemann 予想を仮定すると,

$$|Z'(\gamma)| = |\zeta'(\rho)|$$

を得る. ここで $\rho = 1/2 + i\gamma$ である. 以上のことから, 主定理における和と $J_1(T)$ が一致することが分かり, 従って主定理が Gonek の結果の改善になっていることが導かれる. ところがこの結果のプレプリント [9] を arXiv 上に upload したところ, Milinovich 氏の指摘により, Conrey と Snaith [1] が漸近式

$$\begin{aligned}J_1(T) = \int_0^T \Bigg(& \frac{1}{24\pi}\log^4\frac{t}{2\pi} + \frac{\gamma_0}{3\pi}\log^3\frac{t}{2\pi} + \left(\frac{\gamma_0^2}{2\pi} - \frac{\gamma_1}{\pi}\right)\log^2\frac{t}{2\pi} \\ & - \left(\frac{\gamma_0^3}{\pi} + \frac{5\gamma_0\gamma_1}{\pi} + \frac{\gamma_2}{2\pi}\right)\log\frac{t}{2\pi} \\ & + \frac{\gamma_0^4}{\pi} + \frac{6\gamma_0^2\gamma_1}{\pi} + \frac{7\gamma_1^2}{\pi} + \frac{4\gamma_0\gamma_2}{\pi} + \frac{5\gamma_3}{3\pi}\Bigg)(1 + O(t^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}))dt\end{aligned}$$

を予想しており, Milinovich 氏の学位論文 [10] ですでにこの予想を Riemann 予想の仮定下で解決していたということが判明した. ここで γ_k $(k = 0, 1, 2, 3)$ は

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\gamma_k}{k!}(s-1)^k$$

に現れる Stieltjes 定数である. この漸近式は積分を実行することで, 主要項に関しては筆者の結果と一致することが確かめられる. 誤差項に注目すると, 筆者の結果では $T^{\frac{3}{4}}\log^{\frac{7}{2}} T$ であったのに対し, この予想式, すなわち Milinovich 氏が得た漸近式では $T^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ となっており, 筆者の結果を完全に凌駕している. 従って筆者の結果は新しくもない上に誤差がより悪い結果なのだが, Milinovich 氏の証明とはやや異なる部分があるので, 本稿ではその部分について述べようと思う.

2　二つの証明

筆者と Milinovich 氏の証明の根本的な違いは, 筆者は和

$$\sum_{0<\gamma\le T} |Z'(\gamma)|^2$$

を考えたのに対して, Milinovich 氏はより直接的に

$$\sum_{0<\gamma\le T} |\zeta'(\rho)|^2$$

を考察した点である. 筆者が考察した和を $M_1(T)$, Milinovich 氏が考察した和を $M_2(T)$ とすると, 留数定理によってそれぞれ

$$M_1(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\zeta'}{\zeta}(s)Z_1(s)Z_1(1-s)ds$$
$$M_2(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\zeta'(s)\zeta'(1-s)ds$$

と書ける. ここで C は, $c+i$, $c+iT$, $1-c+iT$, $1-c+i$ を頂点とする四角形で, c は一先ず 1 より大きい実数として, 後で具体的に決めるものとする. 筆者の場合は $c=5/8$ としたのだが, 結果には特に影響はない. いま, Riemann 予想を仮定しているので, それから従うことが知られている Lindelöf 予想による評価

$$|\zeta(\sigma+it)| \ll t^{\frac{1}{2}-\sigma+\varepsilon} \quad (\sigma \le 1/2, t \ge 1)$$

を用いると上記の積分の水平方向は $O(T^{c-\frac{1}{2}+\varepsilon})$ と評価できる. 従って $M_1(T)$ は

$$\begin{aligned}M_1(T) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c+i}^{c+iT} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)Z_1(s)Z_1(1-s)ds \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_{1-c+iT}^{1-c+i} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)Z_1(s)Z_1(1-s)ds + O(T^{c-\frac{1}{2}+\varepsilon})\end{aligned}$$

となり, 第一項の積分を I_1, 第二項の積分を I_2 とおくと, $\zeta(s)$ の関数等式を利用することで I_2 が

$$I_2 = -\frac{1}{2\pi i}\int_{1-c+i}^{1-c+iT} \frac{\chi'}{\chi}(s)Z_1(s)Z_1(1-s)ds + \overline{I_1}$$

となることがわかる. 従って, $M_1(T)$ は結局

$$M_1(T) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{1-c+i}^{1-c+iT} \frac{\chi'}{\chi}(s)Z_1(s)Z_1(1-s)ds + 2\Re I_1 + O(T^{c-\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

と表すことができる. これは $M_2(T)$ でも, $Z_1(s)$ を $\zeta'(s)$ に置き換えたものがそのまま成立する.

まず第一項の積分の計算について述べる. $1-c$ は $1/2$ より小さいので, Cauchy の積分定理によって積分路を $\sigma=1/2$ 上に変形すると上の積分は

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}+i}^{\frac{1}{2}+iT} \frac{\chi'}{\chi}(s)Z_1(s)Z_1(1-s)ds + O(T^{c-\frac{1}{2}+\varepsilon}) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_1^T \log\frac{t}{2\pi} Z'(t)^2 dt + O(T^{c-\frac{1}{2}+\varepsilon})\end{aligned}$$

となる. 最後の等式には漸近式

$$\frac{\chi'}{\chi}\left(\frac{1}{2}+it\right) = -\log\frac{t}{2\pi} + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

を用いた. Milinovich 氏の証明では上の積分が

$$\frac{1}{2\pi}\int_1^T \log\frac{t}{2\pi}\left|\zeta'\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt$$

に置き換わるのだが, それぞれの積分を計算する際に異なる結果を引用する. 筆者の証明の場合は Hall [4] による以下の結果を利用する.

定理 3. 各 $k = 0, 1, 2, \cdots,$ と充分大きい T に対して

$$\int_0^T Z^{(k)}(t)^2 dt = \frac{1}{4^k(2k+1)} T P_{2k+1}\left(\log\frac{T}{2\pi}\right) + O(T^{\frac{3}{4}}\log^{2k+\frac{1}{2}} T) \tag{2}$$

が成り立つ. ここで $P_{2k+1}(x)$ は

$$P_{2k+1}(x) = W_{2k+1}(x) + (4k+2)\sum_{h=0}^{2k}\binom{2k}{h}(-2)^h\gamma_h W_{2k-h}(x), \tag{3}$$

で与えられる次数 $2k+1$ のモニック多項式であり, γ_h は Stieltjes 定数で $W_g(v)$ は以下で与えられる.

$$W_g(v) = \frac{1}{e^v}\int_0^{e^v} \log^g u du.$$

一方で, Milinovich 氏が引用したのは以下の Ingham [7] の結果である.

定理 4. 各 $k = 0, 1, 2, \cdots,$ と充分大きい T に対して

$$\int_0^T \left|\zeta^{(k)}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt = \frac{1}{2k+1} T Q_{2k+1}\left(\log\frac{T}{2\pi}\right) + O(T^{\frac{1}{2}}\log^{2k+2} T) \tag{4}$$

が成り立つ. ここで $Q_{2k+1}(x)$ は

$$Q_{2k+1}(x) = W_{2k+1}(x) + (2k+1)\sum_{h=0}^{2k}(1+\delta_{h,2k})(-1)^h\gamma_h W_{2k-h}(x)$$

で与えられ, $\delta_{h,2k}$ は Kronecker の δ である.

誤差項に注目していただきたい. $Z^{(k)}(t)$ の二乗平均の場合は $O(T^{\frac{3}{4}}\log^{2k+\frac{1}{2}} T)$ であるのに対して, $\zeta^{(k)}(1/2+it)$ の二乗平均の場合は $O(T^{\frac{1}{2}}\log^{2k+2} T)$ となっているの

である. この事実が, Milinovich 氏の結果と筆者の結果における誤差項の違いの理由の一つである. では, $Z^{(k)}(t)$ の二乗平均における誤差項は改善できないのであろうか. これは Hall 自身も論文中で改善が望まれると書いているが, おそらく改善できるであろう. 彼は近似関数等式

$$e^{-i\theta(t)}(-1)^k Z^{(k)}(t) = F(t) + (-1)^k \chi\left(\frac{1}{2}+it\right) + E(t)$$

を考察することで上記の平均値を計算した. ここで,

$$F(t) = \sum_{n\le\sqrt{t/2\pi}} \frac{\log^k(\sqrt{t/2\pi}/n)}{n^{1/2+it}}$$

であって, $E(t) \ll t^{-\frac{1}{4}}\log^k t$ である. 平均値を計算するうえで誤差項として最大になる部分は, 積分

$$\int_{2\pi}^{T} |F(t)E(t)|dt$$

なのだが, 彼はこの部分の評価を Cauchy-Schwarz の不等式で済ませてしまっている. しかしながらこの部分はもう少し精密な計算が可能であろう. 事実 Ingham は Cauchy-Schwarz の不等式を用いた評価よりは精密な計算をして $O(T^{\frac{1}{2}}\log^{2k+2}T)$ という誤差項を得ている.

さて, 残るは積分

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c+i}^{c+iT} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) Z_1(s) Z_1(1-s) ds$$

の計算である. まず, $Z_1(s)$ は関数等式

$$Z_1(s) = -\chi(s) Z_1(1-s)$$

を満たす. この関数等式と $Z_1(s)$ の定義により

$$\begin{aligned} I_1 = &-\frac{1}{2\pi}\int_1^T \frac{\zeta'}{\zeta}(c+it)\zeta'(c+it)^2\chi(1-c-it)dt \\ &+\frac{1}{2\pi}\int_1^T \omega(c+it)\zeta'(c+it)^2\chi(1-c-it)dt \\ &-\frac{1}{8\pi}\int_1^T \omega(c+it)^2\zeta(c+it)\zeta'(c+it)\chi(1-c-it)dt \end{aligned}$$

を得る. 次に Gonek [2] によって証明された補題を用いるので, 以下に紹介しておく.

補題 1. $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を任意の $\varepsilon > 0$ に対して $b_n \ll n^{\varepsilon}$ を満たす複素数列とする. さらに $a > 1$ かつ m を非負整数とすると, 充分大きい T に対して,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_1^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-a-it}\right)\chi(1-a-it)\left(\log\frac{t}{2\pi}\right)^m dt \\ &= \sum_{1\le n\le T/2\pi} b_n(\log n)^m + O(T^{a-\frac{1}{2}}(\log T)^m).\end{aligned}$$

が成り立つ.

いま, $c > 1$ だから, 被積分関数における $\zeta(s)$ などは Dirichlet 級数表示が可能であって, その係数は上述の補題の仮定を満たす. 従って第一項の積分には補題を適用できることが分かる. 第二, 第三項の積分には $\omega(c+it)$ という項が現れるが, これについては

$$\omega(c+it) = \frac{\chi'}{\chi}(c+it) = -\log\frac{t}{2\pi} + O\left(\frac{1}{t}\right)$$

が成り立つので, 第二, 第三項の積分に対しては補題における $m = 1, 2$ の場合が適用できる. 誤差 $O(1/t)$ による影響も, 補題を適用した後の誤差項 $O(T^{c-\frac{1}{2}})$ に吸収されることも簡単にわかる. どの項の積分も同様の計算を行うだけなので, 第一項の積分の計算のみ注目する. 補題により

$$\begin{aligned}I_I &= \frac{1}{2\pi}\int_1^T \left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Lambda(m)}{m^{c+it}}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D(n)}{n^{c+it}}\right)\chi(1-c-it)dt \\ &= \sum_{1\le mn\le \frac{T}{2\pi}} \Lambda(m)D(n) + O(T^{c-\frac{1}{2}}),\end{aligned}$$

となる. ここで

$$D(n) = \sum_{d|n}\log d\log\frac{n}{d}$$

である. 次に Perron の公式によって

$$\begin{aligned}\sum_{mn\le x}\Lambda(m)D(n) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iT}^{a+iT}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\zeta'(s)^2\frac{x^s}{s}ds+R\\ &= -\operatorname*{Res}_{s=1}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\zeta'(s)^2\frac{x^s}{s}-\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\zeta'(s)^2\frac{x^s}{s}ds\\ &\quad+\frac{1}{2\pi i}\int_{a+iT}^{b+iT}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\zeta'(s)^2\frac{x^s}{s}ds\\ &\quad+\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{a-iT}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\zeta'(s)^2\frac{x^s}{s}ds+R\\ &= -\operatorname*{Res}_{s=1}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\zeta'(s)^2\frac{x^s}{s}+O(x^bT^\varepsilon+x^aT^{-1+\varepsilon})+R\end{aligned}$$

を得る. ここで R は Perron の公式に現れる誤差項であって,

$$R\ll\frac{x^\varepsilon}{T}\log x+\frac{x^b}{T}+x^\varepsilon$$

である (例えば [13] を見よ). b は, 筆者の場合は $b=5/8$ としたのだが, Milinovich 氏の場合は $b=1/2+(\log x)^{-1}$ としている. 筆者の結果を得るには特に影響は無いが, 最終的な誤差を $O(T^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ とするためには後者のように取らねばならない. a の場合, 筆者の場合は $a=9/8$ とし, Milinovich 氏の場合は $a=1+1/\log x$ としているが, こちらはどちらでも結果に特には影響しない. あとはこの留数を計算し, $x=T/2\pi$ とすれば求めたい漸近式を得る.

Milinovich 氏の証明との違いは, 上述の Perron の公式における a と b の取り方と, 筆者が $Z_1(s)$ の関数等式を使って I_1 を変形した部分である. $\zeta'(s)$ については $Z_1(s)$ のような関数等式は知られていない. そこで Milinovich 氏は, $\sigma\ge 1/2$ と $t\ge 1$ に対して

$$\begin{aligned}\zeta'(1-s) &= \chi'(1-s)\zeta(s)-\chi(1-s)\zeta'(s)\\ &= -\chi(1-s)\left(\zeta(s)\log\frac{t}{2\pi}+\zeta'(s)\right)+O(t^{\sigma-\frac{3}{2}+\varepsilon})\end{aligned}$$

が成り立つという事実を用いている. 完全な形の関数等式でなく, 誤差があるが, 実はこれによって最終的に現れる誤差項は $O(T^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ となり, 結果に影響がないのである.

3　まとめ

結局, Milinovich 氏の証明との違いで今回結果に影響のあった部分は, $Z'(t)$ の連続的二乗平均の結果を適用するか, $\zeta'(1/2+it)$ の連続的二乗平均の結果を適用するかと

いう部分と, Perron の公式を利用した時の b の取り方である. まず後者については, 求めたい結果に合わせて b という値の取り方を変えるだけなので, さほど大きな問題ではない. 問題は前者だが, こちらも結局影響は無いことが証明できるであろう, ということとその理由についてはすでに述べた通りである.

参考文献

[1] J. B. Conrey and N. C. Snaith, 'Applications of the L-functions ratios conjectures', *Proc. London Math. Soc.* (3) **94**, No. 3, (2007), 594–646.

[2] S. M. Gonek, 'Mean values of the Riemann zeta-function and its derivatives', *Invent. Math.* **75** (1984), 123–141.

[3] S. M. Gonek, 'On the negative moments of the Riemann zeta-function', *Mathematika* **36** (1989) 71–88.

[4] R. R. Hall, 'The behaviour of the Riemann zeta-function on the critical line', *Mathematika* **46** (1999), 281–313.

[5] D. Hejhal, 'On the distribution of $\log|\zeta'(\frac{1}{2}+it)|$', *Number Theory, trace formula and discrete groups* (ed. K. E. Aubert, E. Bombieri and D. Goldfeld, Academic Press, San Diego, 1989), 343–370.

[6] C. P. Hughes, J. P. Keating and N. O'Connell, 'Random matrix theory and the derivative of the Riemann zeta-function', *Proc. Roy. Soc. London Ser. A, Math. Phys. Eng. Sci.* **456** (2000), 2611–2627.

[7] A. E. Ingham, 'Mean-value theorems in the theory of the Riemann zeta-function', *Porc. London Math. Soc.* (2) **27** (1928), 273-300.

[8] S. Kirila, 'An upper bound for discrete moments of the derivative of the Riemann zeta-function', arXiv:1804.08826.

[9] H. Kobayashi, 'On the discrete mean of the Hardy's Z-function', arXiv:1811.04530.

[10] M. B. Milinovich, 'Mean-Value Estimates for the Derivative of the Riemann Zeta-Function', PhD Thesis, University of Rochester, Rochester, NY USA, 2008.

[11] M. B. Milinovich, 'Upper bounds for moments of $\zeta'(\rho)$', *Bull. London Math. Soc.* **42** (2010), 28–44.

[12] M. B. Milinovich and N. Ng, 'Lower bounds for moments of $\zeta'(\rho)$', *Int. Math.*

Res. Not. **12** (2014), 3190–3216.

[13] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, 'Multiplicative Number Theory: I. Classical Theory', Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 97 (Cambridge University Press, Cambridge, 2006).

[14] N. Ng, 'The fourth moment of $\zeta'(\rho)$', *Duke Math. J* **125** (2004), No. 2 243–266.