多重ゼータ値と log-sine 積分について

名古屋大学大学院　多元数理科学研究科　梅澤　瞭太
Ryota Umezawa
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

概要

本稿では反復 log-sine 積分を導入しその基本的な性質を述べた後, 反復 log-sine 積分を使って多重ゼータ値の間の関係式を得る方法を紹介する.

1　導入

(Euler-Zagier 型) 多重ゼータ値は $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ $(k_n > 1)$ に対し,

$$\zeta(\mathbf{k}) = \sum_{m_1 < \cdots < m_n} \frac{1}{m_1^{k_1} \ldots m_n^{k_n}}$$

で定義される値である. 多重ゼータ値は様々な分野との関わりが知られており, 特に多重ゼータ値の間の関係式について盛んに研究が行われている. 一方で, (Generalized) log-sine 積分は $k \in \mathbb{N}$ と $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し,

$$\mathrm{Ls}_k^{(l)}(\sigma) = -\int_0^\sigma \theta^l \log^{k-1-l} \left| 2 \sin \frac{\theta}{2} \right| d\theta$$

で定義される値である. log-sine 積分もまた他分野との関わりが知られており, 研究がなされている. log-sine 積分とゼータ関数の間には様々な関係が知られている. log-sine 積分とリーマンゼータ値 ($n = 1$ の多重ゼータ値) の関係についての研究は例えば [3] や [4], [7] などがあり, log-sine 積分と多重ゼータ値の関係についての研究は例えば [1], [2] などがある. また, [5] では多重 sine 関数の対数を含む積分と Mordell-Tornheim 型多重ゼータ値の関係が研究されている.

本稿の研究は log-sine 積分を使って (Euler-Zagier 型) 多重ゼータ値の間の関係式を証明できないかと思い, 始めた研究である. 筆者がこの研究を行ったとき, (Generalized) log-sine 積分を反復積分した次の積分が必要となった.

定義 1 (反復 log-sine 積分)**.** $A(\theta) = \log|2\sin(\theta/2)|$ とする. $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$, $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に対し,

$$\mathrm{Ls}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{l}}(\sigma) = (-1)^n \int_{0 < \theta_1 < \cdots < \theta_n < \sigma} \prod_{u=1}^{n} \theta_u^{l_u} A^{k_u - 1 - l_u}(\theta_u)\, d\theta_u.$$

筆者が調べた限りではこの積分を考察している論文はないようである. そこで, 本稿では後に必要となる反復 log-sine 積分についての性質を述べた後, 実際に反復 log-sine 積分を使って多重ゼータ値の間の関係式を得る方法を紹介する. また, この方法で得られる多重ゼータ値の間の関係式の個数を計算機を使って計算した結果も紹介する.

2 反復 log-sine 積分について

この章では反復 log-sine 積分の基本的となる二つの性質を紹介する. 一つ目の基本的な性質は多重ゼータ値のシャッフル積のように積分領域を分割することで得られる.

命題 1. S_n を n 次対称群とする. $\tau \in S_{n+n'}$ と $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$, $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_n)$, $\mathbf{k}' = (k_{n+1}, \ldots, k_{n+n'})$, $\mathbf{l}' = (l_{n+1}, \ldots, l_{n+n'})$ に対し,

$$\begin{aligned}\tau(\mathbf{k}, \mathbf{k}') &= \tau(k_1, \ldots, k_{n+n'}) = (k_{\tau(1)}, \ldots, k_{\tau(n+n')}),\\ \tau(\mathbf{l}, \mathbf{l}') &= \tau(l_1, \ldots, l_{n+n'}) = (l_{\tau(1)}, \ldots, l_{\tau(n+n')})\end{aligned}$$

と定義する. また,

$$S_{n,n'} = \{\tau \in S_{n+n'} \mid \tau^{-1}(1) < \cdots < \tau^{-1}(n) \ and \ \tau^{-1}(n+1) < \cdots < \tau^{-1}(n+n')\}$$

とする. このとき

$$\mathrm{Ls}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{l}}(\sigma) \cdot \mathrm{Ls}_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{l}'}(\sigma) = \sum_{\tau \in S_{n,n'}} \mathrm{Ls}_{\tau(\mathbf{k},\mathbf{k}')}^{\tau(\mathbf{l},\mathbf{l}')}(\sigma) \tag{1}$$

が成り立つ. 特に, 二つの反復 log-sine 積分の積は反復 log-sine 積分の $\mathbb{Q}$ 線形結合で表される. また, この積は結合律と交換律を満たす.

例 1. $\mathrm{Ls}_{1,3}^{(0,1)}(\sigma) \cdot \mathrm{Ls}_{2}^{(1)}(\sigma)$ を計算すると次のようになる.

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ls}_{1,3}^{(0,1)}(\sigma) \cdot \mathrm{Ls}_{2}^{(1)}(\sigma)\\ &= -\int_{\substack{0<\theta_{1,1}<\theta_{1,2}<\sigma\\ 0<\theta_{2,1}<\sigma}} \theta_{1,2} A(\theta_{1,2}) \theta_{2,1} \, d\theta_{1,1} d\theta_{1,2} d\theta_{2,1}\\ &= -\left(\int_{0<\theta_{2,1}<\theta_{1,1}<\theta_{1,2}<\sigma} + \int_{0<\theta_{1,1}<\theta_{2,1}<\theta_{1,2}<\sigma} + \int_{0<\theta_{1,1}<\theta_{1,2}<\theta_{2,1}<\sigma}\right)\\ &\quad \theta_{1,2} A(\theta_{1,2}) \theta_{2,1} \, d\theta_{1,1} d\theta_{1,2} d\theta_{2,1}\\ &= \mathrm{Ls}_{2,1,3}^{(1,0,1)}(\sigma) + \mathrm{Ls}_{1,2,3}^{(0,1,1)}(\sigma) + \mathrm{Ls}_{1,3,2}^{(0,1,1)}(\sigma).\end{aligned}$$

二つ目の基本的な性質は $k_j - 1 - l_j = 0$ の場合に θ_j での積分を先に計算することで得られる.

命題 2. $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$ に対し,

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_{k,j+} &= (k_1, \ldots, k_{j-1}, k_{j+1} + k, k_{j+2}, \ldots, k_n) && (j \in \{1, \ldots, n-1\}),\\ \mathbf{k}_{k,j-} &= (k_1, \ldots, k_{j-2}, k_{j-1} + k, k_{j+1}, \ldots, k_n) && (j \in \{2, \ldots, n\})\end{aligned}$$

とする. $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ と $j \in \{1, \ldots, n\}$ に対し, $k_j - 1 - l_j = 0$ ならば,

$$\mathrm{Ls}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{l}}(\sigma) = \begin{cases} -\frac{1}{k_1}\sigma^{k_1} & \text{if } n = 1, j = 1,\\ -\frac{1}{k_1}\mathrm{Ls}_{\mathbf{k}_{k_1,1+}}^{\mathbf{l}_{k_1,1+}}(\sigma) & \text{if } n \geq 2, j = 1,\\ \frac{1}{k_j}\left(\mathrm{Ls}_{\mathbf{k}_{k_j,j-}}^{\mathbf{l}_{k_j,j-}}(\sigma) - \mathrm{Ls}_{\mathbf{k}_{k_j,j+}}^{\mathbf{l}_{k_j,j+}}(\sigma)\right) & \text{if } n \geq 2, 1 < j < n,\\ \frac{1}{k_n}\left(\mathrm{Ls}_{\mathbf{k}_{k_n,n-}}^{\mathbf{l}_{k_n,n-}}(\sigma) - \sigma^{k_n}\mathrm{Ls}_{\mathbf{k}_{0,n-}}^{\mathbf{l}_{0,n-}}(\sigma)\right) & \text{if } n \geq 2, j = n \end{cases} \tag{2}$$

が成り立つ.

注意 1. $\{j \mid k_j - 1 - l_j = 0, 1 \le j \le n\}$ に二つ以上の異なる j が存在する場合それぞれの j に対して (2) を適用することができる．$j_1, \ldots, j_m$ $(j_1 < \cdots < j_m)$ が $\{j \mid k_j - 1 - l_j = 0, 1 \le j \le n\}$ のすべての元であるとする．j_a $(1 \le a \le m)$ に対して (2) を適用すると, 右辺の反復 log-sine 積分の添え字は深さが $n-1$ となり, $j_1, \ldots, j_{a-1}, j_{a+1} - 1, \ldots, j_m - 1$ が $\{j \mid k_j - 1 - l_j = 0, 1 \le j \le n-1\}$ のすべての元となる．したがって, (2) を繰り返し適用することで, $k_j - 1 - l_j \ge 0$ $(1 \le j \le n)$ を満たす $\mathrm{Ls}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{l}}(\sigma)$ は σ^m $(m \ge 0)$ と $k_j - 1 - l_j > 0$ $(1 \le j \le n)$ を満たす反復 log-sine 積分の積の $\mathbb{Q}$ 線形結合であらわされる. また, この表示は (2) の適用の順序によらない.

例 2. $\mathrm{Ls}_{1,3}^{(0,1)}(\sigma)$ は $k_1 - 1 - l_1 = 0$ であるから次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ls}_{1,3}^{(0,1)}(\sigma) &= \int_{0<\theta_1<\theta_2<\sigma} \theta_2 A(\theta_2)\, d\theta_1 d\theta_2 \\
&= \int_{0<\theta_2<\sigma} \theta_2^2 A(\theta_2)\, d\theta_1 d\theta_2 \\
&= -\mathrm{Ls}_4^{(2)}(\sigma).
\end{aligned}$$

$\mathrm{Ls}_{2,1,3}^{(1,0,1)}(\sigma)$ は $k_1 - 1 - l_1 = 0$ かつ $k_2 - 1 - l_2 = 0$ である．θ_1 での積分を計算した後, θ_2 での積分を計算すると,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ls}_{2,1,3}^{(1,0,1)}(\sigma) &= \int_{0<\theta_1<\theta_2<\theta_3<\sigma} \theta_1 \theta_3 A(\theta_3)\, d\theta_1 d\theta_2 \theta_3 \\
&= \frac{1}{2} \int_{0<\theta_2<\theta_3<\sigma} \theta_2^2 \theta_3 A(\theta_3)\, \theta_2 \theta_3 \\
&= \frac{1}{6} \int_{0<\theta_3<\sigma} \theta_3^4 A(\theta_3)\, \theta_2 \theta_3 \\
&= \frac{1}{6} \mathrm{Ls}_6^{(4)}(\sigma)
\end{aligned}$$

となる. また, θ_2 での積分を計算した後, θ_1 での積分を計算しても同様の結果が得られる.

次の定理は命題 1 と命題 2 を組み合わせることで得られる.

定理 1. $k_j - 1 - l_j \ge 0$ $(1 \le j \le n)$ を満たす反復 log-sine 積分の σ での値の積は σ^m $(m \ge 0)$ と $k_j - 1 - l_j > 0$ $(1 \le j \le n)$ を満たす反復 log-sine 積分の σ での値の積の $\mathbb{Q}$ 線形結合で表される．また, この表示は (1) と (2) の適用の順序によらない.

例 3. 例えば $\mathrm{Ls}_{1,3}^{(0,1)}(\sigma) \cdot \mathrm{Ls}_2^{(1)}(\sigma)$ に (1) を適用すると

$$\mathrm{Ls}_{1,3}^{(0,1)}(\sigma) \cdot \mathrm{Ls}_2^{(1)}(\sigma) = \mathrm{Ls}_{2,1,3}^{(1,0,1)}(\sigma) + \mathrm{Ls}_{1,2,3}^{(0,1,1)}(\sigma) + \mathrm{Ls}_{1,3,2}^{(0,1,1)}(\sigma)$$

となる．この右辺のそれぞれの項に (2) を適用すると

$$\mathrm{Ls}_{2,1,3}^{(1,0,1)}(\sigma) = \frac{1}{6}\mathrm{Ls}_6^{(4)}(\sigma), \quad \mathrm{Ls}_{1,2,3}^{(0,1,1)}(\sigma) = \frac{1}{3}\mathrm{Ls}_6^{(4)}(\sigma), \quad \mathrm{Ls}_{1,3,2}^{(0,1,1)}(\sigma) = -\frac{1}{2}\mathrm{Ls}_6^{(4)}(\sigma) + \frac{\sigma^2}{2}\mathrm{Ls}_4^{(2)}(\sigma).$$

となるので

$$\mathrm{Ls}_{1,3}^{(0,1)}(\sigma) \cdot \mathrm{Ls}_2^{(1)}(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2}\mathrm{Ls}_4^{(2)}(\sigma)$$

が得られる．一方で $\mathrm{Ls}_{1,3}^{(0,1)}(\sigma)$ と $\mathrm{Ls}_2^{(1)}(\sigma)$ に対して (2) を先に適用すると

$$\mathrm{Ls}_{1,3}^{(0,1)}(\sigma) \cdot \mathrm{Ls}_2^{(1)}(\sigma) = -\mathrm{Ls}_4^{(2)}(\sigma) \cdot -\frac{\sigma^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2}\mathrm{Ls}_4^{(2)}(\sigma)$$

となり, (1) と (2) の適用の順番によらずに同様の表示を得る.

3　反復 log-sine 積分と多重ゼータ値の関係について

3.1　多重ゼータ値の間の関係式を得る方法

$\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ $(k_n > 1)$ を

$$\mathbf{k} = (\{1\}^{a_1-1}, b_1+1, \{1\}^{a_2-1}, b_2+1, \ldots, \{1\}^{a_h-1}, b_h+1)$$

の形で書いたとき, 双対インデックス $\mathbf{k}^*$ を

$$\mathbf{k}^* = (\{1\}^{b_h-1}, a_h+1, \ldots, \{1\}^{b_2-1}, a_2+1, \{1\}^{b_1-1}, a_1+1)$$

で定義する. また, $\mathbf{k}^{(0)} = \mathbf{k}$,

$$\mathbf{k}^{(1)} = \begin{cases} (k_1, \ldots, k_{n-1}, k_n - 1) & \text{if } k_n > 1, \\ (k_1, \ldots, k_{n-1}) & \text{if } k_n = 1, \\ \phi & \text{if } n = 1, k_n = 1 \end{cases}$$

と定義し, $n > 1$ に対しては帰納的に $\mathbf{k}^{(n)} = (\mathbf{k}^{(n-1)})^{(1)}$ と定義する. また, 多重ポリログ $\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z)$ を

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z) = \sum_{0<m_1<\cdots<m_n} \frac{z^{m_n}}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}} \qquad (|z| < 1)$$

で定義する. 多重ポリログは $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ 上の正則関数に解析接続できることが知られている. このとき, 次の多重ゼータ値と多重ポリログの関係が成り立つ.

定理 2 (Borwein, Broadhurst and Kamnitzer [2, theorem 4.4])**.** $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ $(k_n > 1)$ に対し,

$$\zeta(\mathbf{k}) = \sum_{m=0}^{|\mathbf{k}|} \mathrm{Li}_{\mathbf{k}^{(m)}}(e^{\frac{\pi}{3}i}) \overline{\mathrm{Li}_{(\mathbf{k}^*)^{(|\mathbf{k}|-m)}}(e^{\frac{\pi}{3}i})} \tag{3}$$

が成り立つ. ここで, $|\mathbf{k}|$ は $\mathbf{k}$ の重さ $(|\mathbf{k}| = k_1 + \cdots + k_n)$ である. また, $\mathrm{Li}_\phi(z) = 1$ とする.

また, 多重ポリログの反復積分表示を変数変換することで, 次の多重ポリログと反復 log-sine 積分の間の関係を示すことができる.

定理 3. $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ と $0 < \sigma < \pi$ に対し,

$$\begin{aligned} &\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(1 - e^{\pm i\sigma}) \\ &= (\mp i)^n \int_{0<\theta_1<\cdots<\theta_n<\theta_{n+1}=\sigma} \prod_{u=1}^{n} \frac{\left(A(\theta_{u+1}) - A(\theta_u) \pm \frac{i\theta_{u+1}}{2} \mp \frac{i\theta_u}{2}\right)^{k_u-1}}{(k_u-1)!} \, d\theta_u. \end{aligned}$$

この定理により $\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(1 - e^{\pm i\sigma})$ は反復 log-sine 積分の $\mathbb{Q}(i)$ 線形結合で表される. 特に, $e^{\pi i/3} = 1 - e^{-\pi i/3}$ であるから $\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(e^{\pi i/3})$ は反復 log-sine 積分の $\pi/3$ での値での $\mathbb{Q}(i)$ 線形結合で表される.

(3) の右辺に対し定理 3 を適用し, その後定理 1 を適用することで多重ゼータ値が π^m $(m \geq 0)$ と $k_j - 1 - l_j > 0$ $(1 \leq j \leq n)$ を満たす反復 log-sine 積分の $\pi/3$ での値の積の $\mathbb{Q}(i)$ 線形結合で表されることがわかる. 多重ゼータ値は実数であるから, この表示の実部を取ることで多重ゼータ値の反復 log-sine 積分表示が得られ, 虚部を取ることで反復 log-sine 積分の間の関係式が得られる. したがって, この多重ゼータ値の反復 log-sine 積分表示に対して, 虚部を取ることで得られた反復 log-sine 積分の間の関係式を使うことで多重ゼータ値の間の関係式を得ることができる.

3.2　具体例

3.2.1　重さ 2

$\zeta(2)$ に対し定理 2, 定理 3, 定理 1 を適用すると,

$$
\begin{aligned}
\zeta(2) &= \mathrm{Li}_2(e^{\frac{\pi}{3}i}) + \mathrm{Li}_1(e^{\frac{\pi}{3}i})\overline{\mathrm{Li}_1(e^{\frac{\pi}{3}i})} + \overline{\mathrm{Li}_2(e^{\frac{\pi}{3}i})} \\
&= i\int_{0<\theta_1<\frac{\pi}{3}} \left(-A(\theta_1) - \frac{i\pi}{6} + \frac{i\theta_1}{2}\right) d\theta_1 + \int_{0<\theta_1<\frac{\pi}{3}} d\theta_1 \cdot \int_{0<\theta_1<\frac{\pi}{3}} d\theta_1 \\
&\quad - i\int_{0<\theta_1<\frac{\pi}{3}} \left(-A(\theta_1) + \frac{i\pi}{6} - \frac{i\theta_1}{2}\right) d\theta_1 \\
&= \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}
$$

を得る.

3.2.2　重さ 3

$\zeta(3)$ と $\zeta(1,2)$ を計算すると

$$
\begin{aligned}
\zeta(3) &= \frac{\pi}{2}\mathrm{Ls}_2^{(0)}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{3}{2}\mathrm{Ls}_3^{(1)}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{i}{2}\mathrm{Ls}_3^{(0)}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{7i}{216}\pi^3 \\
\zeta(1,2) &= \frac{\pi}{2}\mathrm{Ls}_2^{(0)}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{3}{2}\mathrm{Ls}_3^{(1)}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{i}{2}\mathrm{Ls}_3^{(0)}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{7i}{216}\pi^3
\end{aligned} \tag{4}
$$

を得る. したがってこの式の実部より

$$
\zeta(3) = \zeta(1,2) = \frac{1}{2}\pi\mathrm{Ls}_2^{(0)}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{3}{2}\mathrm{Ls}_3^{(1)}\left(\frac{\pi}{3}\right)
$$

が得られる.

3.2.3　重さ 4

すべての重さ 4 の多重ゼータ値を計算し, その実部を取ると,

$$
\begin{aligned}
\zeta(4) &= -\frac{23}{5184}\pi^4 - \frac{1}{4}\pi\mathrm{Ls}_3^{(0)}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{4}\mathrm{Ls}_4^{(1)}\left(\frac{\pi}{3}\right), \\
\zeta(1,1,2) &= -\frac{23}{5184}\pi^4 - \frac{1}{4}\pi\mathrm{Ls}_3^{(0)}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{4}\mathrm{Ls}_4^{(1)}\left(\frac{\pi}{3}\right), \\
\zeta(1,3) &= \frac{7}{1296}\pi^4 + \mathrm{Ls}_4^{(1)}\left(\frac{\pi}{3}\right), \\
\zeta(2,2) &= \frac{1}{324}\pi^4 - 2\mathrm{Ls}_4^{(1)}\left(\frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned} \tag{5}
$$

が得られる. ここで (4) の虚部を取ると

$$
\mathrm{Ls}_3^{(0)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{7}{108}\pi^3 \tag{6}
$$

が得らえる. また, $\zeta(1,4)$ を計算すると

$$
\begin{aligned}
\zeta(1,4) = &-\frac{17}{25920}i\,\pi^5 + \frac{1}{8}\,\pi^2\mathrm{Ls}_3^{(1)}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\,\pi\mathrm{Ls}_4^{(2)}\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&-\frac{1}{4}i\,\pi\mathrm{Ls}_4^{(1)}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{3}{8}\,\mathrm{Ls}_5^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{6}\,\mathrm{Ls}_5^{(1)}\left(\frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}
$$

となるのでこの虚部から

$$\mathrm{Ls}_4^{(1)}\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{17}{6480}\pi^4 \tag{7}$$

が得られる. (6) と (7) は [6] や [4] でも証明されている結果である. よって, (6), (7) を (5) に適用することで,

$$\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90},\quad \zeta(1,1,2)=\frac{\pi^4}{90},\quad \zeta(1,3)=\frac{\pi^4}{360},\quad \zeta(2,2)=\frac{\pi^4}{120}$$

となるので, 多重ゼータ値の関係式

$$3\zeta(4)=3\zeta(1,1,2)=12\zeta(1,3)=4\zeta(2,2)$$

が得られる.

3.2.4　重さ 5

すべての重さ 5 の多重ゼータ値を計算し, さらに重さ 6 の計算から得られた反復 log-sine 積分の間の関係式を使うことで, 次を示すことができる.

$$\begin{aligned}
\zeta(5)=\zeta(1,1,1,2)&=-\frac{1}{12}\mathrm{Ls}_5^{(1)}\left(\frac{\pi}{3}\right)+\frac{3}{16}\mathrm{Ls}_5^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right)\\
&\quad-\frac{1}{4}\pi\mathrm{Ls}_4^{(2)}\left(\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{16}\pi^2\mathrm{Ls}_3^{(1)}\left(\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{24}\pi^3\mathrm{Ls}_2^{(0)}\left(\frac{\pi}{3}\right),\\
\zeta(1,4)=\zeta(1,1,3)&=-\frac{1}{6}\mathrm{Ls}_5^{(1)}\left(\frac{\pi}{3}\right)+\frac{3}{8}\mathrm{Ls}_5^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right)\\
&\quad-\frac{1}{2}\pi\mathrm{Ls}_4^{(2)}\left(\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{8}\pi^2\mathrm{Ls}_3^{(1)}\left(\frac{\pi}{3}\right),\\
\zeta(2,3)=\zeta(1,2,2)&=\frac{11}{24}\mathrm{Ls}_5^{(1)}\left(\frac{\pi}{3}\right)-\frac{33}{32}\mathrm{Ls}_5^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right)\\
&\quad+\frac{11}{8}\pi\mathrm{Ls}_4^{(2)}\left(\frac{\pi}{3}\right)-\frac{13}{32}\pi^2\mathrm{Ls}_3^{(1)}\left(\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{48}\pi^3\mathrm{Ls}_2^{(0)}\left(\frac{\pi}{3}\right),\\
\zeta(3,2)=\zeta(2,1,2)&=-\frac{3}{8}\mathrm{Ls}_5^{(1)}\left(\frac{\pi}{3}\right)+\frac{27}{32}\mathrm{Ls}_5^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right)\\
&\quad-\frac{9}{8}\pi\mathrm{Ls}_4^{(2)}\left(\frac{\pi}{3}\right)+\frac{7}{32}\pi^2\mathrm{Ls}_3^{(1)}\left(\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{48}\pi^2\mathrm{Ls}_2^{(0)}\left(\frac{\pi}{3}\right).
\end{aligned}$$

したがって, 係数を比較することで多重ゼータ値の間の関係式

$$5\zeta(5)=4\zeta(2,3)+6\zeta(3,2),\ 5\zeta(1,4)=\zeta(3,2)-\zeta(2,3)$$

が得られる.

3.3　得られる関係式の個数について

本稿で紹介した方法により, どのくらいの数の独立な多重ゼータ値の間の関係式が得られるかを紹介する. まずは比較のために数列 d_k を導入する. ここで, d_k は $d_0=1, d_1=0, d_2=1,\ d_k=d_{k-2}+d_{k-3}$ $(k\geq 3)$ で定まる数列である. $\mathcal{Z}_k$ を重さ k のすべての多重ゼータ値が生成する $\mathbb{Q}$ 線形空間としたとき, $\mathcal{Z}_k$ の次元は d_k であろうと Zagier により予想されている. また, $\dim\mathcal{Z}_k\leq d_k$ であることが, 寺杣, Goncharov らによって証明されている. そこで, l_k を本稿の手法のみで得られる $\mathcal{Z}_k$ の次元の上からの評価とする. つまり, 重さ k の多重ゼータ値の個数 (2^{k-2}) から本稿の手法のみで得られる独立な多重ゼータ値の間の関係式の個数を引いたものが l_k である. l_k を筆者のプログラムで計算すると次のようになる.

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
d_k	1	1	1	2	2	3	4	5	7	$\cdots$
l_k	1	1	1	2	2	4	4	9	9	$\cdots$
2^{k-2}	1	2	4	8	16	32	64	128	256	$\cdots$

この表によると $k=6$ までは d_k と l_k が一致しているが, $k=7$ のとき d_k と l_k は一致しない. $d_7=3$, $l_7=4$ であるから Zagier 予想と比較すると, 重さ 7 の多重ゼータ値において, 本稿の手法だけでは得られない関係式が一つだけあることになる. したがって, この表からすべての多重ゼータ値の間の関係式を得ることはできないことがわかるが, 一方で重さ k の多重ゼータ値の個数 (2^{k-2}) と比べると多くの関係式が得られていることもわかる. ただし, 筆者のプログラムでは重さ k の多重ゼータ値の間の関係式を得るために, 重さ $k+1$ までの計算から得られる反復 log-sine 積分の間の関係式しか使っていない. したがって, 十分大きい重さの計算から得られる反復 log-sine 積分の間の関係式を使えば, 重さ 7 の最後の一つの多重ゼータ値の間の関係式が得られる可能性があることに注意する. しかし, 重さ $9, 10, 11$ の計算から得られた反復 log-sine 積分の間の関係式を使っても, 重さ 7 の最後の一つの多重ゼータ値の間の関係式を得ることはできないことは筆者のプログラムにより確かめられている.

4　今後の展望について

多重ゼータ値の間には非常に多くの関係式族が知られているので, 本稿の手法はどのような関係式族を含み, どのような関係式族に含まれるのかということは自然な問題である. 筆者が今のところ証明できていることは, 本稿の手法だけから多重ゼータ値の双対性 ($\zeta(\mathbf{k})$ と $\zeta(\mathbf{k}^*)$ は同じ反復 log-sine 積分表示となること) と Euler の結果 ($\zeta(2k)=(-1)^{k+1}(2\pi)^{2k}B_{2k}/2(2k)!$) が得られるということだけである. 他にも本稿の手法だけから別証明できる多重ゼータ値の関係式族があることが期待されるが, 主に反復 log-sine 積分の計算が大変であるということが原因でこの問題は進展していない. また, 上で説明した通り, 本稿の手法だけではすべての多重ゼータ値の間の関係式は得られないと思われる. そこで, すべての多重ゼータ値の間の関係式が得られるように本稿の手法を拡張するにはどうすればよいのかということも問題となる. 原理的にはすべての反復 log-sine 積分の関係式が得られれば, すべての多重ゼータ値の間の関係式を得ることができるので, 本稿の手法からは得られない反復 log-sine 積分の間の関係式を見つけることが問題となる. 本稿の手法からは得られない関係式として筆者が確認できているものは次のものだけである.

$$\Re(\mathrm{Li}_{2k+1}(e^{\frac{\pi}{3}i}))=\frac{1}{2}(1-2^{-2k})(1-3^{-2k})\zeta(2k+1). \tag{8}$$

この関係式は [4] で証明されているものであるが, この両辺に定理 2, 定理 3, 定理 1 を適用することで, これは (反復)log-sine 積分の間の関係式であるとみなすことができる. この (反復)log-sine 積分の間の関係式は本稿の手法の重さ $2k+2$ の計算からは得られないことを $k=2,3,4$ の場合に筆者のプログラムで確かめられている. しかし, 本稿の手法にこの (反復)log-sine 積分の間の関係式を加えても l_k の値は変わらないことも $k=2,3,4$ の場合に筆者のプログラムで確かめられている.

参考文献

[1] J. M. Borwein, and A. Straub, *Special values of generalized log-sine integrals*, ISSAC2011, ACM, New York, (2011), 43–50.

[2] J. M. Borwein, D. J. Broadhurst and J. Kamnitzer, *Central binomial sums, multiple Clausen values, and zeta values*, Experiment. Math. **10** (2001), 25–34.

[3] J. Choi, Y. J. Cho, and H. M. Srivistava, *Log-Sine Integrals Involving Series Associated with the Zeta function and Polylogarithms.* Math. Scand., **105** (2009), 199–217. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **38** (2005), no. 1, 1–56.

[4] L. Lewin, *Polylogarithms and associated functions*, North Holland, 1981.

[5] K. Onodera, *Generalized log sine integrals and the Mordell-Tornheim zeta values*, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), 1463-1485.

[6] A. J. Van der Poorten, *Some wonderful formulas . . . an introduction to polylogarithms,* Queen's papers in Pure and Applied Mathematics, **54** (1979), 269–286.

[7] N.-Y. Zhang, and K.S. Williams, *Values of the Riemann Zeta function and integrals involving* $\log(2\sinh\frac{\theta}{2})$ *and* $\log(2\sin\frac{\theta}{2})$. Pacific J.Math. **168** (1995), 271–289.