非コンパクト型対称空間内の弱鏡映等質超曲面 *

権藤 暁則 (広島大学理学研究科)†

1 Introduction

対称空間内の等質部分多様体は, 部分多様体論における基本的な研究テーマであり, 興味深い部分多様体の例を豊富に供給する. その中でも等質超曲面は比較的扱いやすい対象であり, 分類問題や幾何的性質の研究が盛んに行われている. 本稿では, 部分多様体の弱鏡映性に着目し, その分類問題にアプローチする. 弱鏡映部分多様体とは, Ikawa–Sakai–Tasaki により導入された Riemann 部分多様体のクラスであり, 次で定義される.

定義 1.1 ([6])**.** Riemann 多様体 $\overline{M}$ の部分多様体 M が弱鏡映部分多様体であるとは, 次が成り立つこと: 各点 $p \in M$ と, p における各法ベクトル $v \in T_p^{\perp}M$ に対し, $\overline{M}$ の等長変換 $\sigma \in \mathrm{Isom}(\overline{M})$ が存在して, 次を満たす:

$$\sigma(p) = p, \quad \sigma(M) = M, \quad (d\sigma)_p v = -v.$$

弱鏡映部分多様体は, 鏡映部分多様体の一つの一般化であり, さらに他の部分多様体と比較して, 次のような位置づけにある.

$$\begin{array}{ccc}
\text{鏡映部分多様体 ([7])} & \Rightarrow & \text{全測地的部分多様体} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\underline{\text{弱鏡映部分多様体}} & \Rightarrow & \text{austere 部分多様体 ([5])} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\text{arid 部分多様体 ([9])} & \Rightarrow & \text{極小部分多様体}
\end{array}$$

この図の左の列は部分多様体の normalizer による作用の性質, 右の列は部分多様体の主曲率の性質によって定義される.

本稿は, 非コンパクト型対称空間内の等質超曲面に焦点を当て, 弱鏡映等質超曲面の構成, 分類を紹介することを目的とする. コンパクト型対称空間の場合には, 線型イソトロピー表現や Hermann 作用による軌道の弱鏡映性の研究がおこなわれており, 具体例の構成や分類が進んでいる. しかし, 非コンパクト型対称空間の場合は, 群作用の様相がコンパクト型対称空間の場合と大きく異なり, 同様の手法を用いることが困難であるため, 別の手法を構築する必要がある. 特に大きな問題とな

---

* RIMS 研究集会「部分多様体論の諸相と他分野との融合」講究録

† E-mail : akinori-gondou@hiroshima-u.ac.jp

るのは, 全ての軌道が互いに合同な cohomogeneity one 作用が連続的に存在することである (本稿では type (N)-作用と呼んでいる).

本稿では, type (N)-作用の軌道が弱鏡映となるための必要条件を与える (定理 4.4). 低階数の既約対称空間の場合にこの条件を満たす軌道の分類を行ったところ, 階数 3 以下の場合には, そのような軌道は全て弱鏡映となることが分かった. 特に, 階数 3 以下の既約非コンパクト型対称空間内の弱鏡映等質超曲面を完全に分類した (定理 3.1). さらに, 対称空間 $\mathrm{SL}_5(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(5)$ においては, austere であって弱鏡映でないような等質超曲面の具体例が得られた (詳細は 5 章で紹介する).

なお本稿は, 執筆中の論文 [3] の内容のアナウンスである.

2 準備

Riemann 多様体内の等質超曲面は, cohomogeneity one 作用の正則軌道とみなすことができる. cohomogeneity one 作用は以下で定義される.

定義 2.1. Riemann 多様体への等長作用が cohomogeneity one であるとは, 正則軌道 (最大次元の軌道) が余次元 1 となること.

対称空間への cohomogeneity one 作用は分類が進んでおり, 非コンパクト型の場合には次のことが知られている.

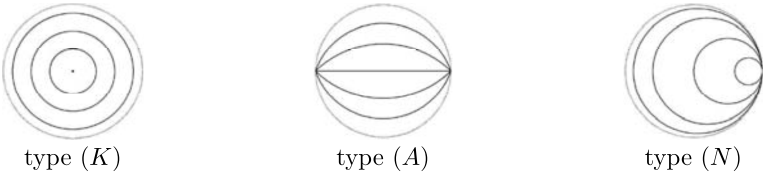
定理 2.2 ([1], [2])**.** 連結 Lie 群による既約非コンパクト型対称空間への cohomogeneity one 作用は, 次のいずれか一つを満たす (このような作用を type (K), (A), (N)-作用と呼ぶことにする).

type (K)　唯一つの特異軌道を持つ.
type (A)　全ての軌道は正則で, 唯一つの極小軌道を持つ.
type (N)　全ての軌道は正則で, 互いに合同である.

例えば, 実双曲平面 $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$ について,

$$K = \mathrm{SO}(2), \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a > 0 \right\}, \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$$

とすると, 岩澤分解 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = KAN$ が得られるが, K, A, N の $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ への作用はそれぞれ type (K), (A), (N)-作用である. 図示すると次のようになる.



type (K)　　type (A)　　type (N)

一般の既約非コンパクト型対称空間に対しては, type (A), (N)-作用については Berndt–Tamaru

によって分類が完成しており, 各対称空間に対して type (A)-作用は有限個, type (N)-作用は一般に非可算無限個存在することが知られている ([2]).

注意 2.3. 異なる type の作用の軌道は互いに合同とならない.

3 主結果

今回, 各 type (K), (A), (N)-作用の軌道の弱鏡映性を調べ, 弱鏡映な等質超曲面の分類を行った. 次が本稿の主結果である.

定理 3.1. 低階数の既約非コンパクト型対称空間 M 内の弱鏡映な等質超曲面の個数は以下のようになる.

表 1　弱鏡映等質超曲面の個数 (合同なものは除く)

	type (K)	type (A)	type (N)	Total
$\Sigma(M) = A_1$ のとき	0	1	0	1
$\Sigma(M) = A_2$ のとき	0	1	1	2
$\Sigma(M) = B_2, C_2, BC_2, G_2$ のとき	0	2	0	2
$\Sigma(M) = A_3$ のとき	0	2	1	3
$\Sigma(M) = B_3, C_3, BC_3$ のとき	0	3	0	3
$\Sigma(M) = A_4$ のとき	0	2	∞	∞
$\Sigma(M) = D_4$ のとき	0	2	1	3

ただし, $\Sigma(M)$ は M の制限ルート系とする.

注意 3.2. M が低階数の場合には, 弱鏡映等質超曲面の個数は M の制限ルート系 $\Sigma(M)$ のみによって決まる. 高階数でも同様のことがいえるかどうかはまだ分かっていない.

例えば, 対称空間 $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$ (制限ルート系は A_2 型) において,

$$H_1 := \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{SL}_3(\mathbb{R}), \quad H_2 := \left\{ \begin{pmatrix} a & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$$

による作用はそれぞれ type (A), type (N)-作用であり, 各々の原点軌道は弱鏡映等質超曲面となる. 逆に, 対称空間 $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$ 内の弱鏡映等質超曲面は, H_1, H_2 のいずれかの作用による原点軌道と合同となる.

4　主結果の証明の概略

主結果の証明は, type (K), (A), (N) に分けて行う．type (K)-作用の正則軌道, type (A)-作用の極小でない軌道が弱鏡映にはなりえないことはすぐに分かる．type (A)-作用の極小軌道が弱鏡映となることは, ルート空間分解を用いて比較的容易に示すことが出来る (cf.[4])．本稿では, 弱鏡映軌道を持つ作用の分類が特に難しい type (N)-作用に焦点を当て, 分類の手法を紹介する.

以下, $M = G/K$ を既約非コンパクト型対称空間, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ を岩澤分解とする．このとき, $\mathfrak{s} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ は $\mathfrak{g}$ 内の部分 Lie 環であり, 対応する G の部分 Lie 群 S は M に単純推移的に作用する. M への type (N)-作用は, S の然るべき余次元 1 部分 Lie 群による作用として実現できる.

定理 4.1 ([2])**.** $\xi \in \mathfrak{a}$, $\mathfrak{s}_\xi := (\mathfrak{a} \ominus \mathbb{R}\xi) \oplus \mathfrak{n}$ とする．ここで, $\ominus$ は $\mathfrak{g}$ の Killing 形式に関する直交補空間を表す．このとき, $\mathfrak{s}_\xi$ に対応する G の連結部分 Lie 群 S_ξ による M への作用は type (N)-作用であり, 逆に全ての type (N)-作用は軌道同値なものを除いてこの方法で得られる.

以下では, 各 $\xi \in \mathfrak{a}$ に対し, S_ξ-作用による原点軌道 $S_\xi.\mathfrak{o}$ の弱鏡映性を調べる．まず, $S_\xi.\mathfrak{o}$ が弱鏡映となる十分条件を与える．M の制限ルート系に関する Dynkin 図形の自己同型が与えられたとき, そこから $\mathfrak{a}$ 上の直交変換 P が自然に誘導される．これを用いて次の十分条件が得られる.

補題 4.2. Dynkin 図形の自己同型が存在して, そこから得られる $\mathfrak{a}$ 上の直交変換 P が $P(\xi) = -\xi$ を満たすならば, $S_\xi.\mathfrak{o}$ は弱鏡映である.

従って, M の制限ルート系が $A_n (n \geq 2), D_n (n \geq 4), E_6$ のときはこの方法で弱鏡映等質超曲面を構成することができる.

次に, $S_\xi.\mathfrak{o}$ が弱鏡映となるための必要条件を与える．一般に, 弱鏡映部分多様体は austere 部分多様体であるから, あらかじめ austere となるものを分類し, それらの弱鏡映性を調べれば良いことが分かる．M の $\mathfrak{o}$ における接空間 $T_\mathfrak{o}(M)$ を $\mathfrak{s}$ と同一視すると, ξ は $S_\xi.\mathfrak{o}$ の法ベクトルとみなせる．ξ に関するシェイプ作用素 A_ξ の性質として次が成り立つ.

補題 4.3 ([2])**.** $A_\xi = \mathrm{ad}_\xi$.

これとルート空間分解を用いると, 比較的容易に austere 性を調べることが出来る.

次に, austere であって弱鏡映でない部分多様体を識別するために, より強い判定条件を与える. Σ を M の制限ルート系, Λ を単純ルート系とし, 次のように記号を設定する.

- $\Phi_\xi := \{\alpha \in \Lambda \mid \alpha(\xi) = 0\}$.
- 各 $\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_r\alpha_r \in \Sigma \cup \{0\}$ に対し, $\mathrm{Lv}_\xi(\alpha) := \sum_{\alpha_i \in \Lambda \setminus \Phi_\xi} c_i$.
- $\mathfrak{g}^i := \bigoplus_{\mathrm{Lv}_\xi(\alpha)=i} \mathfrak{g}_\alpha$ ($\mathfrak{g}_\alpha$ は α のルート空間).

このとき, $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_{>0}} \mathfrak{g}^i$ は $\mathfrak{s}_\xi$ 内の部分 Lie 環であり, 補題 4.3 より, A_ξ はこの直和分解を保つ．これを用いて, 次の必要条件が得られる.

定理 4.4. 上記の設定のもと, $S_\xi.\mathfrak{o}$ が弱鏡映のとき, 各 $A_\xi|_{\mathfrak{g}^i} : \mathfrak{g}^i \to \mathfrak{g}^i$ は austere.

各対称空間に対してこれらの十分条件, 必要条件を適用することで定理 3.1 の分類が得られる.

定理 4.4 により, austere であるが弱鏡映でないような等質超曲面の例は多数得られているが, この定理の逆の反例は現時点では見つかっていない. この必要条件の十分性を調べることや, 階数 4 以上の対称空間内の弱鏡映等質超曲面を分類することは今後の課題である.

5　Example : $\mathrm{SL}_5(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(5)$ の場合

この章では, 簡単な例として $\mathrm{SL}_5(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(5)$ への type (N)-作用であって, 軌道が弱鏡映となるものを具体的に構成, 分類する. この場合, 制限ルート系は A_4 型である. 単純ルート系を $\Lambda := \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ とし, 対応する $\mathfrak{a}$ の双対基底を $\{H^1, H^2, H^3, H^4\}$ とおく. $\mathrm{SL}_5(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(5)$ への type (N)-作用であって, austere となるものを分類すると, 以下のようになる.

命題 5.1. $\xi = aH^1 + bH^2 - bH^3 - aH^4, 2H^1 - 2H^3 + H^4, 2H^1 - H^2 - H^3 + H^4$ のとき, $S_\xi.\mathfrak{o}$ は austere である. 逆に, $\mathrm{SL}_5(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(5)$ への type (N)-作用であって, 軌道が austere となるものは, 軌道同値なものを除いてこれで全て得られる.

これらのうち, $\xi = 2H^1 - 2H^3 + H^4, 2H^1 - H^2 - H^3 + H^4$ のときは定理 4.4 の条件を満たさないため, $S_\xi.\mathfrak{o}$ は austere であるが弱鏡映でない. 残りの $\xi = aH^1 + bH^2 - bH^3 - aH^4$ の場合は, 補題 4.2 を用いて $S_\xi.\mathfrak{o}$ の弱鏡映性が示される. 以上より次が従う:

命題 5.2. $\xi = aH^1 + bH^2 - bH^3 - aH^4$ のとき, $S_\xi.\mathfrak{o}$ は弱鏡映である. 逆に, $\mathrm{SL}_5(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(5)$ への type (N)-作用であって, 軌道が弱鏡映となるものは, 軌道同値なものを除いてこれで全て得られる.

この例では, 弱鏡映等質超曲面が連続的に存在する. これは非コンパクト型対称空間の場合の特有のものであり, コンパクト型対称空間では起こりえない現象である.

参考文献

[1] J. Berndt and M. Brück, *Cohomogeneity one actions on hyperbolic spaces*, J. Reine Angew. Math. **541** (2001), 209–235.

[2] J. Berndt and H. Tamaru, *Homogeneous codimension one foliations on noncompact symmetric spaces*, J. Differential Geom. **63** (2003), no. 1, 1–40.

[3] A. Gondo, *Weakly reflective homogeneous hypersurfaces in noncompact symmetric spaces*, in preparation.

[4] T. Hashinaga, A. Kubo and H. Tamaru, *Some topics of homogeneous submanifolds in complex hyperbolic spaces*. Differential geometry of submanifolds and its related topics,

230–244, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2014.

[5] R. Harvey and H. B. Lawson, Jr., *Calibrated geometries*, Acta Math. **148** (1982), 47–157.

[6] O. Ikawa, T. Sakai and H. Tasaki, *Weakly reflective submanifolds and austere submanifolds*, J. Math. Soc. Japan **61** (2009), no. 2, 437–481.

[7] D. S. P. Leung, *The reflection principle for minimal submanifolds of Riemannian symmetric spaces*, J. Differential Geometry **8** (1973), 153–160.

[8] S. Ohno, *A sufficient condition for orbits of Hermann actions to be weakly reflective.* Tokyo J. Math. **39** (2016), no. 2, 537–564.

[9] Y. Taketomi, *On a Riemannian submanifold whose slice representation has no nonzero fixed points*, Hiroshima Math. J. **48** (2018), no. 1, 1–20.