擬Riemann空間形や光錐内の部分多様体について

首都大学東京大学院 理学研究科 佐藤 雄一郎 (Yuichiro Sato)
Department of Mathematical Sciences,
Tokyo Metropolitan University

1. 導入

Riemann幾何学において，Riemann空間形内の部分多様体は，局所的にも大域的にも非常に良く調べらている．擬Riemann幾何学において，同種の研究がなされ，その多くはRiemann幾何学の場合と同様にアナロジーが通用するが，しばしば異例な現象が起きる．定型的な事例は，擬Riemann多様体内の部分多様体に誘導される計量が退化することがあるというもので，この場合，接束と法束が非自明な交わりを持ち，従来の部分多様体論が展開できない．この誘導計量が退化する部分多様体は，光的部分多様体と呼ばれる．光的部分多様体の研究は，[2]を参照せよ．本原稿では，擬Riemann空間形内の全臍的部分多様体と光錐内の部分多様体について分かったことを概説する．

2. 擬Riemann空間形内の全臍的部分多様体

符号(p,q)のm次元擬Euclid空間を

$$\mathbb{R}^m_p := \left(\mathbb{R}^m, \langle\cdot,\cdot\rangle_p = -\sum_{i=1}^{p} dx_i^2 + \sum_{j=p+1}^{p+q} dx_j^2\right)$$

で定める．但し，$(x_1,\cdots,x_m)$は$\mathbb{R}^m$の標準座標で，$m=p+q$，$p\leq q$を満たす．定数$c\in\mathbb{R}$に対し，$\mathbb{R}^{m+1}_p$内の超曲面

$$Q^m_{p,c} := \{x\in\mathbb{R}^{m+1}_p \mid \langle x,x\rangle_p = c\}$$

を定め，$\mathbb{R}^{m+1}_p$への包含写像による誘導計量を導入する．$Q^m_{p,c}$は，cの値によって状況が変化する．

$$\mathbb{S}^m_p(r^2) := Q^m_{p,\frac{1}{r^2}}, \quad \mathbb{H}^m_p(-r^2) := Q^m_{p+1,-\frac{1}{r^2}}.$$

これらは，それぞれ一定断面曲率$r^2, -r^2$を持ち，測地的完備であり，それぞれ指数pのm次元擬球面，擬双曲空間という．擬Euclid空間$\mathbb{R}^m_p$を含めたものを総称して，擬Riemann空間形と呼ぶこともある．$p=0$のとき，単にRiemann空間形である．

$c=0$のとき，$Q^m_{p,0}$は，原点$(0,\cdots,0)$に唯一の孤立特異点を持つ超曲面になり，誘導計量は常に退化する．$\Lambda^m_p := Q^m_{p+1,0}\setminus\{0\}$は，光錐と呼ばれ，擬Euclid空間内の全臍的光的超曲面となる．光錐は，退化した空間形というべきものであろう．

以下，断らない限り，外空間は擬Riemann空間形を考える．ここで，いくつか記号の準備をする．$\mathbb{M}^N_p = \mathbb{M}^N_p(\epsilon)$を$N$次元擬Riemann空間形とする．ここで$\epsilon\in\{0,\pm1\}$である．すなわち，$\mathbb{M}^N_p(0)=\mathbb{R}^N_p, \mathbb{M}^N_p(1)=\mathbb{S}^N_p(1), \mathbb{M}^N_p(-1)=\mathbb{H}^N_p(-1)$である．また，$(M^m_s, g)$を指数$s$の$m$次元擬Riemann多様体，$\phi: M^m_s\to\mathbb{M}^{m+n}_p$を等長はめ込みとする．$h, H$でそれぞれ$\phi$による$M$上の第二基本形式，平均曲率ベクトル場とする．

部分多様体$\phi(M)$に対し，全測地的であるとは，第二基本形式が恒等的に消えることである．すなわち，$h=0$を満たすことである．極小(あるいは，平均曲率零)であるとは，第二基本形式のトレースが恒等的に消えることである．すなわち，$H=0$を満たす

ことである．全臍的部分多様体であるとは，第二基本形式のトレースレス部分が恒等的に消えることである．すなわち，任意の $X, Y \in \Gamma(TM)$ に対し，$h(X,Y) = g(X,Y)H$ を満たすことである．定義より，全測地的であることの必要十分条件は， 極小かつ全臍的であることである．比較のため，良く知られた Riemann 空間形内の全臍的部分多様体について復習する．

定理 1. $\phi : M^m \to \mathbb{R}^n$ を全臍的等長はめ込みとする．このとき，次のいずれかの一つの開部分に合同である．
- 全測地的 $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$: 部分空間,
- $\mathbb{S}^m(r^2) \hookrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$: 超球面 $(r > 0)$.

定理 2. $\phi : M^m \to \mathbb{S}^n(1)$ を全臍的等長はめ込みとする．このとき，次のいずれかの一つの開部分に合同である．
- 全測地的 $\mathbb{S}^m(1) \subset \mathbb{S}^n(1)$: 大円,
- $\mathbb{S}^m(r^2) \subset \mathbb{S}^{m+1}(1)$: 小円 $(r > 1)$.

定理 3. $\phi : M^m \to \mathbb{H}^n(-1)$ を全臍的等長はめ込みとする．このとき，次のいずれかの一つの開部分に合同である．
- 全測地的 $\mathbb{H}^m(-1) \subset \mathbb{H}^n(-1)$: 部分空間,
- $\mathbb{H}^m(-r^2) \to \mathbb{H}^{m+1}(-1)$: 双曲型 $(r > 1)$,
- $\mathbb{S}^m(r^2) \to \mathbb{H}^{m+1}(-1)$: 楕円型 $(r > 0)$,
- $\mathbb{R}^m \to \mathbb{H}^{m+1}(-1)$: ホロ球面.

いずれも余次元を 1 に落とせることが分かる．さて，次に平坦な擬 Riemann 空間形内の全臍的部分多様体の分類結果を紹介する．

定理 4 (M. A. Magid [5], S. S. Ahn, D. S. Kim, Y. H. Kim [6]). $\phi : M^m_s \to \mathbb{R}^n_p$ を全臍的等長はめ込みとする．このとき，次のいずれかの一つの開部分に合同である．

(1) 全測地的擬 Euclid 部分空間 $\mathbb{R}^m_s \subset \mathbb{R}^n_p$;
(2) 擬球面 $\mathbb{S}^m_s(r^2) \hookrightarrow \mathbb{R}^{m+1}_s$;
(3) 擬双曲空間 $\mathbb{H}^m_s(-r^2) \hookrightarrow \mathbb{R}^{m+1}_{s+1}$;
(4) 次で与えられる平坦全臍的部分多様体 $\mathbb{U}^m_s$

$$\mathbb{R}^m_s \to \mathbb{R}^{m+2}_{s+1}\ ;\ x \mapsto (\langle x, x\rangle_s, x, \langle x, x\rangle_s).$$

更に，M の平均曲率ベクトル場 H は上からそれぞれ次の性質を持つ．

$$H = 0,\ H : \text{空間的},\ H : \text{時間的},\ H : \text{光的}.$$

最後の例は，$\mathbb{R}^n_p$ 内の余次元 2 で，半単純でない対称部分多様体である．

定理 4 の最後の例 (4) には次のような考察がある: $\mathbb{R}^{m+2}_{s+1}$ 内の超平面 $N^{m+1}(0)$ を

$$N^{m+1}(0) := \{(t, x, t) \in \mathbb{R}^{m+2}_{s+1} \mid t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^m_s\}$$

で定めると，全測地的 1-光的超曲面である．従って，この平坦全臍的部分多様体は，$N^{m+1}(0)$ 内の (ある意味で) 全臍的超曲面

$$\mathbb{R}^m_s \ni x \mapsto (\langle x, x\rangle_s, x, \langle x, x\rangle_s) \in N^{m+1}(0) \subset \mathbb{R}^{m+2}_{s+1}$$

とみることができる．ここで，ある意味でと断ったのは，退化した計量を持った空間内の非退化な部分多様体論の定式化が必要であることに起因している．しかし，$N^{m+1}(0)$ が全測地的であることから，$N^{m+1}(0)$ 上に Levi–Civita 接続が自然に誘導され，この接続を用いて，Gauss の公式や Weingarten の公式が定義でき，$N^{m+1}(0)$ 内の全測地的，全臍的部分多様体などが定義可能である．

さて，非平坦な擬 Riemann 空間形の場合の先行研究を紹介する．

事実 (B. Y. Chen, [3])．$\phi : M_s^m \to \mathbb{S}_p^n(1)$ を全臍的等長はめ込みとする．このとき，次のいずれかの一つの開部分に合同である．

- $\mathbb{S}_s^m(r^2) \to \mathbb{S}_s^{m+1}(1)$; $x \mapsto (x, \sqrt{1-r^2})$ $(0 < r \leq 1)$,
- $\mathbb{S}_s^m(r^2) \to \mathbb{S}_{s+1}^{m+1}(1)$; $x \mapsto (\sqrt{r^2-1}, x)$ $(r \geq 1)$,
- $\mathbb{H}_s^m(-r^2) \to \mathbb{S}_s^{m+1}(1)$; $x \mapsto (x, \sqrt{1+r^2})$ $(r > 0)$,
- $\mathbb{R}_s^m \to \mathbb{S}_{s+1}^{m+2}(1)$; $x \mapsto \left(r\langle x,x\rangle_s + rb - \dfrac{r}{4}, rx, \sqrt{1+br^2}, r\langle x,x\rangle_s - rb + \dfrac{r}{4}\right)$ $(r > 0, br^2 \geq -1)$,
- $\mathbb{R}_s^m \to \mathbb{S}_{s+2}^{m+2}(1)$; $x \mapsto \left(r\langle x,x\rangle_s + rb - \dfrac{r}{4}, \sqrt{br^2-1}, rx, r\langle x,x\rangle_s + rb + \dfrac{r}{4}\right)$ $(r > 0, br^2 \geq 1)$.

この擬球面 $\mathbb{S}_p^n(1)$ 内の全臍的部分多様体の分類は，不完全である．実際，例えば次の例が含まれていない．

$$\psi : \mathbb{S}_s^m(1) \to \mathbb{S}_{s+1}^{m+2}(1) \; ; \; x \mapsto (1, x, 1)$$

全測地的なものに合同に見えるが，そうはならない．

実際，ψ の平均曲率ベクトル場を求めると，

$$H = (1, 0, \cdots, 0, 1) \in \mathbb{R}_{s+1}^{m+3}$$

となり，光的になることが分かる（つまり全測地的でない）．

更に，この例に対し，いくつかの興味深い考察がある．すぐに分かることとして，余次元は 2，余指数は 1 である．

一方，Dajczer–Fornari は次を示した．$\phi : \mathbb{S}_s^m(1) \to \mathbb{S}_s^{m+n}(1)$ を等長はめ込みとし，$1 \leq n \leq m-s-1$ を満たすならば，ϕ は全測地的である．

また，$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対し，次の等長はめ込み

$$\psi_a : \mathbb{S}_s^m(1) \to \mathbb{S}_{s+1}^{m+2}(1) \; ; \; x \mapsto (a, x, a)$$

は，前の $\psi = \psi_1$ に合同である．

次で定義される $\mathbb{S}_{s+1}^{m+2}(1)$ 内の超曲面

$$N^{m+1}(1) := \{(t, x, t) \in \mathbb{S}_{s+1}^{m+2}(1) \mid t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{S}_s^m(1)\}$$

は全測地的 1-光的超曲面である．

ψ は，$N^{m+1}(1)$ 内の (ある意味で) 全臍的超曲面

$$\psi : \mathbb{S}_s^m(1) \ni x \mapsto (1, x, 1) \in N^{m+1}(1) \subset \mathbb{S}_{s+1}^{m+2}(1)$$

とみることができる．これは，定理 1 で行った考察

$$\mathbb{R}_s^m \ni x \mapsto (\langle x,x\rangle_s, x, \langle x,x\rangle_s) \in N^{m+1}(0) \subset \mathbb{R}_{s+1}^{m+2}$$

の類似である．

光錐 Λ_s^{m+1} の $\mathbb{S}_{s+1}^{m+2}(1)$ への等長埋め込み

$$\chi : \Lambda_s^{m+1} \to \mathbb{S}_{s+1}^{m+2}(1)\ ;\ x \mapsto (x, 1)$$

は全臍的 1-光的超曲面である．一方，擬球面 $\mathbb{S}_s^m(1)$ は光錐 Λ_s^{m+1} に

$$\rho : \mathbb{S}_s^m(1) \to \Lambda_s^{m+1}\ ;\ x \mapsto (1, x)$$

によって，等長的に埋め込める．従って，ψ は光錐を経由した擬球面の入れ子構造

$$\psi = \chi \circ \rho : \mathbb{S}_s^m(1) \overset{\rho}{\hookrightarrow} \Lambda_s^{m+1} \overset{\chi}{\hookrightarrow} \mathbb{S}_{s+1}^{m+2}(1)\ ;\ x \mapsto (1, x, 1)$$

があるとみることができる．

以上を踏まえ，非平坦な擬 Riemann 空間形内の全臍的部分多様体の完全な分類をしたい．より厳密には，充満な全臍的部分多様体の合同類の分類をしたい．

擬 Riemann 空間形 $\mathbb{M}_p^N(\epsilon)$ の部分多様体 M が充満であるとは，$\mathbb{M}_p^N(\epsilon)$ 内の任意の非退化な全測地的超曲面の中にも含まれないことをいう．

二つの擬 Riemann 多様体間の等長はめ込み $f_1, f_2 : M_s^m \to \bar{M}_p^n$ が合同であるとは，ある $\bar{M}$ の等長変換 g が存在して，$f_2 = g \circ f_1$ を満たすことをいう．

3. 主結果

定理 5 (S.)**.** $\phi : M_s^m \to \mathbb{S}_p^n(1)$ を充満な全臍的等長はめ込みとする．このとき，次のいずれかの一つの開部分に合同である：

(1) $\mathbb{S}_s^m(1) \to \mathbb{S}_s^{m+1}(1)\ ;\ x \mapsto (x, 0)$ (全測地的),
(2) $\mathbb{S}_s^m(1) \to \mathbb{S}_{s+1}^{m+1}(1)\ ;\ x \mapsto (0, x)$ (全測地的),
(3) $\mathbb{S}_s^m(r^2) \to \mathbb{S}_s^{m+1}(1)\ ;\ x \mapsto (x, \sqrt{1-r^2})$ $(0 < r < 1)$,
(4) $\mathbb{S}_s^m(r^2) \to \mathbb{S}_{s+1}^{m+1}(1)\ ;\ x \mapsto (\sqrt{r^2-1}, x)$ $(r > 1)$,
(5) $\mathbb{S}_s^m(1) \to \mathbb{S}_{s+1}^{m+2}(1)\ ;\ x \mapsto (1, x, 1)$,
(6) $\mathbb{H}_s^m(-r^2) \to \mathbb{S}_s^{m+1}(1)\ ;\ x \mapsto (x, \sqrt{1+r^2})$ $(r > 0)$,
(7) $\mathbb{R}_s^m \to \mathbb{S}_{s+1}^{m+1}(1)\ ;\ x \mapsto \left(\langle x, x\rangle_s - \dfrac{3}{4}, x, \langle x, x\rangle_s - \dfrac{5}{4}\right)$.

更に，M_s^m が測地的完備であれば，上記のいずれか一つに大域的に一致する．

定理 6 (S.)**.** $\phi : M_s^m \to \mathbb{H}_p^n(-1)$ を充満な全臍的等長はめ込みとする．このとき，次のいずれかの一つの開部分に合同である：

(1) $\mathbb{H}_s^m(-1) \to \mathbb{H}_s^{m+1}(-1)\ ;\ x \mapsto (x, 0)$ (全測地的),
(2) $\mathbb{H}_s^m(-1) \to \mathbb{H}_{s+1}^{m+1}(-1)\ ;\ x \mapsto (0, x)$ (全測地的),
(3) $\mathbb{H}_s^m(-r^2) \to \mathbb{H}_{s+1}^{m+1}(-1)\ ;\ x \mapsto (\sqrt{1-r^2}, x)$ $(0 < r < 1)$,
(4) $\mathbb{H}_s^m(-r^2) \to \mathbb{H}_s^{m+1}(-1)\ ;\ x \mapsto (x, \sqrt{r^2-1})$ $(r > 1)$,
(5) $\mathbb{H}_s^m(-1) \to \mathbb{H}_{s+1}^{m+2}(-1)\ ;\ x \mapsto (1, x, 1)$,
(6) $\mathbb{S}_s^m(r^2) \to \mathbb{H}_s^{m+1}(-1)\ ;\ x \mapsto (\sqrt{1+r^2}, x)$ $(r > 0)$,
(7) $\mathbb{R}_s^m \to \mathbb{H}_s^{m+1}(-1)\ ;\ x \mapsto \left(\langle x, x\rangle_s + \dfrac{5}{4}, x, \langle x, x\rangle_s + \dfrac{3}{4}\right)$.

更に，M_s^m が測地的完備であれば，上記のいずれか一つに大域的に一致する．

定理 5，6 で得られた部分多様体はすべて対称部分多様体である．

注意 7. $\Pi^m_{s,t,r}$ は，$\mathbb{R}^{m+n}_p$ 内の符号数 (s,t,r) の標準 r-光的 m-平面であり，次で定義される．

$$\Pi^m_{s,t,r} := \{(\underbrace{z_1,\cdots,z_r,x_1,\cdots,x_s,0,\cdots,0}_{p},\underbrace{z_1,\cdots,z_r,y_1,\cdots,y_t,0,\cdots,0}_{m+n-p}) \in \mathbb{R}^{m+n}_p\}.$$

特に，$\Pi^m_{s,t,r}$ は，$\mathbb{R}^{m+n}_p$ 内の全測地的光的部分多様体である [2].

補題 8 (Erbacher–Magid Reduction Theorem, [7], [5])**.** $\phi : M^m_s \to \mathbb{R}^n_p$ を等長はめ込みとする．各点 $x \in M^m_s$ に対し，次を定義する．

$$N^0(x) := \{\xi \in T^\perp_x M \mid A_\xi = 0\}.$$

また，このとき第一法空間を $N^0(x)$ の直交 (補) 空間として，定義する．すなわち，

$$N^1(x) := (N^0(x))^\perp = \{\nu \in T^\perp_x M \mid \bar{g}(\nu,\xi) = 0,\ \xi \in N^0(x)\}$$

で定められる．このとき，$N^1 = \bigcup_{x\in M} N^1(x)$ が法束の部分束であり，法接続に関して平行であるとすると，完備な $(m+k)$ 次元の (光的かもしれない) 全測地的部分多様体 $E^* \subset \mathbb{R}^n_p$ が存在して，$\phi(M) \subset E^*$ を満たす．ここで，$k = \mathrm{rank} N^1$ である．

補題 9 (B. Y. Chen, [3])**.** $\phi : M^m_s \to \mathbb{S}^n_p(1)$ (resp. $\mathbb{H}^n_p(1)$) を等長はめ込み，$\iota : \mathbb{S}^n_p(1) \to \mathbb{R}^{n+1}_p$ (resp. $\mathbb{R}^{n+1}_{p+1}$) を包含写像とする．このとき，合成写像 $f = \iota \circ \phi$ を考えると，次が成立する：

(1) ϕ が平行平均曲率ベクトル場を持つことの必要十分条件は，f が平行平均曲率ベクトル場を持つことである；

(2) ϕ が平行はめ込みであることの必要十分条件は，f が平行はめ込みであることである；

(3) ϕ が全臍的であることの必要十分条件は，f が全臍的であることである．

以下は，主結果である定理 5，6 の証明のスケッチである．

$\phi : M^m_s \to \mathbb{S}^n_p(1)$ が全臍的等長はめ込みと仮定する．ϕ を包含写像 $\iota : \mathbb{S}^n_p(1) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}_p$ を用いて，$\mathbb{R}^{n+1}_p$ への等長はめ込みとみなす．このとき，補題 9 より，$f := \iota \circ \phi : M^m_s \to \mathbb{R}^{n+1}_p$ は全臍的等長はめ込みになることが分かる．Erbacher–Magid Reduction Theorem より，ある $(m+1)$ 次元全測地的部分多様体 $E^* \subset \mathbb{R}^{n+1}_p$ が存在して，$f(M) \subset E^*$ となる．従って，$\phi(M) = \mathbb{S}^n_p(1) \cap E^*$ であるため，E^* の場合分けをして，各個撃破する．$\mathbb{R}^{n+1}_p$ の等長変換により，E^* は $\mathbb{R}^{m+1}_s, \mathbb{R}^{m+1}_{s+1}, \Pi^m_{s,m-s,1}, \Pi^m_{s+1,m-s-1,1}$ のいずれかに一致する．最後に E^* の平行移動を考慮し，直接 $\mathbb{S}^n_p(1)$ との共通部分を計算することで，主結果の分類を得る．擬双曲空間の場合も議論は平行である．

ところで，証明中に次の副産物を得た．

命題 10 (S.)**.** $m \geq 2$ とする．次は，すべて全臍的光的部分多様体を与える．

(1) $\mathbb{S}^{m-1}_s(1) \times \mathbb{R}^{0,0,1} \to \mathbb{S}^{m+1}_{s+1}(1)$; $(x,t) \mapsto (t,x,t)$,

(2) $\mathbb{S}^{m-1}_s(r^2) \times \mathbb{R}^{0,0,1} \to \mathbb{S}^{m+2}_{s+1}(1)$; $(x,t) \mapsto (t,x,\sqrt{1-r^2},t)$ $(0 < r < 1)$,

(3) $\mathbb{S}^{m-1}_s(r^2) \times \mathbb{R}^{0,0,1} \to \mathbb{S}^{m+2}_{s+2}(1)$; $(x,t) \mapsto (t,\sqrt{r^2-1},x,t)$ $(r > 1)$,

(4) $\mathbb{H}^{m-1}_s(-r^2) \times \mathbb{R}^{0,0,1} \to \mathbb{S}^{m+2}_{s+1}(1)$; $(x,t) \mapsto (t,x,\sqrt{1+r^2},t)$ $(r > 0)$,

(5) $\Lambda_s^m \to \mathbb{S}_{s+1}^{m+1}(1); x \mapsto (x, 1)$,
(6) $\Lambda_s^m \times \mathbb{R}^{0,0,1} \to \mathbb{S}_{s+2}^{m+2}(1); (x, t) \mapsto (t, x, 1, t)$,
(7) $\mathbb{S}_s^{m-1}(1) \times \mathbb{R}^{0,0,1} \to \mathbb{S}_{s+2}^{m+3}(1)\ ;\ (x, t) \mapsto (t, 1, x, 1, t)$.
ここで，$\mathbb{R}^{0,0,1}$ は，光的直線 $(\mathbb{R}^1, 0dt^2)$ のことである．

応用として次を得た．
$M_s^m, \bar{M}_p^n$ を擬 Riemann 多様体，次の写像空間を定義する．

$$\{\phi : M \to \bar{M} \mid \phi : \text{等長はめ込み}\}\ (\subset C^\infty(M, \bar{M})).$$

$\mathcal{M}(M, \bar{M})$ を $\bar{M}_p^n$ の等長変換群で割った商空間，すなわち，合同類全体のなす空間とする．

$\mathcal{M}(M, \bar{M})$ を等長はめ込み $\phi : M \to \bar{M}$ のモジュライ空間と呼ぶ．また，ϕ が全臍的の場合のモジュライ空間を $\tilde{\mathcal{M}}(M, \bar{M}) (\subset \mathcal{M}(M, \bar{M}))$ で表すことにする．

定理 11 (S.)．上記の準備の下，次が成立する．

$$\tilde{\mathcal{M}}\left(\mathbb{M}_s^m(\varepsilon), \mathbb{M}_p^n(\varepsilon)\right) \overset{\text{homeo.}}{\cong}$$
$$\begin{cases} \{\text{pt.}\} & (n = m+1, s \le p \le s+1, \text{or } n = m+2, p \ge s), \\ (X, \mathcal{O}_X) & (n \ge m+2,\ p \ge s+1) \end{cases}$$

ここで，$\varepsilon \in \{0, \pm 1\}$，$(X, \mathcal{O}_X)$ は 2 点集合 $X = \{g, u\}$ に位相構造 $\mathcal{O}_X = \{\emptyset, \{u\}, \{g, u\}\}$ を定めた位相空間で，連結な非 Hausdorff 空間であることに注意する．

系 12 (S.)．$n \ge m+2,\ p \ge s+1, \varepsilon \in \{0, \pm 1\}$ とする．等長はめ込み $\phi : \mathbb{M}_s^m(\varepsilon) \to \mathbb{M}_p^n(\varepsilon)$ のモジュライ空間 $\mathcal{M}(\mathbb{M}_s^m(\varepsilon), \mathbb{M}_p^n(\varepsilon))$ は非 Hausdorff 空間である．

これは，空間形の間の等長はめ込みの完全な分類が，余次元や余指数が高い場合に困難を極める可能性を示唆する．

4. 光錐内の部分多様体

$f : M \to \bar{M}$: 擬 Riemann 多様体へのはめ込みとする．f による誘導計量を g とし，点 $x \in M$ で g_x は退化すると仮定する．このとき，T_xM と $T_x^\perp M$ は非自明な交わりを持ち，

$$\mathrm{Rad}T_xM = \mathrm{Rad}T_x^\perp M = T_xM \cap T_x^\perp M \supsetneqq \{0\}$$

が成立する．しかしながら，この空間の次元は，点 $x \in M$ に依存する．

M が r-光的部分多様体であるとは，対応

$$M \ni x \longmapsto \mathrm{Rad}T_xM \subset T_xM$$

が階数 $r > 0$ の滑らかな接分布 $\mathrm{Rad}TM$ を定めることである．

(M, g) を擬 Riemann 多様体 $(\bar{M}, \bar{g})$ 内の r-光的部分多様体とする．このとき，それぞれ $TM, T^\perp M, f^*T\bar{M}$ の部分束

$$S(TM),\ S(T^\perp M),\ \mathrm{ltr}(TM)$$

が存在して，次を満たす．

$$
\begin{aligned}
TM &= S(TM) \oplus \mathrm{Rad}TM, \\
T^{\perp}M &= S(T^{\perp}M) \oplus \mathrm{Rad}TM, \\
f^{*}T\bar{M} &= TM \oplus \mathrm{tr}(TM).
\end{aligned}
$$

ここで，$\mathrm{tr}(TM) = \mathrm{ltr}(TM) \oplus S(T^{\perp}M)$ である．存在はするが，一意性は全く成立しないことに注意する．ここで得られたベクトル束 $S(TM), S(T^{\perp}M), \mathrm{ltr}(TM), \mathrm{tr}(TM)$ をそれぞれ screen 分布，screen 横断的ベクトル束，光的横断的ベクトル束，横断的ベクトル束と呼ぶことにする．また，外空間 $(\bar{M}, \bar{g})$ の Levi-Civita 接続は，$\bar{\nabla}$ で表す．

注意事項として，擬 Riemann 多様体内の光的部分多様体の研究を行う際は，これらベクトル束の選び方に依らない幾何学的な性質を見抜き，調べなければならない．得られたベクトル束の分解

$$f^{*}T\bar{M} = TM \oplus \mathrm{tr}(TM)$$

を用いて，任意の $X, Y \in \Gamma(TM)$，$V \in \Gamma(\mathrm{tr}(TM))$ に対して，

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)$$

という等式を得ることができる．これを M の Gauss の公式と呼び，∇, h をそれぞれ M 上の誘導接続，第二基本形式と呼ぶ [2]．

これらは，ベクトル束 $S(TM), S(T^{\perp}M), \mathrm{ltr}(TM)$ に依存して決まっている．これは，幾何学的に深刻な状況であるが，次のことが分かっている．

$f : (M, g) \to (\bar{M}, \bar{g})$ を r-光的はめ込みとする．すなわち，M は r-光的部分多様体になっているとする．h をベクトル束 $\{S(TM), S(T^{\perp}M), \mathrm{ltr}(TM)\}$ に関する M の第二基本形式とする．このとき，M が全測地的 r-光的部分多様体であるとは，$h = 0$ を満たすことをいい，M が全臍的 r-光的部分多様体であるとは，ある $\mathcal{H} \in \Gamma(\mathrm{tr}(TM))$ が存在して，$h(X, Y) = g(X, Y)\mathcal{H}$ を満たすことをいう．ここで，$X, Y \in \Gamma(TM)$ である．

これらは，$S(TM), S(T^{\perp}M), \mathrm{ltr}(TM)$ に依存しない幾何学的な条件である [4]．

n 次元光錐は次で定義されていた．

$$\Lambda_p^n := \{x \in \mathbb{R}_{p+1}^{n+1} \setminus \{0\} \mid \langle x, x \rangle_p = 0\}.$$

Λ_p^n は擬 Euclid 空間 $\mathbb{R}_{p+1}^{n+1}$ 内の全臍的 1-光的超曲面である．また，一般に光的超曲面の場合，その screen 分布と光的横断的ベクトル束は一対一対応にある．光錐の任意の光的横断的ベクトル束 $\mathrm{ltr}(T\Lambda_p^n)$ を与える．このとき，次が成立する．

$$T\mathbb{R}_{p+1}^{n+1}|_{\Lambda_p^n} = T\Lambda_p^n \oplus \mathrm{ltr}(T\Lambda_p^n).$$

この分解を用いて，光錐の Gauss の公式を次で定義する．

$$D_{\bar{X}}\bar{Y} = \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \langle \bar{X}, \bar{Y} \rangle_{p+1} N \quad (\bar{X}, \bar{Y} \in \Gamma(T\Lambda_p^n)).$$

ここで，D は $\mathbb{R}_{p+1}^{n+1}$ の Levi–Civita 接続であり，N は $\mathrm{ltr}(T\Lambda_p^n)$ の枠場である．また，$\bar{\nabla}$ を $\mathrm{ltr}(T\Lambda_p^n)$ に関する Λ_p^n 上の誘導接続という．詳細は，Bejancu–Duggal [2] を参照せよ．また，筆者によるテクニカルレポート [14] も存在する．

注意 13. 光錐のGaussの公式は，$\mathrm{ltr}(T\Lambda^n_p)$ の選び方に依存する．

M^m_s を m 次元擬Riemann多様体で，その指数は s であるとする．また，$\phi : M^m_s \to \Lambda^n_p$ を等長はめ込みとする．このとき，M の法束が

$$T^\perp M := \{V \in \Gamma(\phi^* T\Lambda^n_p) \mid \langle V, X\rangle_{p+1} = 0 \ (X \in \Gamma(TM))\}$$

で定まる．このとき，ベクトル束の直交直和分解

$$\phi^* T\Lambda^n_p = TM \oplus T^\perp M$$

が得られる．そこで，$\mathrm{ltr}(T\Lambda^n_p)$ に関する Λ^n_p 上の誘導接続 $\bar\nabla$ を用いて，M 上のGaussの公式を次で定める．

$$\bar\nabla_X Y = \nabla'_X Y + h'(X,Y) \quad (X, Y \in \Gamma(TM)).$$

注意 14. 上記の M 上のGaussの公式で得られる M 上の接続 ∇' はLevi–Civita接続ではない．TM に値を持つ M 上の双線形対称テンソル場 ω を

$$g(\omega(X,Y), Z) = g(X,Y)\langle Z, N\rangle_{p+1}$$

で定め，$\nabla_X Y := \nabla'_X Y + \omega(X,Y)$ とおくと，∇ は M 上のLevi–Civita接続となる．ただし，g は M 上の擬Riemann計量とする．

補題 15 (Beltrami's Formula, [3])**.** $\phi : M^m_s \to \mathbb{R}^n_p$ を等長はめ込みとする．このとき，次が成立する．

$$\triangle_g \phi = -mH.$$

ここで，$\triangle_g$ は ϕ による M 上の誘導計量 g に関するLaplacianであり，H は ϕ の平均曲率ベクトル場である．

$\iota : \Lambda^n_p \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}_{p+1}$ を包含写像とする．$\iota \circ \phi$ による M のGaussの公式を導出すると，次のようになる．

$$D_X Y = \nabla_X Y + \omega(X,Y) + h'(X,Y) - \langle X, Y\rangle_{p+1} N.$$

補題15より，次が従う．

命題 16 (S.)**.** Λ^n_p の光的横断的ベクトル束 $\mathrm{ltr}(T\Lambda^n_p)$ を与えると，M 上の対称双線形テンソル場

$$\omega(X,Y) + h'(X,Y) - \langle X, Y\rangle_{p+1} N$$

が定まるが，この値は $\mathrm{ltr}(T\Lambda^n_p)$ の選び方に依存しない．

光錐内の先行研究として，H. Liuらによる次のものが挙げられる．
- $\Lambda^m_0 \subset \mathbb{R}^{m+1}_1$ 内の曲線·曲面·超曲面論 ([8], [9], [12])．
- $\Lambda^3_0 \subset \mathbb{R}^4_1$ 内の空間的極大曲面論 ([10])．
- $\Lambda^3_1 \subset \mathbb{R}^4_2$ 内の時間的極小曲面論 ([11])．

これら先行研究の中で，(超) 曲面の平均曲率 H を定義しており，スカラー曲率の定数倍になることが示された．すなわち，

$M^2 \subset \Lambda^3_0$: 空間的極大曲面 $\Longleftrightarrow$ M^2 : 平坦曲面．

$M^m \subset \Lambda_0^{m+1}$：空間的極大超曲面 $\Longleftrightarrow$ M^m：スカラー平坦．

更に，[12] では，変分法による観点からも研究がなされている．

以下，$n = m+1$ の場合を考える (すなわち，超曲面)．ϕ の平均曲率 H を

$$H = \frac{1}{m}\langle \triangle_g \phi, \triangle_g \phi \rangle_{p+1}$$

で定める．定義より，H は $\mathrm{ltr}(T\Lambda_p^n)$ の選び方に依存しない．

等長はめ込み $\phi : M_p^m \to \Lambda_p^{m+1}$ が平均曲率零であるとは，$H = 0$ を満たすことをいう．これは，Liu の定義を包含することが示せ，一般化や拡張に相当する．

系 17 (S.)**.** $(\mathbb{S}^m(r^2) \times \mathbb{S}^m(r^2), -g_{\mathrm{st}} \times g_{\mathrm{st}}), (\mathbb{H}^m(-r^2) \times \mathbb{H}^m(-r^2), -g_{\mathrm{st}} \times g_{\mathrm{st}})$ は Λ_m^{2m+1} への極小等長はめ込みを持つ．ここで，g_{st} はそれぞれ包含写像による標準計量を意味する．また，擬 Riemann 空間形の直積 $\mathbb{S}_p^m(r^2) \times \mathbb{H}_q^m(-r^2)$ もまた Λ_{p+q}^{2m+1} への極小等長はめ込みを持つ．

参考文献

[1] H. Anciaux, *Minimal submanifolds in pseudo-Riemannian geometry,* World Scientific (2011).

[2] A. Bejancu, K. L. Duggal, *Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and applications*, Kluwer Academic Publishers (1996).

[3] B. Y. Chen, *Pseudo-Riemannian geometry, δ-invariants and applications*, World Scientific, (2011).

[4] K. L. Duggal and D. H. Jin, *Totally umbilical lightlike submanifolds*, Kodai Math. J. **26** (2003), no. 1, 49–68.

[5] M. A. Magid, *Isometric immersions of Lorentz space with parallel second fundamental forms*, Tsukuba J. Math. **8** (1982), 31–54.

[6] S. S. Ahn, D. S. Kim and Y. H. Kim, *Totally umbilical Lorentzian submanifolds*, J. Korean Math. Soc. **33** (1996), 507–512.

[7] J. Erbacher, *Reduction of the codimension of an isometric immersion*, J. Differential Geom. **10**, 253–276, (1975).

[8] H. Liu, *Curves in the lightlike cone*, Contrib. Algebr. Geom., **45**, (2004), 291–303.

[9] H. Liu, *Surfaces in the lightlike cone*, J. Math. Anal. Appl., **325**, (2007), 1171–1181.

[10] H. Liu, *Representation of surfaces in* 3*-dimensional lightlike cone*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, **18**, (2011), 737–748.

[11] H. Liu, *Timelike surfaces in* 3*-dimensional lightlike cone*, J. Math. Anal. Appl., **393**, (2012), 605–613.

[12] H. Liu, S. D. Jung, *Hypersurfaces in lightlike cone*, J. Geom. Phys. **58**, (2008), 913–922.

[13] H. Sachs, *Isotrope Geometrie des Raumes*, Vieweg, Braunschewig/Wiesbaden (1990).

[14] 佐藤 雄一郎, 擬リーマン空間形内の全測地的光的部分多様体, 第 15 回数学総合若手研究集会 数学の交叉点 テクニカルレポート, (2019).

[15] O. C. Stoica, *On singular semi-Riemannian manifolds*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. **11**, (2014), no. 5, 1450041.