

# 平均曲率零曲面上の光的点について

名古屋大学大学院多元数理科学研究科\* 赤嶺 新太郎†

Shintaro Akamine

Graduate School of Mathematics, Nagoya University

## 1 序

古くから研究されてきたユークリッド空間  $\mathbb{E}^{n+1}$  内の極小超曲面と近年活発に研究されているミンコフスキー空間  $\mathbb{L}^{n+1}$  内の極大超曲面はともに空間内で平均曲率が恒等的に零になり、正定値計量を持つ超曲面である。両者の間には様々な類似性や関係があるが、とくに2次元の曲面に対しては、Calabi [7] によって極小曲面と極大曲面の間にある種の一対一対応が構成され、Bernstein 型の問題「全平面上の関数のグラフとして書かれる極小曲面（極大曲面）は平面に限るか」といった問題を解くことの同値性が指摘された。

一方で、 $\mathbb{L}^{n+1}$  内の Bernstein 型の問題は一般の次元  $n$  で肯定的に解決することが Calabi [7], Cheng-Yau [8] によって示されている。このことは、 $\mathbb{E}^{n+1}$  内の極小超曲面に対する Bernstein の定理が  $n = 8$  以上では成立しないという Bombieri-De Giorgi-Giusti [6] の結果を踏まえると、極小超曲面と極大超曲面は一般次元では異なった様相を呈することを意味している。さらに、ミンコフスキー空間内の曲面の上には、曲面がはめ込まれた部分多様体にならない点である特異点や、滑らかな曲面上の点ではあるが誘導計量が退化してしまう光的点と呼ばれる点が頻繁に現れる。とくに、ある種の極大曲面は非退化ナル曲線と呼ばれる光的点集合に沿ってローレンツ計量を備えた平均曲率が零の曲面（時間的極小曲面）に実解析的に延長されることが知られており（2.2 節参照）、 $\mathbb{L}^{n+1}$  内で平均曲率が恒等的に零となる超曲面を考える際には、誘導計量の符号数が光的点集合を越えて変化することを加味することがしばしば重要になる。

本稿では、そのような極大超曲面とは限らないが  $\mathbb{L}^{n+1}$  内で平均曲率が恒等的に零になる超曲面である**平均曲率零超曲面** (zero mean curvature hypersurface, 本稿では **ZMC 超曲面** と略記する) の光的点に関する研究結果として、下記の研究結果を報告する：

- ZMC 超曲面に対する計量の退化を許容した Bernstein 型の定理 (3 節),
- 完備な光的直線を含む極大埋め込みの構成 (4 節),

---

\*〒464-8602 愛知県名古屋市千種区不老町

†E-mail: s-akamine@math.nagoya-u.ac.jp

本稿の内容は、東京工業大学の梅原雅顕氏、山田光太郎氏との共同研究 [3, 4]、梅原氏-山田氏と横浜国立大学の本田淳史氏との共同研究 [2] に基づく。

## 2 平均曲率零曲面と光的点

### 2.1 曲面の計量の符号数に依らない平均曲率零曲面の定義

符号  $(+, +, \dots, +, -)$  の  $(n+1)$  次元ローレンツ・ミンコフスキー空間を  $\mathbb{L}^{n+1}$  とする。  $U$  を  $\mathbb{R}^n$  の領域として、はめ込み  $F: U \rightarrow \mathbb{L}^{n+1}$  を考える。  $U$  上の点  $p$  が空間的、時間的、光的であるとは、それぞれ  $F$  による  $\mathbb{L}^{n+1}$  の誘導計量が  $p$  上で正定値、不定値、退化している場合をいう。  $U$  上のすべての点が空間的、時間的、あるいは光的であるとき、  $F$  およびそれが定める超曲面  $S$  を空間的、時間的、光的であるといい、そのような性質を超曲面の因果的特性という。本稿では主に、はめ込み  $F$  が  $C^2$  級関数  $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  を用いて、次のグラフ表示

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

で表されている場合を考える。関数  $B_f$  と  $A_f$  を次で定める：

$$B_f := 1 - f_{x_1}^2 - \dots - f_{x_n}^2, \quad A_f := \sum_{i,j=1}^n (B_f \delta_{i,j} + f_{x_i} f_{x_j}) f_{x_i x_j},$$

ここで、  $f_{x_i} := \partial f / \partial x_i$ 、  $f_{x_i x_j} := \partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$  であり、  $\delta_{i,j}$  はクロネッカーの記号を表す。すると、点  $p = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  が空間的（または時間的、光的）であることは、  $B_f(p) > 0$ （または  $B_f(p) < 0, B_f(p) = 0$ ）で特徴付けられる。空間的な点、または時間的な点からなる領域上ではそれぞれ平均曲率が定義され、  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  のグラフで表される曲面  $S$  の平均曲率が零であることと  $A_f = 0$  であることが同値になることから、次のように ZMC 超曲面を定める。

**定義 1.** 関数  $f$  のグラフが **ZMC 超曲面** であるとは、  $U$  上で  $A_f = 0$  を満たすことをいう。

このように ZMC 超曲面を定義すると、光的点の近傍では超曲面は常に時間方向を高さ関数とするグラフとして表されるため、結局、  $\mathbb{L}^{n+1}$  内のはめ込まれた超曲面に対して、ZMC 超曲面であるということが定式化され、とくに、局所的に  $x_1 x_2 \dots x_n$ -平面全体の上で定義された関数のグラフで表される超曲面に対しては、曲面の計量の符号数に依らずに ZMC 超曲面であるという性質が定式化できる。空間的な ZMC 超曲面、時間的な ZMC 超曲面はそれぞれ**極大超曲面**、**時間的極小超曲面**と呼ばれる。また、  $\Delta f := \sum_{i=1}^n f_{x_i x_i}$ 、  $\nabla B_f := ((B_f)_{x_1}, \dots, (B_f)_{x_n})$  および  $\cdot$  をユークリッド内積とすると、

$$A_f = B_f \Delta f - \frac{1}{2} \nabla B_f \cdot \nabla f$$

が成り立つことから光的な超曲面も ZMC 超曲面になっている (cf. [25])。

同様に、  $U$  上である実数  $k$  を用いて  $A_f^2 - kB_f^3 = 0$  となるような超曲面を**平均曲率一定超曲面** (constant mean curvature hypersurface, **CMC 超曲面**) と呼ぶ。

## 2.2 平均曲率零曲面の計量の退化現象

超曲面上で計量が退化する点である光的点に対して、その退化性を次のように定義する。

**定義 2.** 領域  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  上で定義された  $C^2$  級の関数  $f$  のグラフが超曲面を定めているとする。光的点  $p \in \Omega$  が**非退化**であるとは、 $\nabla B_f(p) = ((B_f)_{x_1}(p), (B_f)_{x_2}(p), \dots, (B_f)_{x_n}(p)) \neq 0$  を満たすときをいう。非退化でない光的点を**退化した光的点**と呼ぶ。

定義により、非退化な光的点では  $(B_f)_{x_i}(p) \neq 0$  なる方向  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) が存在し、この方向に沿って超曲面は空間的から時間的に因果的特性が変化する (図 1 左)。このように一つの曲面上で空間的、時間的、光的な点を持つ曲面を**混合型曲面**と呼ぶ。  $\mathbb{L}^3$  内の混合型 ZMC 曲面に対しては、因果的特性が変化する光的点集合は  $\mathbb{L}^3$  の**非退化ナル曲線** (ナル曲線は**等方的曲線**ともいう)、すなわち  $\gamma'$  が光的で  $\gamma'$  と  $\gamma''$  がどの点でも一次独立になるような正則曲線  $\gamma$  で助変数表示されることが知られている。さらに「与えられたナル曲線の特異点集合の像として持つような ZMC 曲面を構成せよ」という特異 Björling 問題の観点から、非退化ナル曲線のみを用いて混合型曲面の空間的な部分と時間的な部分を記述する表現公式も知られている (cf. [14, 19, 20])。実際、与えられた実解析的な非退化ナル曲線  $\gamma = \gamma(s)$  に対して、 $\gamma$  の解析接続を  $\gamma(s + it)$  として、

$$F_{\max}(s, t) := \frac{\gamma(s + it) + \gamma(s - it)}{2}, \quad F_{\min}(s, t) := \frac{\gamma(s + t) + \gamma(s - t)}{2}$$

なる写像を考えると、 $F_{\max}, F_{\min}$  はそれぞれ  $t = 0$  で特異点<sup>\*1</sup>を持つ極大曲面、時間的極小曲面となり、 $F_{\max}(s, 0) = F_{\min}(s, 0) = \gamma(s)$  を満たす。さらに  $F_{\max}, F_{\min}$  の像は  $\gamma$  の像に沿って実解析的に繋がっていることが知られている。



図 1 非退化な光的点を持つ混合型 ZMC 曲面 (左) と、退化した光的点を持つ ZMC 曲面 (右)。

一方で、退化した光的点の周りの曲面の挙動としては次の事実が知られている (図 1 右参照)。

**事実 3** (ZMC 超曲面に関する直線定理 [20, 25]). 領域  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  上で定義された  $C^3$  級の関数  $f$  のグラフが ZMC 超曲面を定めているとする。もし、 $o \in \Omega$  が退化した光的点であれば、 $o \in \Omega$  を通

<sup>\*1</sup> 定義から  $F_{\max}$  と  $F_{\min}$  は  $F_{\max}(s, -t) = F_{\max}(s, t)$  および  $F_{\min}(s, -t) = F_{\min}(s, t)$  を満たす。  $t = 0$  となる点は**折り目特異点**と呼ばれている。

り, 退化した光的点からなる線分  $\sigma \subset \mathbb{R}^n$  が存在し,  $\{(x, f(x)) \mid x \in \sigma\}$  は  $\mathbb{L}^{n+1}$  内の光的線分になる.

事実 3 は,  $n = 2$  の場合に Klyachin [20] が  $C^3$  級の ZMC グラフに対して証明し, その後, 梅原-山田 [25] により, 光的直線を光的測地線に置き換えると任意の次元のローレンツ多様体内の超曲面に対しても主張が成り立つことが示された. さらに [25] では, 実解析的な CMC 超曲面に対しても上記の直線定理が成り立つことが示されている. 上述の非退化ナル曲線の場合とは異なり, 与えられた光的線分を持つような ZMC 超曲面の一般的な構成方法は知られていないが, [1, 11, 13, 17, 24] などの文献で光的線分を持つ ZMC 曲面の例が数多く構成されている.

### 3 Bernstein 型定理

この節では ZMC 超曲面に関する大域的な結果として, Bernstein 型の定理とその拡張について述べる. 2.1 節で述べたように空間的な点のみを許容する ZMC 超曲面は極大超曲面と呼ばれる. 極大超曲面の大域的な性質として, 次の Bernstein 型の定理が知られている.

**事実 4** ([7], [8]). 超平面  $\mathbb{R}^n$  の上で定義された上で定義された関数のグラフとなっている極大超曲面は超平面に限る.

Calabi [7] は事実 4 を 5 次元以下のミンコフスキー空間  $\mathbb{L}^{n+1}$  ( $n \leq 4$ ) 内の極大超曲面に対して証明し, その後, Cheng-Yau [8] により一般の次元で主張が正しいことが証明された.

今回, 本田氏-梅原氏-山田氏との共同研究 [2] で, 事実 4 の次のような拡張を得た.

**定理 5** ([2]). 超平面  $\mathbb{R}^n$  の上で定義された  $C^3$  級関数のグラフとなっている ZMC 超曲面が時間的な点を持たなければ, それは超平面になる.

ZMC 曲面が空間的な点のみを持つ場合は, 定理 5 は事実 4 に他ならない. また, この定理において, 時間的な点を持たないという仮定は本質的なものである. 実際, 関数

$$f_0(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) := x_n + g(x_1), \quad g = g(t) \text{ は } \mathbb{R} \text{ 上の一変数 } C^2 \text{ 級関数} \quad (3.1)$$

のグラフを考えると, これは空間的な点を持たない全超平面上で定義された関数のグラフとなる ZMC 超曲面を定める. また, 混合型 ZMC 曲面については, 小林 [21] によって全平面上で定義された以下の関数のグラフとなっている非自明な混合型 ZMC 曲面が与えられた.

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 \tanh x_2, \quad f_2(x_1, x_2) = \log(\cosh x_1 / \cosh x_2)$$

図 1 左の混合型曲面は  $f_1$  のグラフを表しており, **第二種ヘリコイド**または**双曲的ヘリコイド**と呼ばれる\*2. その後, [12] で**小林曲面**と呼ばれる全平面上の関数のグラフとして表される混合型

\*2  $f_1, f_2$  の双曲線関数  $\tanh, \cosh$  をそれぞれ三角関数  $\tan, \cos$  に取り替えると, これらはヘリコイド, Scherk 曲面 (の一部) を表す極小曲面方程式の解になる. 曲面にある種の対称性があると, このように  $x, y$  座標を  $ix, iy$  に取り替えるという操作 (Wick 回転) を施すことで, 極小曲面方程式の解から ZMC 方程式の解を作ることができる.

ZMC グラフが多く構成されている。

また、 $\mathbb{L}^3$  内の曲面に対しては、定理 5 より強い次の主張が成り立つことが梅原氏-山田氏との共同研究 [3] でわかった。

**定理 6** ([3]). 全平面  $\mathbb{R}^2$  上で定義された  $C^3$  級関数のグラフとなっている  $\mathbb{L}^3$  内の ZMC 曲面  $S$  が空間的点を持つとする。  $S$  が平面でなければ、  $S$  上には非退化な光的点が存在する。

この定理から平面でない ZMC 曲面で全平面上で定義された関数のグラフとなっているものは、必ず図 1 左の曲面のように混合型曲面になっていることがわかる。定理 6 は、**流体力学的双対性**と呼ばれる対応を用いて、ある種の 2 次元流体を介することで極大曲面に対応する  $\mathbb{E}^3$  内の極小曲面を構成し、それを考察することで証明される。詳しくは [3] を参照されたい。

定理 5 より、計量が退化した曲面である光的超曲面に関する次の Bernstein 型の定理を得る。

**系 7** ([2]). 超平面  $\mathbb{R}^n$  の上で定義された  $C^2$  級関数のグラフとなっている光的超曲面は超平面に限る。

ここで、光的超曲面が ZMC 超曲面であること、光的超曲面に関する直線定理が  $C^2$  級で成立すること (cf. [25, Corollary B]) を用いている。[5] では、系 7 と同様の結論が「光的超曲面の光的平均曲率が恒等的に零になる」という仮定の下で示されている。

さらに、CMC 超曲面に対しても次が成り立つ。

**系 8** ([2]). 超平面  $\mathbb{R}^n$  の上で定義された実解析的な関数のグラフとなっている時間的点を持たない CMC 超曲面は光的点を含めば、それは光的超平面になる。

系 8 は、直線定理 (事実 3) が実解析的な CMC 超曲面に対しても成り立つこと、および [18, 25] によって示された“実解析的な CMC 超曲面の光的点はすべて退化した光的点であり、混合型 CMC 超曲面は存在しない”という結果を用いると、定理 5 の証明と全く同じ手法で証明できる。また、系 8 において、光的点を持つというのは本質的な仮定である。実際、全超平面上で定義された関数のグラフとなっている空間的 CMC 超曲面が存在することが知られている (cf. [23])。

## 4 完備な光的直線を含む埋め込まれた極大曲面の存在

定理 5 の証明では、全超平面上のグラフとなっている ZMC 超曲面が時間的な点を許容しなければ、正、負どちらの時間方向にどこまでも伸びているような光的直線 (本稿ではそのような線分でない光的直線のことを**完備な光的直線**と呼ぶ) を持つことを直線定理を用いて示すことが肝要となる。さらに、Ecker [9, Proposition G], Fernandez-Lopez [10, Lemma 2.1] と同様のアイデアを用いることで、次の補題を証明できる。

**補題 9** ([2], cf. [9, 10]).  $\mathbb{R}^n$  の凸領域  $\Omega$  の閉包  $\overline{\Omega}$  上の ZMC グラフとして表される超曲面  $S$  が時間的な点を持たないとする。  $S$  が完備な光的直線を含むのであれば、それは光的超平面になる。

この補題により、平面でない ZMC グラフは時間的な点を持たない部分で完備な光的直線を含み辛いことがわかる。より正確には、ZMC グラフが完備な光的直線  $L$  の近傍で時間的な点を含まなければ、グラフの定義域の凸性を崩すように  $L$  の無限遠方に別の光的点が集積することがわかる。一方で、完備な光的直線を含むようなグラフとは限らない極大曲面を考えてみると、[1, 13, 21] などの論文で構成されているそのような例はすべて光的直線上に**特異点**（写像がはめ込みでなくなる点）を含んでいる（図 2）。時間的な点を持たない埋め込まれた（特異点を持たない）極大曲面で完備な光的直線  $L$  を含むものは、存在するだろうか。



図 2 完備な光的直線を含む極大曲面の例。これらの例は光的直線上に特異点を持っている。

梅原氏-山田氏との共同研究 [4] では、そのような曲面が実際に存在することを証明した。

**定理 10** ([4]).  $\mathbb{L}^3$  内に実解析的に埋め込まれた極大曲面で完備な光的直線を含むものが存在する。ここで、極大曲面が光的直線  $L$  を含むとは、 $L$  を除いた部分で ZMC 曲面が空間的であることをいう。

**注意 11.** これまでに、完備な光的直線  $L$  を含み、 $L$  の少なくとも片側では時間的な領域となる埋め込まれた ZMC 曲面が存在することは知られていた。空間的な点を含まない例として式 (3.1) のグラフなどがある。さらに最近、橋本-加藤 [17] によって、 $\mathbb{L}^3$  内の埋め込まれた混合型 ZMC 曲面で完備な光的直線を含むものが構成されている。

定理 10 は以下のような方針で証明することができる：

- (1) [11] で用いられた手法を用いて、光的線分  $\tilde{L} \subset \mathbb{L}^3$  を含む極大曲面のグラフ関数を形式的冪級数として考え、その冪級数の局所的な収束を示す。
- (2) その後、 $\tilde{L}$  が直線全体  $L$  に伸びるまで、(1) の収束冪級数解を貼り合わせることを証明する。

また、定理 10 の高次元版として、次が証明できる。

**系 12** ([4]).  $\mathbb{L}^{n+1}$  に実解析的に埋め込まれた極大超曲面で  $(n-1)$  次元光的平面全体を含むものが存在する。

定理 10 で存在を証明した曲面は光的直線  $L$  の方向にはどこまでも伸びているが、 $L$  から離れた

部分での挙動はわからないことに注意しておく。そのため「定理 10 が固有に埋め込まれた極大曲面に対して成り立つか」という次の問題が残っている。

**問 13.**  $\mathbb{L}^3$  内に固有\*3に埋め込まれた (properly embedded) 極大曲面で、完備な光的直線を含むものは存在するか。

## 謝辞

研究集会「部分多様体論の諸相と他分野との融合」における講演の機会、および本稿の執筆の機会を与えてくださった佐賀大学の庄田敏宏先生に心より御礼申し上げます。

## 参考文献

- [1] S. Akamine, *Causal characters of zero mean curvature surfaces of Riemann type in Lorentz-Minkowski 3-space*, Kyushu J. Math., **71** (2017), 211-249.
- [2] S. Akamine, A. Honda, M. Umehara and K. Yamada, *Bernstein-type theorem for zero mean curvature hypersurfaces without time-like points in Lorentz-Minkowski space*, preprint, arXiv:1907.01754.
- [3] S. Akamine, M. Umehara and K. Yamada, *Improvement of the Bernstein-type theorem for space-like zero mean curvature graphs in Lorentz-Minkowski space using fluid mechanical duality*, to appear in Proc. Amer. Math. Soc., arXiv:1904.08046.
- [4] S. Akamine, M. Umehara and K. Yamada, *Space-like maximal surfaces containing entire null lines in Lorentz-Minkowski 3-space*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **95** (2019), 97-102.
- [5] A. Bejancu, A. Ferrández and P. Lucas, *A new viewpoint on geometry of a lightlike hypersurface in a semi-Euclidean space*, Saitama Math. J. **16** (1998), 31-38.
- [6] E. Bombieri, E. De Giorgi and E. Giusti, *Minimal cones and the Bernstein problem*, Invent. Math. **7** (1969), 243-268.
- [7] E. Calabi, *Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations in Global Analysis*, (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XV, Berkeley, CA, 1968), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1970, 223-230.
- [8] S. Y. Cheng and S. T. Yau, *Maximal space-like hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski spaces*, Ann. Math. **104** (1976) 407-419.
- [9] K. Ecker, *Area minimizing hypersurfaces in Minkowski space*, Manuscripta Math. **56** (1986), 375-397.

---

\*3 埋め込み写像  $F$  が固有であるとは、任意のコンパクト集合の  $F$  による逆像がコンパクトになることをいう。

- [10] I. Fernandez and F.J. Lopez, *On the uniqueness of the helicoid and Enneper's surface in the Lorentz-Minkowski space  $\mathbb{R}_1^3$* , Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), 4603–4650.
- [11] S. Fujimori, Y. W. Kim, S.-E. Koh, W. Rossman, H. Shin, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Zero mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space which change type across a light-like line*, Osaka J. Math. **52** (2015), 285–297, Erratum: Osaka J. Math. **53** (2016), 289–293.
- [12] S. Fujimori, Y. Kawakami, M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada, *Entire zero mean curvature graphs of mixed type in Lorentz-Minkowski 3-space*, The Quarterly J. Math. **67** (2016), 801–837.
- [13] S. Fujimori, Y.W. Kim, S.-E. Koh, W. Rossman, H. Shin, H. Takahashi, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Zero mean curvature surfaces in  $\mathbb{L}^3$  containing a light-like line*, C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. **350** (2012), 975–978.
- [14] S. Fujimori, Y. W. Kim, S.-E. Koh, W. Rossman, H. Shin, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Zero mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space and 2-dimensional fluid mechanics*, Math. J. Okayama Univ. **57** (2015), 173–200.
- [15] G.J. Galloway, *Null Geometry and the Einstein Equations*, Null Geometry and the Einstein Equations. In: P.T. Chrúsciel and H. Friedrich (eds), The Einstein Equations and the Large Scale Behavior of Gravitational Fields. Birkhäuser, Basel (2004).
- [16] P. Hartman, and L. Nirenberg, *On spherical image whose Jacobians do not change sign*, Amer. J. Math. **81** (1959), 901–920.
- [17] K. Hashimoto and S. Kato, *Bicomplex extensions of zero mean curvature surfaces in  $\mathbb{R}^{2,1}$  and  $\mathbb{R}^{2,2}$* , J. Geom. Phys. **138** (2019), 223–240.
- [18] A. Honda, M. Koiso, M. Kokubu, M. Umehara and K. Yamada, *Mixed type surfaces with bounded mean curvature in 3-dimensional space-times*, Diff. Geom. and its Appl. **52** (2017), 64–77.
- [19] Y. W. Kim, S.-E. Koh, H. Shin and S.-D. Yang, *Spacelike maximal surfaces, timelike minimal surfaces, and Björling representation formulae*, J. Korean Math. Soc. **48** (2011), 1083–1100.
- [20] V. A. Klyachin, *Zero mean curvature surfaces of mixed type in Minkowski space*, Izv. Math. **67** (2003), 209–224.
- [21] O. Kobayashi, *Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space  $L^3$* , Tokyo J. Math., **6** (1983), 297–309.
- [22] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press 1983, USA.
- [23] A. Treibergs, *Entire spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in Minkowski space*, Invent. Math. **66** (1982), 39–56.
- [24] M. Umehara and K. Yamada, *Surfaces with light-like points in Lorentz-Minkowski space with applications*, in “Lorentzian Geometry and Related Topics”, Springer Proceedings of



Mathematics & Statics **211**, 253-273, 2017.

- [25] M. Umehara and K. Yamada, *Hypersurfaces with light-like points in a Lorentzian manifold*, J. Geom. Anal. **29** (2019), 3405–3437.