ブロック・イデアルのソース多元環の加群構造

Sasaki, Hiroki
佐々木 洋城
Shinshu University, Faculty of Education
信州大学 教育学部

1 はじめに

以下，k を標数 $p > 0$ の代数的閉体とする．G を有限群とし，その位数は k の標数 p で割りきれるものとする．

目的は群環 kG のブロック・イデアルの source 多元環の加群構造を考察することである．Sasaki [10] で得られた定理の改良を報告する．

ブロック・イデアルのコホモロジー環がそのブロック・イデアルの source 多元環から定められる defect 群のコホモロジー環の写像の像として表すことができると予想している．この度，新たに defect 群が wreathed 2-group

$$\langle a_1, a_2, t \mid {a_1}^{2^n} = {a_2}^{2^n} = t^2 = 1,\ a_1a_2 = a_2a_1,\ ta_1t = a_2 \rangle,\ n \geqslant 2$$

であるブロック・イデアルについて結論が得られた．

2 source 多元環の加群構造

以下，b を kG のブロック・イデアルとし，P をその defect 群とする．b を直既約 $k[G\times G]$-加群とみるとき $\Delta(P) = \{(u,u) \mid u \in P\}$ は b の vertex である．そこで，b の $k[G \times P]$-加群としての直既約直和因子で $\Delta(P)$ を vertex としてもつものがある．それを b の source 加群とよぶ．source 加群は $b^P = \{w \in b \mid {}^u w = w\,\forall u \in P\}$ に属する原始的べき等元 i を用いて kGi と表される．$\Delta(P)$ が kGi の vertex であることは $\mathrm{Br}_P(i) \neq 0$ ということである．$\mathrm{Br}_P(i) \in kC_G(P)$ は原始的べき等元であるから，$kC_G(P)$ のあるブロック・イデアルに属する．いま，$\mathrm{Br}_P(i)$ が $kC_G(P)e$（$e \in Z(kC_G(P))$ はブロックべき等元）に属するとし，$b_P = k[PC_G(P)]e$ とおく．このとき，i は (P, b_P) に属するという．

(P, b_P) は Sylow b-subpair である．すなわち，b_P の G への Brauer 対応が b となる．P は b_P の defect 群である．

さて，$\mathrm{End}_{k[G\times P]}(kGi) \simeq ikGi$ を b の source 多元環とよぶ．

本研究は科学研究費助成事業 (課題番号 15K04777) の助成を受けたものである．.

定義 2.1 (Linckelmann [4]) 上の記号の下で $X = kGi$ とおくとき

$$H^*(G, b; X) = \{\zeta \in H^*(P, k) \mid \mathrm{con}^g \, \mathrm{res}_Q \, \zeta = \mathrm{res}_Q \, \zeta \ \forall (Q, b_Q) \subset (P, b_P) \ \forall g \in N_G(Q, b_Q)\}$$

を b のコホモロジー環とよぶ.

b の source 多元環 $ikGi$ は $k[P \times P]$ 加群である．次はブロック・イデアルのコホモロジー環の基本定理である.

定理 2.1 (Linckelmann [4], Sasaki [9]) 同じ記号の下で，$\zeta \in H^*(P, k)$ について

$$\zeta \in H^*(G, b; X) \Longleftrightarrow \delta_P(\zeta) \in HH^*(kP) \text{ は } k[P \times P] \text{ 加群 } ikGi \text{ について stable.}$$

ここで，$HH^*(kP)$ は kP の Hochshild コホモロジー環であり，$\delta_P : H^*(P, k) \to HH^*(kP)$ は diagonal embedding である.

ブロック・イデアルのコホモロジー環の立場から b の source 多元環の $k[P \times P]$ 加群としての構造を調べたい．次は Puig によるもので，出発点である.

定理 2.2 (例えば [12, Theorem 44.3]) $ikGi$ は $k[P \times P]$ 加群として次のように直和分解される.

$$ikGi \simeq \bigoplus_{v \in [N_G(P, b_P)/PC_G(P)]} k[Pv] \bigoplus Z.$$

ここで，$[N_G(P, b_P)/PC_G(P)]$ は商集合 $N_G(P, b_P)/PC_G(P)$ の（ひとつの）完全代表系を表し，$v \in [N_G(P, b_P)/PC_G(P)]$ について $k[Pv]$ の $ikGi$ における重複度は 1 である．また，Z の直既約直和因子はある $x \in G \setminus N_G(P)$ で生成される $k[P \times P]$ 加群 $k[PxP]$ に同型である.

この定理の Z を調べなければならない. つまり

- どの $x \in G \setminus N_G(P)$ について $k[PxP]$ は $ikGi$ の直和因子に同型か？
- 重複度はいくつか？

を知りたいのである.

上の定理を示すために次の事実が用いられる.

$$\forall g \in N_G(P, b_P) \quad \exists \theta_g \in U(b^P) \text{ s.t. } {}^g i = {}^{\theta_g} i = \theta_g \, i \, \theta_g{}^{-1}.$$

この θ_g はまた次の $k[P \times P]$ 加群としての同型

$$\Phi_g : g\, ikGi \to ikGi; \sigma \, g \mapsto \eta_g \, \sigma$$

を引き起こす．ここで，$\eta_g = \theta_g{}^{-1} g \, i = i \, \theta_g{}^{-1} g \in U(ikGi)$ である.

source 多元環 $ikGi$ は写像 $t_{ikGi} : HH^*(kP) \to HH^*(kP)$ を導く．$t_{ikGi} \circ \delta_P(H^*(P, k)) \subset \delta_P(H^*(P, k))$ であるから，t_{ikGi} は写像 $H^*(P, k) \to H^*(P, k)$ を導く．この写像も t_{ikGi} と

表す.

$$\begin{array}{ccc} H^*(P,k) & \xrightarrow{\delta_P} & HH^*(kP) \\ {\scriptstyle t_{ikGi}}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle t_{ikGi}} \\ H^*(P,k) & \xrightarrow[\delta_P]{} & HH^*(kP) \end{array}$$

いま, $k[P \times P]$ 加群として, ある $\mathscr{X} \subset G \setminus N_G(P)$ を用いて

$$ikGi \simeq \bigoplus_{v \in [N_G(P,b_P)/PC_G(P)]} k[Pv] \bigoplus \left(\bigoplus_{x \in \mathscr{X}} k[PxP] \right) \tag{*1}$$

と直和分解されるとすると, 写像 $t_{ikGi} : H^*(P,k) \to H^*(P,k)$ は $\zeta \in H^*(P,k)$ を次のように写像する.

$$t_{ikGi} : \zeta \mapsto \sum_{v \in [N_G(P,b_P)/PC_G(P)]} \mathrm{con}^v \zeta + \sum_{x \in \mathscr{X}} \mathrm{tr}^P \mathrm{res}_{P \cap {}^xP} \mathrm{con}^x \zeta.$$

定理 2.1 は $\mathrm{Im}\ t_{ikGi} \subseteq H^*(G,b;X)$ であることを意味する. そこで, この写像の像がブロック・イデアルのコホモロジー環であると予想している.

予想

$$\mathrm{Im}\ t_{ikGi} = H^*(G,b;X).$$

例 2.1 $N_G(P,b_P)$ が subpairs の fusion を統制する場合は予想が成り立つ. 例えば, 次の場合が該当する.

(1) P が G の正規部分群である.
(2) P が可換である.
(3) P が exponent p^2, 位数 p^3 のの extraspecial p-群.
(4) P がランク 3 以上の extraspecial p-群 (Stancu [11]).
(5) b の hyper focal subgroup が巡回群である (Watanabe [13, Theorem 3]).

予想を確認するために具体的例を考察しているが, 目下のところ,

(1) 直和分解 (*1) に現れる $k[PxP]$ とその重複度を調べる.
(2) 直和因子の $k[PxP]$ が定めるコホモロジー環の写像 $t_{PxP} : \zeta \mapsto \mathrm{tr}^P \mathrm{res}_{P \cap {}^xP} \mathrm{con}^x \zeta$ を調べる

という素朴な方法をとっている.

例 2.2 以下の場合に予想は正しい.

(1) $p = 2$ で b が tame 表現型.
(2) P が exponent p, 位数 p^3 の extraspecial p-群.

次は $ikGi$ の $k[P \times P]$ 加群としての直既約直和因子が subpairs の fusion を引き起こすことを示し，重要である．

命題 2.3 (例えば，Külshammer, Okuyama and Watanabe [2]) $k[PgP]$ が $ikGi$ の直和因子に同型であるとする．$Q = P^g \cap P$, $R = P \cap {}^gP$ とおく．$(Q, b_Q), (R, b_R) \subset (P, b_P)$ について

$$^g(Q, b_Q) = (R, b_R).$$

従って，subpairs の fusion を調べることにより $ikGi$ の $k[P \times P]$ 加群としての直既約直和因子の可能性を調べられる．

subpairs の fusion を調べるためには essential subpair が有用である．

定義 2.2 subpair (T, c) について

(1) (T, c) は self-centralizing（T は $k[TC_G(T)]$ のブロック・イデアル c の defect 群）であり
(2) $N_G(T, c)/TC_G(T)$ が strongly p-embedded proper subgroup をもつ

が成り立つとき，(T, c) は essential であるという．このとき $\mathrm{Aut}\,T$ は p-群ではない．

Linckelmann [5] により

定理 2.4 $\mathscr{F} = \{\, (T, b_T) \subset (P, b_P) \mid (T, b_T)$ は essential$\,\} \cup \{\, (P, b_P) \,\}$ は conjugation family である．

すなわち，b-subpairs (Q, b_Q)，(R, b_R) について $^g(Q, b_Q) = (R, b_R)$ ならば，適当な (F_1, b_{F_1}), $(F_2, b_{F_2}), \ldots, (F_m, b_{F_m}) \in \mathscr{F}$（$R_j \leqslant F_j \cap F_{j+1}$）と適当な $g_j \in N_G(F_j, b_{F_j})$ により $\mathrm{con}^g : (Q, b_Q) \to (R, b_R)$ が $\mathrm{con}^g = \mathrm{con}^{g_m \cdots g_2 g_1}$ と表される：

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& (F_1, b_{F_1}) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (F_2, b_{F_2}) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & {} & \cdots\cdots\cdots & {} \arrow[dr, dash] & & (F_{m-1}, b_{F_{m-1}}) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (F_m, b_{F_m}) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
(Q, b_Q) \arrow[rr, "g_1"'] & & (R_1, b_{R_1}) \arrow[rr, "g_2"'] & & (R_2, b_{R_2}) \arrow[ur, dash] \arrow[rr] & & \cdots\cdots\cdots \arrow[rr] & & (R_{m-2}, b_{R_{m-2}}) \arrow[rr, "g_{m-1}"'] & & (R_{m-1}, b_{R_{m-1}}) \arrow[rr, "g_m"'] & & (R, b_R)\,.
\end{tikzcd}$$

このとき

$$R \leqslant {}^{g_m \cdots g_2}R_1 \cap {}^{g_m \cdots g_3}R_2 \cap \cdots \cap {}^{g_m}R_{m-1} \cap R_m$$

であることに注意する．特に，写像 $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_R \mathrm{con}^g : H^*(P, k) \to H^*(P, k)$ が 0-写像でなければ等号が成り立つ．すなわち

$$R = {}^{g_m \cdots g_2}R_1 \cap {}^{g_m \cdots g_3}R_2 \cap \cdots \cap {}^{g_m}R_{m-1} \cap R_m.$$

$ikGi$ は p-置換加群であり，Brauer 準同型を用いて $ikGi$ の直和因子を調べることができるが，次はそのときの基本となる事実である．

命題 2.5 (Okuyama and Sasaki [7]) $(T, b_T) \subset (P, b_P)$ を essential b-subpair とする．$j = \mathrm{Br}_T(i) \in kC_G(T)e_T$ とおく．ここで，$e_T \in Z(kC_G(T))$ は b_T のブロックべき等元である．このとき，$k[T \times T]$ 加群として

$$k[TC_G(T)]j \simeq \bigoplus_{m\ \text{個}} kT$$

と直和分解され，重複度 $m = m_T$ は p を法として 1 に合同である．

定理 2.6 (Okuyama and Sasaki [7]) $(T, b_T) \subset (P, b_P)$ を essential とする．$M \leqslant N_G(T, b_T)$ を $N_P(T)C_G(T)$ を含み，$M/TC_G(T) < N_G(T, b_T)/TC_G(T)$ が strongly p-embedded proper subgroup であるようにとる．このとき，任意の $x \in N_G(T, b_T) \setminus M$ に対して $k[PxP]$ は $ikGi$ の直和因子に同型であり，重複度は命題 2.5 の m_T で与えられる．従って，p を法として 1 に合同である．

注意 2.1 $k[PxP]$ の重複度は $x \in N_G(T, b_T) \setminus M$ のとり方によらず m_T で一定なのである．

以前に次の定理が得られていた．

定理 2.7 (Sasaki [10]) $(Q, b_Q), (R, b_R) \subset (P, b_P)$ とし，$QC_P(Q)$ が b_Q の defect 群であるか $RC_P(R)$ が b_R の defect 群であると仮定する．$g \in G$ について ${}^g(Q, b_Q) = (R, b_R)$ とする．条件

(NTC) 　写像 $t_g : H^*(P, k) \to H^*(P, k); \zeta \mapsto \mathrm{tr}^P \mathrm{res}_R \mathrm{con}^g \zeta$ は 0 写像でない

が成り立つならば次が成り立つ．

(1) $k[PgP]$ は $ikGi$ の直和因子に同型である．
(2) $R = P \cap {}^gP$ でありかつ ${}^g(Q, b_Q) = (R, b_R)$.
(3) $t_{PgP} = t_g$, すなわち

$$t_{PgP}(\zeta) = \mathrm{tr}^P \mathrm{res}_R \mathrm{con}^g \zeta \quad (\zeta \in H^*(P, k)).$$

最近の改良を報告する．

定義 2.3 $P,\ Q \leqslant G$ を p-部分群とする．

$$x \in G \text{ が } (P, Q)\text{-ICC をみたす} \underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \forall c \in C_G(P \cap {}^xQ)\ P \cap {}^xQ = P \cap {}^{cx}Q.$$

$x \in G$ が (P, Q)-ICC をみたすならばどの $c \in C_G(P \cap {}^xQ)$ についても $k[P \times Q]$ 加群として $k[PcxQ] \simeq k[PxQ]$ である．また，コホモロジー環の写像

$$t_{PxQ} : H^*(Q, k) \to H^*(P, k); \zeta \mapsto \mathrm{tr}^P \mathrm{res}_{P(}$$

が 0 写像でなければ，$x \in G$ は (P, Q)-ICC をみたす．

定理 2.8 $i \in b^P$ を source べき等元とし，Sylow b-subpair (P, b_P) に i が属するとする．$x \in G$ は (P, P)-ICC をみたすとする．すなわち，どの $c \in C_G(P \cap {}^xP)$ についても $P \cap {}^xP = P \cap {}^{cx}P$ が成り立つと仮定する．$Q = P^x \cap P$, $R = P \cap {}^xP$ とおく．b-subpairs (Q, b_Q), $(R, b_R) \subset$

(P, b_P) をとる．${}^x(Q, b_Q) = (R, b_R)$ が成り立っていると仮定する．このとき，さらに，以下の 3 つの条件のどれかが成り立てば $k[P \times P]$ 加群として $k[PxP]$ は b の source 多元環 $ikGi$ の直和因子に同型である．

(1) $QC_P(Q)$ は b_Q の defect 群である．
(2) $RC_P(R)$ は b_R の defect 群である．
(3) b_Q はべき零ブロックである．（このとき，b_R もべき零ブロックである）

注意 2.2 (1) $k[PxP]$ が $ikGi$ の直和因子に同型ならば，${}^x(Q, b_Q) = (R, b_R)$ が成り立つ．
(2) 一般には，ある $y \in G$ により，$QC_{{}^yP}(Q)$ は b_Q の defect 群である．

定理 2.9 定理 2.8 において条件 (3) が成り立つとき，すなわち，b_Q がべき零ブロックならば $k[PxP]$ の $ikGi$ の重複度 $\mathrm{mlty}_{k[P\times P]}(k[PxP], ikGi)$ は下記の公式で与えられる．

$$\begin{aligned}&\mathrm{mlty}_{k[P\times P]}(k[PxP], ikGi)\\&= \frac{|Z(R)|}{|N_{{}^xP}(R) \cap N_P(R)C_G(R)||C_P(R)|} \cdot |b_R \text{ の defect 群}| \cdot (1 + n_0 p)\end{aligned}$$

ここで，n_0 は 0 以上の整数である．

特に，さらに定理 2.8 の条件 (1) または (2) が成り立つとき

$$\mathrm{mlty}_{k[P\times P]}(k[PxP], ikGi) \equiv 1 \pmod{p}.$$

3 defect 群が wreathed 群である 2-ブロック

ブロック・イデアル b の defect 群は wreathed 2-群

$$P = \langle a_1, a_2, t \mid {a_1}^{2^n} = {a_2}^{2^n} = t^2 = 1,\ a_1a_2 = a_2a_1,\ ta_1t = a_2 \rangle,\ n \geqslant 2$$

であるとする．

$c = a_1a_2, d = a_1{a_2}^{-1}$ とおく．$Z(P) = \langle c \rangle, P' = \langle d \rangle$ である．さらに

$$x_1 = {a_1}^{2^{n-1}},\ x_2 = {a_2}^{2^{n-1}},\ z = c^{2^{n-1}} = x_1x_2,$$

$$e = x_1t,\ f = d^{2^{n-2}} (= (a_1{a_2}^{-1})^{2^{n-2}})$$

$$U = \langle a_1, a_2 \rangle,\ Q = \langle e, f \rangle (\simeq Q_8),\ V = \langle e, f, c \rangle (= \langle x_1, t, c \rangle),\ W = \langle t, c \rangle,$$

$$E = \langle x_1, x_2 \rangle,\ F = \langle t, z \rangle$$

とおく．

Kawai and Sasaki [1] で構成した $\mathrm{Tr}_P^b : H^*(P, k) \to H^*(P, k)$ が source 多元環 $ikGi$ の導く transfer 写像と一致することが確かめられた．（定理 3.13，系 3.14）

P の自己同型群は 2-群であるから，$ikGi$ の直和分解 (*1) は

$$ikGi \simeq kP \oplus \left(\bigoplus_{x \in \mathscr{X}} k[PxP]\right) \tag{*2}$$

の形である．

Aut $U \simeq \mathrm{GL}(2,2)$，Out $V \simeq \mathrm{GL}(2,2)$ である．

(P, b_P) を Sylow b-subpair とする．(U, b_U)，$(V, b_V) \subset (P, b_P)$ をとる．

- $N_G(U, b_U)/C_G(U) \simeq \mathrm{GL}(2,2)$ のとき (U, b_U) は essential である．$PC_G(U)/C_G(U) < N_G(U, b_U)/C_G(U)$ は strongly embedded である．
- $N_G(V, b_V)/VC_G(V) \simeq \mathrm{GL}(2,2)$ のとき (V, b_V) はessentialである．$N_P(V)C_G(V)/VC_G(V) < N_G(V, b_V)/VC_G(V)$ は strongly embedded である．

そこで，以下では $N_G(U, b_U)/C_G(U) \simeq \mathrm{GL}(2,2)$，$N_G(V, b_V)/VC_G(V) \simeq \mathrm{GL}(2,2)$ であると仮定する．このとき，(P, b_P) に含まれる essential subpairs の集合は

$$\{\,(U, b_U)\,\} \cup \{\,{}^u(V, b_V) \mid u \in P\,\}$$

で与えられる．従って，定理 2.4 の共役族は $\mathscr{F} = \{\,(U, b_U)\,\} \cup \{\,{}^u(V, b_V) \mid u \in P\,\} \cup \{\,(P, b_P)\,\}$ である．

$g_U \in N_G(U, b_U) \setminus PC_G(U)$ を U の位数 3 の自己同型を引き起こすものとし，次のように作用するものとする．

$${}^{g_U}a_1 = a_2, \quad {}^{g_U}a_2 = {a_1}^{-1}{a_2}^{-1}.$$

$g_V \in N_G(V, b_V) \setminus N_P(V)C_G(V)$ を V の位数 3 の自己同型を引き起こすものとし，次のように作用するものとする．

$${}^{g_V}e = ef^{-1}, \quad {}^{g_V}f = e, \quad {}^{g_V}c = c.$$

$g_V \in N_G(V, b_V)$ の x_1，t への作用は次の通りである．

$${}^{g_V}x_1 = c^{2^{n-2}}x_1\,t = c^{2^{n-2}}e, \quad {}^{g_V}(c^{2^{n-2}}e) = t, \quad {}^{g_V}t = x_1.$$

特に

$${}^{g_V}F = {}^{g_V}\langle t, z\rangle = \langle x_1, z\rangle = E.$$

Kawai and Sasaki [1] で定義した trace map は以下のように記述される．すなわち

$$\Gamma_U : H^{(}P, k) \to H^{(}P, k);\, \zeta \longmapsto \zeta + \mathrm{tr}^P \mathrm{res}_U \mathrm{con}^{g_U} \zeta,$$
$$\Gamma_V : H^{(}P, k) \to H^{(}P, k);\, \zeta \longmapsto \zeta + \mathrm{tr}^P \mathrm{res}_V {}^{g_V}\zeta$$

と定義すると

命題 3.1

$$\Gamma_U \circ \Gamma_V \circ \Gamma_U \circ \Gamma_V = \Gamma_V \circ \Gamma_U \circ \Gamma_V \circ \Gamma_U = \Gamma_V \circ \Gamma_U \circ \Gamma_V$$

が成り立ち，この写像を Tr_P^b と書く．$\mathrm{Tr}_P^b = \Gamma_V \circ \Gamma_U \circ \Gamma_V$.

定理 3.2 (Kawai and Sasaki [1]) $\mathrm{Im}\,\mathrm{Tr}_P^b = H^*(G, b, X)$ が成り立つ．

写像 Tr_P^b は $\zeta \in H^*(P,k)$ を次のように写像する．

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_P^b : \zeta \mapsto \zeta &+ \mathrm{tr}^P \mathrm{res}_U \mathrm{con}^{g_U} \zeta + \mathrm{tr}^P \mathrm{res}_V \mathrm{con}^{g_V} \zeta \\ &+ \mathrm{tr}^P \mathrm{res}_{V\cap {}^{g_V}U} \mathrm{con}^{g_V g_U} \zeta + \mathrm{tr}^P \mathrm{res}_{U\cap {}^{g_U}V} \mathrm{con}^{g_U g_V} \zeta \\ &+ \mathrm{tr}^P \mathrm{res}_{V\cap {}^{g_V}U\cap {}^{g_V g_U}V} \mathrm{con}^{g_V g_U g_V} \zeta.\end{aligned}$$

以下ではこの写像の意味を考える．

3.1 $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_U \mathrm{con}^{g_U}$, $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_V \mathrm{con}^{g_V}$

Okuyama and Sasaki [7] が適用できて

命題 3.3 (1) $P\cap {}^{g_U}P = U,\ P\cap {}^{g_V}P = V$.
(2) $k[Pg_UP],\ k[Pg_VP] \mid ikGi$. さらに，それぞれの重複度 $m_U,\ m_V$ は奇数である．
(3) $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_U \mathrm{con}^{g_U} = t_{Pg_UP},\ \mathrm{tr}^P \mathrm{res}_V \mathrm{con}^{g_V} = t_{Pg_VP}$.

注意 3.1 写像 $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_U \mathrm{con}^{g_U} = t_{Pg_UP},\ \mathrm{tr}^P \mathrm{res}_V \mathrm{con}^{g_V} = t_{Pg_VP}$ は 0 写像ではない．

3.2 $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_{V\cap {}^{g_V}U} \mathrm{con}^{g_V g_U}$, $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_{U\cap {}^{g_U}V} \mathrm{con}^{g_U g_V}$

$V\cap {}^{g_V}U = W_0,\ U\cap {}^{g_U}V = T_1$ とおく．また，$\langle x_1, a_2\rangle = T_0,\ \langle c, t\rangle = W_1$ とおく．このとき

$$\begin{aligned}&{}^{g_U}T_0 = U\cap V,\ {}^{g_V g_U}T_0 = {}^{g_V}(V\cap U) = V\cap {}^{g_V}U = W_0\\ &{}^{g_V}W_1 = U\cap V,\ {}^{g_U g_V}W_1 = {}^{g_U}(U\cap V) = U\cap {}^{g_U}V = T_1.\end{aligned}$$

補題 3.4 (1) 写像 $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_{V\cap {}^{g_V}U} \mathrm{con}^{g_V g_U},\ \mathrm{tr}^P \mathrm{res}_{U\cap {}^{g_U}V} \mathrm{con}^{g_U g_V}$ は 0 写像ではない．
(2) $g_V g_U$ は (P,P)-ICC を満たす．特に，$W_0 = P\cap {}^{g_V g_U}P$.
(3) $g_U g_V$ は (P,P)-ICC を満たす．特に，$T_1 = P\cap {}^{g_U g_V}P$.

subpairs (T_0, b_{T_0}), (T_1, b_{T_1}), (W_0, b_{W_0}), $(W_1, b_{W_1}) \subset (P, b_P)$ をとる．

補題 3.5 上の subpairs は次のように共役である．

$${}^{g_V g_U}(T_0, b_{T_0}) = (W_0, b_{W_0}), \quad {}^{g_U g_V}(W_1, b_{W_1}) = (T_1, b_{T_1}).$$

この共役は essential subpairs (U, b_U), (V, b_V) の inertial groups の元 g_U, g_V による共役の合成として次のように得られる．

$$\begin{tikzcd}
& (U,b_U) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (V,b_V) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
(T_0,b_{T_0}) \arrow[rr, "g_U"'] & & (U\cap V, b_{U\cap V}) \arrow[rr, "g_V"'] & & (W_0,b_{W_0})
\end{tikzcd}
,\quad
\begin{tikzcd}
& (V,b_V) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (U,b_U) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
(W_1,b_{W_1}) \arrow[rr, "g_V"'] & & (U\cap V, b_{U\cap V}) \arrow[rr, "g_U"'] & & (T_1,b_{T_1})
\end{tikzcd}$$

補題 3.6 (1) (T_0, b_{T_0}), (T_1, b_{T_1}) については $U = T_j C_P(T_j)$ は b_{T_j} の defect 群である．
(2) $b_{W_0},\ b_{T_1}$ はべき零ブロックである．

以上を総合して，定理 2.8，定理 2.9 により，次が得られる．

命題 3.7 (1) $k[Pg_V g_U P]$, $k[Pg_U g_V P] \mid ikGi$. さらに，それぞれの重複度 m_{VU}, m_{UV} は奇数である.

(2) $\mathrm{tr}^P \operatorname{res}_{V \cap {}^{g_V}U} \operatorname{con}^{g_V g_U} = t_{P(g_V g_U)P}$, $\mathrm{tr}^P \operatorname{res}_{U \cap {}^{g_U}V} \operatorname{con}^{g_U g_V} = t_{P(g_U g_V)P}$.

3.3 $\mathbf{tr}^P\ \mathbf{res}_{V \cap {}^{g_V}U \cap {}^{g_V g_U}V}\ \mathbf{con}^{g_V g_U g_V}$

$F_1 = V \cap {}^{g_V}U \cap {}^{g_V g_U}V$ とおく.

補題 3.8 (1) 写像 $\mathrm{tr}^P \operatorname{res}_{F_1} \operatorname{con}^{g_V g_U g_V}$ は 0 写像ではない.

(2) $g_V g_U g_V$ は (P, P)-ICC を満たす. 特に，$P \cap {}^{g_V g_U g_V}P = F_1$.

subpairs (E, b_E), (F, b_F), $(F_1, b_{F_1}) \subset (P, b_P)$ をとる.

補題 3.9 subpairs (F, b_F), (F_1, b_{F_1}) は次のように共役である.

$$^{g_V g_U g_V}(F, b_F) = (F_1, b_{F_1}).$$

この共役は essential subpairs (U, b_U), (V, b_V) の inertial groups の元 g_U, g_V による共役の合成として次のように得られる.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (V, b_V) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (U, b_U) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (V, b_V) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
(F, b_F) \arrow[rr, "g_V"'] & & (E, b_E) \arrow[rr, "g_U"'] & & (E, b_E) \arrow[rr, "g_V"'] & & (F_1, b_{F_1})
\end{tikzcd}$$

補題 3.10 (1) ${}^{g_V{}^{-1}}U$ は b_F の defect 群である.

(2) ${}^{g_V}U$ は b_{F_1} の defect 群である.

(3) b_F はべき零ブロックである.

従って，定理 2.8 の条件 (1) や (2) は満たされない. そこで，定理 2.9 の公式を調べる. そのため，すこし，工夫をする.

補題 3.11 $w = a_1{}^{2^{n-2}} g_V g_U g_V$ とおく.

(1) $w \in N_G(F, b_F)$, ${}^w t = zt$, ${}^w z = t$. すなわち，w は F の位数 3 の自己同型を引き起こし

$$N_G(F, b_F) = \langle x_1, w \rangle C_G(F).$$

(2) $\mathrm{tr}^P \operatorname{res}_{F_1} \operatorname{con}^{g_V g_U g_V} = \mathrm{tr}^P \operatorname{res}_F \operatorname{con}^w$.

そこで，$\mathrm{tr}^P \operatorname{res}_F \operatorname{con}^w$ に定理 2.9 を適用して次が得られるのである.

命題 3.12 (1) $F = P \cap {}^w P$.

(2) $k[Pg_V g_U g_V P] = k[PwP] \mid ikGi$. さらに，その重複度 m_{VUV} は奇数である.

以上により，$k[P \times P]$ 加群

$$kP \oplus m_U k[Pg_U P] \oplus m_V k[Pg_V P] \oplus m_{UV} k[Pg_U g_V P] \oplus m_{VU} k[Pg_V g_U P] \oplus m_{VUV} k[Pg_V g_U g_V P]$$

は $ikGi$ の直和因子に同型であり，これが導く $H^*(P, k)$ の写像は Tr_P^b であることがわかった.

3.4 $ikGi$ の加群構造

残る課題は $ikGi$ の上の直和因子以外の直和因子の考察である．

$k[PgP] \bigm| ikGi$ とし，$R = P^g \cap P$，$S = P \cap {}^gP$ とおく．(R, b_R)，$(S, b_S) \subseteq (P, b_P)$ をとる．このとき

$$ {}^g(R, b_R) = (S, b_S) $$

である．共役 ${}^g(R, b_R) = (S, b_S)$ を essential subpairs の inertial groups の元による共役の合成として次のように表すことができる．

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (P, b_P) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (F_2, b_{F_2}) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & {} \arrow[dl, dash] & \cdots\cdots\cdots & {} \arrow[dr, dash] & & (F_{m-1}, b_{F_{m-1}}) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (P, b_P) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
(R, b_R) \arrow[rr, "g_1"'] & & (R_1, b_{R_1}) \arrow[rr, "g_2"'] & & (R_2, b_{R_2}) \arrow[rr] & & \cdots\cdots\cdots \arrow[rr] & & (R_{m-2}, b_{R_{m-2}}) \arrow[rr, "g_{m-1}"'] & & (R_{m-1}, b_{R_{m-1}}) \arrow[rr, "g_m"'] & & (S, b_S)
\end{tikzcd} .
$$

ただし，$2 \leqslant q \leqslant m-1$ については $(F_q, g_q) = (U, g_U)$ または (V, g_V)．また，g_1，$g_m \in PC_G(P)$ については，1 のこともある．

注意 3.2 essential supair としては (V, b_V) の P-共役も考えなければならないし，inertial groups の元も g_U や g_V 以外の元もあるのだから，上のように表すことができるということは自明ではない．（もっとも，容易なことではある）

写像 $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_S \mathrm{con}^g$ が 0 写像でないような $k[PgP] \bigm| ikGi$ を知りたいのである．

$$ \mathrm{tr}^P \mathrm{res}_S \mathrm{con}^g = \mathrm{tr}^P \mathrm{res}_S \mathrm{con}^{g_m g_{m-1} \cdots g_2 g_1} = \mathrm{tr}^P \mathrm{res}_{R_{m-1}} \mathrm{con}^{g_{m-1} \cdots g_2} $$

であるから $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_S \mathrm{con}^g$ が 0 写像でない $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_{R_{m-1}} \mathrm{con}^{g_{m-1} \cdots g_2}$ が 0 写像でない．

この条件が成り立つとき $k[PgP] \simeq k[Pg_{m-1} \cdots g_2 P]$．

従って，最初と最後の (P, b_P) と $g_1, g_m \in PC_G(P)$ は省略して考察してよい．

(1) $m = 3$ で

$$
\begin{tikzcd}
 & (U, b_U) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
(R_1, b_{R_1}) \arrow[rr, "g_U"'] & & (R_2, b_{R_2})
\end{tikzcd}
$$

と表されるとき．$R \leqslant U$ である．

(a) $R_2 = U$ のとき，$\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_S \mathrm{con}^g$ は 0 写像でなく $k[PgP] \simeq k[Pg_U P]$．

(b) $R_2 < U$ のとき，$\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_S \mathrm{con}^g$ は 0 写像．

(2) $m = 4$ で

$$
\begin{tikzcd}
 & (U, b_U) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (V, b_V) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
(R_1, b_{R_1}) \arrow[rr, "g_U"'] & & (R_2, b_{R_2}) \arrow[rr, "g_V"'] & & (R_3, b_{R_3})
\end{tikzcd}
$$

と表されるとき．$R_3 \leqslant W_0$ である．

(a) $R_3 = W_0$ のとき，$\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_S \mathrm{con}^g$ は 0 写像でなく $k[PgP] \simeq k[Pg_V g_U P]$.

(b) $R_3 < W_0$ のとき，$\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_S \mathrm{con}^g$ は 0 写像.

(3) $m \geqslant 5$ で

$$\begin{tikzcd}
& (U, b_U) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (V, b_V) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (U, b_U) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \cdots \arrow[dl, dash] \\
(R_1, b_{R_1}) \arrow[rr, "g_U"'] & & (R_2, b_{R_2}) \arrow[rr, "g_V"'] & & (R_3, b_{R_3}) \arrow[rr, "g_U"'] & & (R_4, b_{R_4}) \arrow[rr] & & \cdots
\end{tikzcd}$$

と表されるとき，$\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_S \mathrm{con}^g$ は 0 写像である.

(4) $m = 3$ で

$$\begin{tikzcd}
& (V, b_V) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
(R_1, b_{R_1}) \arrow[rr, "g_V"'] & & (R_2, b_{R_2})
\end{tikzcd}$$

と表されるとき.

(a) $R_2 = V$ のとき，$\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_S \mathrm{con}^g$ は 0 写像でなく，$k[PgP] \simeq k[Pg_V P]$.

(b) $R_2 < V$ のとき，$\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_S \mathrm{con}^g$ は 0 写像.

(5) $m = 4$ で

$$\begin{tikzcd}
& (V, b_V) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (U, b_U) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
(R_1, b_{R_1}) \arrow[rr, "g_V"'] & & (R_2, b_{R_2}) \arrow[rr, "g_U"'] & & (R_3, b_{R_3})
\end{tikzcd}$$

と表されるとき．$R_3 \leqslant T_1$ である.

(a) $R_3 = T_1$ のとき，$\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_S \mathrm{con}^g$ は 0 写像でなく，$k[PgP] \simeq k[Pg_U g_V P]$.

(b) $R_3 < T_1$ のとき，$\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_R \mathrm{con}^g$ は 0 写像.

(6) $m = 5$ で

$$\begin{tikzcd}
& (V, b_V) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (U, b_U) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (V, b_V) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
(R_1, b_{R_1}) \arrow[rr, "g_V"'] & & (R_2, b_{R_2}) \arrow[rr, "g_U"'] & & (R_3, b_{R_3}) \arrow[rr, "g_V"'] & & (R_4, b_{R_4})
\end{tikzcd}$$

と表されるとき．$R_4 \leqslant F_1$ である.

(a) $R_4 = F_1$ のとき，$\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_S \mathrm{con}^g$ は 0 写像でなく，$k[PgP] \simeq k[Pg_V g_U g_V P]$.

(b) $R_4 < F_1$ のとき，$\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_S \mathrm{con}^g$ は 0 写像.

(7) $m \geqslant 6$ で

$$\begin{tikzcd}
& (V, b_V) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (U, b_U) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (V, b_V) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (U, b_U) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \cdots \arrow[dl, dash] \\
(R_1, b_{R_1}) \arrow[rr, "g_V"'] & & (R_2, b_{R_2}) \arrow[rr, "g_U"'] & & (R_3, b_{R_3}) \arrow[rr, "g_V"'] & & (R_4, b_{R_4}) \arrow[rr, "g_U"'] & & (R_5, b_{R_5}) \arrow[rr] & & \cdots
\end{tikzcd}$$

と表されるとき，$\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_S \mathrm{con}^g$ は 0 写像である.

以上により

定理 3.13 $ikGi$ は $k[P \times P]$ 加群として次のように直和分解される.

$$ikGi \simeq kP \oplus m_U k[Pg_U P] \oplus m_V k[Pg_V P] \oplus m_{UV} k[Pg_U g_V P] \oplus m_{VU} k[Pg_V g_U P] \oplus m_{VUV} k[Pg_V g_U g_V P] \oplus Z.$$

ここで，重複度 m_U, m_V, m_{UV}, m_{VU}, m_{VUV} はいずれも奇数であり，Z のどの直既約直和因子についてもそれに同型な $k[PgP]$ については $\mathrm{tr}^P \operatorname{res}_{P\cap {}^gP} \mathrm{con}^g$ は 0 写像である.

系 3.14 $\mathrm{Tr}_P^b = t_{ikGi}$.

参考文献

[1] H. Kawai and H. Sasaki, Cohomology algebras of 2-blocks of finite groups with defect groups of rank two, J. Algebra **306** (2006), no. 2, 301–321.

[2] B. Külshammer, T. Okuyama, and A. Watanabe, A lifting theorem with applications to blocks and source algebras, J. Algebra **232** (2000), 299–309.

[3] M. Linckelmann, On derived equivalences and local structure of blocks of finite groups, Turkish J. Math. **22** (1998), 93–107.

[4] ———, Transfer in Hochschild cohomology of blocks of finite groups, Algebr. Represent. Theory **2** (1999), 107–135.

[5] M. Linckelmann, Introduction to fusion systems, Group representation theory, EPFL Press, Lausanne, 2007, pp. 79–113.

[6] H. Nagao and Y. Tsushima, Representations of finite groups, Academic Press, New York, London, 1989.

[7] T. Okuyama and H. Sasaki, A note on module structures of source algebras of block ideals of finite groups, J. Algebra **497** (2018), 92–101.

[8] L. Puig, Pointed groups and construction of modules, J. Algebra **116** (1988), 7–129.

[9] H. Sasaki, Cohomology of block ideals of finite group algebras and stable elements, Algebr. Represent. Theory **16** (2013), 1039–1049.

[10] ———, Source algebras and cohomology of block ideals of fintie group algebras, Proc. 46 Symp. Ring Theory and Representation Theory (I. Kikumasa, ed.), 2014, pp. 209–215.

[11] R. Stancu, Control of fusion in fusion systems, J. Algebra Appl **5** (2006), 817–837.

[12] J. Thévenaz, G-algebras and modular representation theory, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 1995.

[13] A. Watanabe, The number of irreducible Brauer characters in a p-block of a finite group with cyclic hyperfocal subgroup, J. Algebra **416** (2014), 167–183.