Hochschild コホモロジーと支配的次元
Hochschild cohomology and dominant dimension

宮地兵衛 [*]
Hyohe MIYACHI
大阪市立大学・理学部・数学科
Department of Mathematics, Faculty of Science, Osaka City University

この講究録に収録してある研究成果は, 中国科学院の方明氏との共同研究である. 出版された論文 [FM19] について概説させていただいた. 主な結果は, 代数の加群圏が algebraic Lie theory によく登場する最高ウエイト圏と圏同値となる代数のクラスでは, 支配的次元は導来不変量になるということと, 実はこの量は Hochschild cohomology に内在していることを指摘できたことである. また参考文献については, [loc.cit.] に記してあるものを参考にされたし.

A, B と記したら, 十分大きな体 k 上の有限次元代数を意味することとする. $\mathrm{D} := \mathrm{Hom}_k(-, k)$ で k-双対を表す.

1 Hochschild cohomology and dominant dimension

まず, 表題の Hochschild cohomology 環 $\mathrm{HH}^*(A)$ を説明する.

次数付き環 $\mathrm{HH}^*(A)$ は, ${}_AA_A$ を $A \otimes_k A^\circ$-加群とみた Ext-代数である:

$$\mathrm{HH}^*(A) := \mathrm{Ext}^*_{A\otimes_k A^\circ}({}_AA_A, {}_AA_A) = \mathrm{Ext}^*_{A^{\mathrm{e}}}(A, A).$$

ここで A° は, A の反環である. 簡単のため $A \otimes_k A^\circ$ を A^{e} と記す. Happel, J. Rickard により Hochschild cohomology 環は導来不変環であることが知られている:

Theorem 1 (Happel, Rickard [Ric91])
三角圏として $D^b(A\text{-mod}) \cong D^b(B\text{-mod})$ のとき次数付き代数として $\mathrm{HH}^*(A) \cong \mathrm{HH}^*(B)$. とくに中心も同型となる: $Z(A) \cong Z(B)$. [1)]

つぎに A の dominant dimension dom.dim(A) を定義する.

f を A のべき等元とし Af が左 A-加群 A の直和因子で最大の射影的かつ入射的加群となるものとする. 本稿では f を A に付随するべき等元ということにする. f が存在すれば自動的に fAf は自己入射的代数となる.

---

*miyachi @ csi.osaka-cu.ac.jp 鑑識班を自然科学に変更してください。

1) 話が脱線し, かつ, 私見ではあるが, 商売上圏同値がありそうな対象を seek する際, 森田不変量, 導来不変量にまず着目するのは定番である.

Definition 2 (中山・立川)
左 A-加群 M の *dominant dimension* (支配的次元) $\mathrm{dom.dim}(M)$ とは, 次の値で与えられる:

$$\mathrm{dom.dim}({}_AM) = \sup\left\{ t \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; \begin{array}{l} M \text{ の } \textit{minimal injective resolution } 0 \to M \to I^0 \to I^1 \to \cdots \\ \text{の各項のうち } I^0, \ldots, I^{t-1} \text{は射影的である, i.e. } \mathrm{add}(\mathrm{D}fA) \text{ に属する.} \end{array} \right\}.$$

右加群に対しても同様に定義される．実は, $\mathrm{dom.dim}({}_AA)$ と $\mathrm{dom.dim}(A_A)$ 左右の区別がなくなる [2)] :

$$\mathrm{dom.dim}(A) = \mathrm{dom.dim}({}_AA) = \mathrm{dom.dim}(A_A).$$

dominant dimension の理論の発展は, 国内研究者の森田・立川らによるところが大きい.

以降 A, B は準遺伝的 (quasihereditary) とする．正確な定義は [Don98] の appendix を参照されたし．典型的な準遺伝的代数の例は, (量子)Schur 代数である．[loc. cit.] この準遺伝的という性質は, Cline,Parshall,Scott らにより着目され半単純 Lie 環の BGG 圏 $\mathcal{O}$ や代数群の有限次元表現圏の homology 代数的にも良い部分圏から抽出された．近年では, 1 のべき根における量子群の有限次元表現圏や affine Lie 環の Kazhdan-Lusztig 圏 $\mathcal{O}$, その同じ Lie 環に付随したさらに大きな放物的 $\mathcal{O}$ や rational Cherednik 代数の圏 $\mathcal{O}$, cyclotomic Schur 代数, quiver Schur 代数などが活発に研究されている．この設定では, A, B の大域次元は有限である．

A は, k-代数反自己同型 $\omega : A \to A$ を持つとする．左 A-加群 M に対して $\mathrm{D}M$ は通常右加群になるが, 群環のときと同様に

$$(a \cdot f)(m) := f(\omega(a) \cdot m) \text{ for } a \in A, f \in \mathrm{D}M, m \in M$$

により $\mathrm{D}M$ は左 A-加群となる．ω は, 次の 2 条件を満たすとき *duality* という: (i) $\omega^2 = 1$ かつ (ii) ω は A の原始的べき等元の代表を固定する．

Definition 3
A が class $\mathcal{A}$ に属するとは, 次の 3 条件を満たすときをいう:

(i) A は, 準遺伝的.

(ii) A は *duality* を持つ.

(iii) A は *gendo-symmetric*, i.e. ある対称多元環 C 上の加群 M が存在し A は自己準同型環 $\mathrm{End}_C(M)$ と同型となる.

このとき $\mathrm{dom.dim}(A) \geq 2$ となっている.

T を A の standard$A$-加群と costandard$A$-加群で filter される A-加群で, かつ T の非同型直既約直和因子の個数が A の非同型既約加群の同型類の個数と等しくなるものとする．Ringel により重複度を除いて一意に存在することが知られていて宮下 tilting というものになっている．[Don98] の tilting module の箇所を参照.

Proposition 4 (Fang-König [FK11])
A は class $\mathscr{A}$ に属する代数とする．T を先に述べた A に付随する宮下 tilting A-加群とする．このとき $\mathrm{dom.dim}A = 2 \cdot \mathrm{dom.dim}T$ *が成立する.*

[2)] べき等元 f を refine したものもあり, Af を入射的に最大に取っていないとき左右に違いがある.

f を A のべき等元とする. Schur 関手 $M \mapsto fM \cong \mathrm{Hom}_A(Af, M)$ の 両側版を考えると (A, A)-両側加群 M に対して fMf から誘導される自然な次数付き射を考えることができる:

$$\xi_f = \{\xi_f^i\}: \qquad \mathrm{HH}^*(A) \to \mathrm{HH}^*(fAf).$$

ξ_f^i が次数順に同型射なるものを考える:

$$\kappa_f := \sup\{s \mid \xi_f^0, \xi_f^1, \ldots, \xi_f^s \text{ は同型 }\}$$

とおく.

Theorem 5
$n \geq 2$ を自然数とし A は *gendo-symmetric* で *dominant dimension* は少なくとも n 以上とする. このとき, *Schur* 関手

$$(f \otimes f)A^{\mathrm{e}} \otimes_{A^{\mathrm{e}}} -: \quad A^{\mathrm{e}}\text{-mod} \longrightarrow (fAf)^{\mathrm{e}}\text{-mod}$$

は次の同型と 5 項完全列を誘導する :

$$\xi_f^i : \mathrm{HH}^i(A) \cong \mathrm{HH}^i(fAf) \text{ for } 0 \leq i \leq n-2$$

$$\mathrm{Ext}^i_{A^{\mathrm{e}}}(\mathrm{D}(A), A) \cong \mathrm{HH}^i(fAf) \text{ for } 0 \leq i \leq 2n-2$$

$$0 \to \mathrm{HH}^{n-1}(A) \xrightarrow{\xi_f^{n-1}} \mathrm{HH}^{n-1}(fAf) \to \mathrm{Hom}_{A^{\mathrm{e}}}(A, \mathrm{Ext}^{n-1}_{fAf}(fA, fA)) \to \mathrm{HH}^n(A) \xrightarrow{\xi_f^n} \mathrm{HH}^n(fAf)$$

とくに, $\kappa_f \geq n-2$.

これは Grothendieck のスペクトル系列を使う (割と) 標準的な議論による分かる. 詳細は論文のほうを参照されたし.

Remark 6
Hochschild cohomology に *dominant dimension* が見いだせる部分が面白いと思われる. *Hochschild cohomology* の研究から準遺伝的代数への応用の可能性も見える.

次は key となる命題であるが, 証明が長いので割愛する. 詳細は論文のほうを参照されたし.

Proposition 7
A は *class* $\mathscr{A}$ に属する代数とする. この時

$$\mathrm{Hom}_{A^{\mathrm{e}}}(A, \mathrm{Ext}^{n-1}_{fAf}(fA, fA)) \neq \{0\}$$

が成立する. ここで $n = \mathrm{dom.dim}A$.

Theorem 8
A は *class* $\mathscr{A}$ に属するとする. この時 $\kappa_f = \mathrm{dom.dim}A - 2$ *or* $\mathrm{dom.dim}A - 1$ が成立する.

Theorem 5 と Proposition 7 を使って ξ_f^i は $0 \leq i \leq \mathrm{dom.dim}A - 2$ では同型, ξ_f^{n-1}, ξ_f^n は同型とならないので定理が分かる.

Corollary 9
A は *class* $\mathscr{A}$ に属する *dominant dimension* が n の代数とする．
$\overline{\mathrm{HH}}^*(fAf) = \mathrm{HH}^*(fAf)/\mathcal{N}$ の勝手な斉次生成元は, 次数 0 を持つかあるいは少なくとも次数 $n-1$ を持つ．ここで $\mathcal{N}$ は $\mathrm{HH}^*(fAf)$ のべき零元全体の *ideal* を表す．$\kappa_f = n-2$ の時は, 勝手な斉次生成元の集合は次数 $n-1$ の生成元を持たなくてはならない．

講演で述べなかったこともあり, この系の簡単な説明を試みる．$\mathrm{HH}^*(A)$ と $\mathrm{HH}^*(fAf)$ は, 次数小さいほうから途中まで同型だった (Theorem 5). $\mathrm{HH}^*(A)$ は有限次元だったからその斉次元の次数が 0 でないときは, べき零で当然 $\mathrm{HH}^*(fAf)$ への像は $\mathcal{N}$ に入ってしまう．ということは, $\overline{\mathrm{HH}}^*(fAf)$ の正の次数の斉次生成元は同型で移ってこないところより高い次数を持つ筈だということである．

Theorem 10
A, B を *class* $\mathscr{A}$ に属する代数とする． 三角圏として $D^b(A\text{-mod}) \cong D^b(B\text{-mod})$ ならば, $\mathrm{dom.dim}A = \mathrm{dom.dim}B$.

f を A に付随するべき等元, f' を B に付随するべき等とすると仮定の三角圏同値は, $D^b(fAf\text{-mod}) \cong D^b(f'Bf'\text{-mod})$ に制限することが示せて, Theorem 1 と合わせて次の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{HH}^i(A) & \cong & \mathrm{HH}^i(B) \\ \downarrow \xi_f^i & & \downarrow \xi_{f'}^i \\ \mathrm{HH}^i(fAf) & \cong & \mathrm{HH}^i(f'Bf') \end{array}$$

Proposition 4 より $\mathrm{dom.dim}(A), \mathrm{dom.dim}(B)$ ともに偶数であることに注意し, Theorem 8 により起こりうる dom.dim に制限があるので, 上の図式の同型から $\mathrm{dom.dim}(A) = \mathrm{dom.dim}(B)$ であることが分かる．

Remark 11
(まとめ) 一般に *dominant dimension* は, 導来不変量ではないが *class* $\mathcal{A}$ では導来不変となることが分かった．また, *Hochschild cohologoy* の *Schur* 関手での振る舞いに *dominant dimension* が隠されていることも分かった．

2　収穫

$U_q(\mathfrak{gl}_n)$ を parameter が $q^{1/2}$ の Lusztig の divided power quantum general linear group とする．これは Hopf 代数であることが知られている．簡単のため係数体は, $k = \mathbb{C}$ とする．V を $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ の vector(natural) 表現とする． $S(n,r)$ を (量子)q-Schur 代数 $\mathrm{im}(\rho)$ とする． ここで ρ は, 余積から定まる代数準同型 $\rho : U_q(\mathfrak{gl}_n) \to \mathrm{End}_k(V^{\otimes r})$. 実は, Schur-Weyl 双対の q 類似が存在している: A 型岩堀 Hecke 環 $\mathcal{H}$ が存在して $S(n,r) \cong \mathrm{End}_{\mathcal{H}}(V^{\otimes r})$ となっている．[3] $S(n,r)$ は, 準遺伝的代数であることが知られている．

- $n \geq r$ のとき, $S(n,r)\text{-mod} \cong S(n,n)\text{-mod}$.
- $n < r$ のとき, $S(n,r)$-mod は $S(r,r)$-mod の商圏.

これらの理由により多くの人々が前 n と後ろ r が揃っている $S(r,r)$ を研究している．
本稿でも $S(r,r)$ を研究し, 以後 block 代数と言えば, ある $r > 0$ に対する $S(r,r)$ の両側直既約 ideal を意味する．

[3] [Don98] と説明の仕方が違うので注意.

Theorem 12 (Chuang-Rouquier[CR08])
A, B を *q-Schur* 代数の *block* 代数とする．A と B の既約加群の同値類の個数が等しいとする．このとき, 三角圏として

$$D^b(A\text{-mod}) \cong D^b(B\text{-mod}).$$

Theorem 13
q は有限乗法的位数 e を持つとする．A を *q-Schur* 代数の *block* 代数で半単純でないとする．このとき, $\mathrm{dom.dim} A = 2(e-1)$ が成立する．

Chuang-Rouquier の定理があるので Theorem 10 を使い導来同値類毎に一つの block 代数の dominant dimension を計算すればよいことになる．都合が良いのを計算することにより Theorem が得られる．

参　考　文　献

[CR08] Joseph Chuang and Raphaël Rouquier. Derived equivalences for symmetric groups and $\mathfrak{sl}_2$-categorification. *Ann. of Math. (2)*, 167(1):245–298, 2008.

[Don98] S. Donkin. *The q-Schur algebra*, volume 253 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[FK11] Ming Fang and Steffen Koenig. Schur functors and dominant dimension. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 363(3):1555–1576, 2011.

[FM19] Ming Fang and Hyohe Miyachi. Hochschild cohomology and dominant dimension. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 371(8):5267–5292, 2019.

[Ric91] Jeremy Rickard. Derived equivalences as derived functors. *J. London Math. Soc. (2)*, 43(1):37–48, 1991.