ハイパーケーラー多様体での平均曲率流

東北大学・材料科学高等研究所　國川 慶太
Keita Kunikawa
Advanced Institute for Materials Research,
Tohoku University

この論文は高橋良輔氏 (京都大 RIMS) との共著論文 [KT18] の要約である.

1　序

Leung-Wan [LW07] はハイパーケーラー多様体の中で, ハイパーラグランジュ部分多様体という概念を導入し, この性質が平均曲率流に沿って保たれることを示した. 本論文では, ハイパーラグランジュ部分多様体に対して自然に定義される「ツイスターエネルギー」に着目し, 初期値で十分小さいツイスターエネルギーを持つハイパーラグランジュ部分多様体が平均曲率流に沿って複素ラグランジュ部分多様体に収束することを紹介する.

ハイパーケーラー多様体

(M, g) を実 4 次元ハイパーケーラー多様体とする. このときリーマン計量 g と整合性を持つ複素構造の三つ組 $\{J_1, J_2, J_3\}$ が存在し, 次の四元数関係

$$J_1^2 = J_2^2 = J_3^2 = J_1 J_2 J_3 = -\mathrm{Id}$$

を満たす. 以下では簡単のためコンパクトなハイパーケーラー多様体のみ扱うが, この論文の内容は M に bounded geometry (単射半径, 曲率, および曲率の高階微分の一様有界性) を仮定しておけば非コンパクトでも成立する. なお, 実 4 次元コンパクトハイパーケーラー多様体は, トーラス $\mathbb{T}^4$ と K3 曲面だけである.

さて, ハイパーケーラー多様体上では上のような複素構造の三つ組 $\{J_1, J_2, J_3\}$ が存在するので, $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ に対して

$$J = a_1 J_1 + a_2 J_2 + a_3 J_3$$

とおけば, J もまた g と整合性を持つ複素構造となる. この意味で今後 $J \in \mathbb{S}^2$ と書く. $J \in \mathbb{S}^2$ に関する正則シンプレクティック形式 (非退化な J-正則 2 次形式) を Ω_J で表す. このとき J と ($\mathbb{R}^3$ の標準内積の意味で) 直交する $K \in \mathbb{S}^2$ が存在し, Ω_J は

$$\Omega_J = \omega_{JK} - \sqrt{-1}\omega_K$$

と表される．ただし，$\omega_{JK} = g(JK, \cdot)$ と $\omega_K = g(K, \cdot)$ はそれぞれ JK と K に対応する実シンプレクティック形式である．

実 4 次元ハイパーケーラー多様体の曲面

これ以降，この論文ではハイパーケーラー多様体の中のコンパクトな (実 2 次元) 曲面 $L^2 \subset M^4$ を考える．曲面 $L \subset M$ が，ある $J \in \mathbb{S}^2$ に関して

$$\Omega_J|_L \equiv 0$$

を満たすとき，L を複素ラグランジュ曲面という．これは通常のラグランジュ曲面の定義の類似と見ることができる．ところが，条件 $\Omega_J|_L \equiv 0$ は 2 つの実シンプレクティック形式 ω_{JK} と ω_K について同時に

$$\omega_{JK} = \omega_K \equiv 0$$

となることを意味するので，L に強い制約を与えている．実際，Ω_J に関する複素ラグランジュ曲面は，J に関する正則曲線 (複素 1 次元部分多様体で，これは自動的に極小部分多様体) になる．平均曲率流 (第 2 章参照) の立場から見れば，複素ラグランジュ曲面はフローの収束先の候補である．

では，どのような曲面であれば平均曲率流のもとで複素ラグランジュ曲面 (正則曲線) に収束するだろうか．Leung-Wan [LW07] はハイパーケーラー多様体における平均曲率流を考えるため，複素ラグランジュ曲面の条件を緩めて，次のように「ハイパーラグランジュ曲面」を定義した．曲面 $L \subset M$ 上で，滑らかな写像

$$\Psi : L \to \mathbb{S}^2$$

が存在して，各点 $x \in L$ で $\Omega_{\Psi(x)}|_{T_xL} = 0$ が成り立つとき，L をハイパーラグランジュ曲面という．つまり各点 $x \in L$ ごとに変わり得る M の複素構造 $\Psi(x) \in \mathbb{S}^2$ に対して，複素ラグランジュ条件を満たすものを考えるのである．各点 $x \in L$ ごとに M 上の複素構造 $\Psi(x) \in \mathbb{S}^2$ を対応させる写像 $\Psi : L \to \mathbb{S}^2$ を complex phase と呼ぶ．複素ラグランジュ曲面は，complex phase $\Psi : L \to \mathbb{S}^2$ が定値写像であるような曲面である．

実は，(向き付け可能な) 実 2 次元曲面 $L^2 \subset M^4$ の場合には，いつでもハイパーラグランジュ構造を入れることができる．実際，M の正規直交枠 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ を $e_1, e_2 \in TL$, $e_3, e_4 \in T^{\perp}L$ となるように選び，complex phase $\Psi : L \to \mathbb{S}^2$ を

$$\Psi e_1 = e_2, \quad \Psi e_3 = -e_4$$

により定めればよい．

注意 1.1. Leung-Wan [LW07] は，一般の実 $4n$ 次元 $(n \geq 1)$ ハイパーケーラー多様体の中の実 $2n$ 次元部分多様体 $L^{2n} \subset M^{4n}$ に対してハイパーラグランジュ部分多様体の概念を定義した．しかし，最近 Qiu-Sun [QS19] により，高次元 $(n \geq 2)$ では

「ハイパーラグランジュ部分多様体 $\Longrightarrow$ 複素ラグランジュ部分多様体」

となることが示された．したがって, 平均曲率流の立場からは $n=1$ の場合のみが考察対象となる.

シンプレクティック曲面

ハイパーラグランジュ構造 (つまり complex phase) は, ケーラー角やラグランジュ角を包括した概念になっている．ここでは, これらについて説明する．すでに述べたように, 曲面 $L^2 \subset M^4$ に対しては, M の正規直交枠を $e_1, e_2 \in TL$, $e_3, e_4 \in T^\perp L$ となるように選び, これを用いて complex phase $\Psi : L \to \mathbb{S}^2$ を取ることができる．もともと M のハイパーケーラー構造を定めていた複素構造 $\{J_1, J_2, J_3\}$ を使えば, complex phase は

$$\Psi(x) = a_1(x)J_1 + a_2(x)J_2 + a_3(x)J_3 \in \mathbb{S}^2, \quad x \in L$$

と表すことができる．簡単な計算で $\omega_{J_3}(e_1, e_2) = a_3$ となることがわかるが, $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{S}^2$ なので $-1 \leq a_3 \leq 1$ である．したがって

$$\cos\alpha := \omega_{J_3}(e_1, e_2)$$

とおくことで角度 α が定まる．この α は ω_{J_3} に関するケーラー角に他ならない．ケーラー角 α を用いると, ω_{J_3} に関するシンプレクティック曲面は $\cos\alpha > 0$ なるものとして特徴付けられる．特に $\cos\alpha \equiv 1$ であるような L は J_3 に関する正則曲線である．また, $\cos\alpha \equiv 0$ の場合, L は ω_{J_3} に関するラグランジュ曲面である (Figure 1 参照).

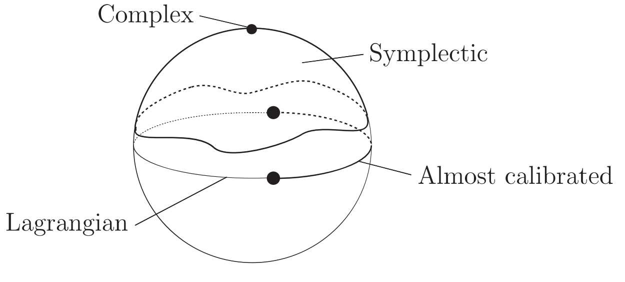

Figure 1: Image of the complex phase Ψ in $\mathbb{S}^2$

2 平均曲率流

ここからは極小部分多様体を捉える手段の 1 つである平均曲率流を扱う．一般に平均曲率流による部分多様体の変形においては, 途中で特異点が現れる可能性があるため必ずしも極小部分多様体を捉えられるとは限らない．しかし初期値が良い条件を満たしていれば, 平均曲率流は時間大域的に存在して極小部分多様体に収束する．ここではハイパーラグランジュ構造にマッチした初期条件のもとで収束定理を述べる (定理 2.2).

ハイパーラグランジュ平均曲率流

滑らかなはめ込みの族 $\{F_t : L \to M\}_{t\in[0,T)}$ が

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) = H(x,t) \quad (H(\cdot,t) \text{ は } F_t \text{ の平均曲率ベクトル場})$$

を満たしているとき, $\{F_t\}$ は平均曲率流を満たすという. 平均曲率流は, 一般のリーマン多様体 M とその部分多様体 L について考えることができる. 平均曲率流は部分多様体の体積汎関数に関する負の勾配流であり, 極小部分多様体はその停留点になる. 平均曲率流の短時間解の存在と一意性は, L がコンパクトであれば保証されるので, これ以降は部分多様体 L にもコンパクト性を仮定する.

Leung-Wan [LW07] はハイパーケーラー多様体の中で, ハイパーラグランジュ部分多様体の平均曲率流を考察した. 以下, 特に L^2 をハイパーケーラー多様体 M^4 の中のハイパーラグランジュ曲面とし, $L_t := F_t(L) \subset M$ と表すことにする.

命題 2.1 (Leung-Wan [LW07]). M^4 をハイパーケーラー多様体, L^2 をそのハイパーラグランジュ曲面とし, $\{F_t\}$ を初期値が $L_0 = L$ の平均曲率流とする. このとき次が成り立つ.

1. 平均曲率流の解が存在する限り, 全ての $t \in [0,T)$ で $L_t \subset M$ もハイパーラグランジュ曲面である.
2. 平均曲率流に沿って complex phase $\Psi_t : L \to \mathbb{S}^2$ は次を満たす:

$$\frac{d}{dt}\Psi_t = \Delta_t \Psi_t \quad (\Delta_t\Psi_t \text{ は } \Psi_t \text{ のテンション場}).$$

この定理によれば, ハイパーラグランジュ条件は平均曲率流に沿って保たれ, しかもその complex phase は (一般化された) 調和写像流を満たす. この意味で, 初期値をハイパーラグランジュ曲面とする平均曲率流を「ハイパーラグランジュ平均曲率流」と呼ぶ. 今回の主結果 (定理 2.2) はハイパーラグランジュ構造に着目することで得られる.

ハイパーラグランジュ平均曲率流の収束定理

この節では主結果を紹介する. そのために, ハイパーラグランジュ曲面 $L \subset M$ の complex phase $\Psi : L \to \mathbb{S}^2$ から自然に定まる次の量を定義しておく:

$$\mathcal{T}(L) := \int_L |\nabla\Psi|^2 d\mu.$$

すなわち, $\mathcal{T}(L)$ は complex phase $\Psi : L \to \mathbb{S}^2$ に関するディリクレエネルギーであるが, 我々はこれを「ツイスターエネルギー」と呼ぶことにする. 主結果は大雑把に言って, 「初期値のツイスターエネルギーが十分に小さければハイパーラグランジュ平均曲率流は, 正則曲線に収束する」というものである. これはつまり, 正則曲線のハイパーラグランジュ平均曲率流に沿った (局所的な) 安定性を示している.

定理 2.2 (K.–Takahashi [KT18]). M を実 4 次元のコンパクトなハイパーケーラー多様体, $L \subset M$ をコンパクトな実 2 次元ハイパーラグランジュ曲面とする. このとき, 任意にとって固定した正数 $V, \Lambda, \delta > 0$ に対して, ある正数 $\varepsilon = \varepsilon(n, V, \Lambda, \delta, \mathrm{Rm}(M), \mathrm{inj}(M)) > 0$ が存在して次が成り立つ:

$$\mathrm{Vol}(L) \leq V, \quad |A| \leq \Lambda, \quad \lambda_1(\Delta_L) \geq \delta, \quad \mathcal{T}(L) \leq \varepsilon$$

であれば, $L_0 = L$ を初期値とするハイパーラグランジュ平均曲率流 $L_t = F_t(L) \subset M$ は時間大域的に存在し, $t \to \infty$ のとき L_t はある複素構造 $J \in \mathbb{S}^2$ に関する正則曲線 L_∞ に C^∞ 収束する. また, 収束の速さは exponential decay である.

定理の中の記号について説明する. A は $L \subset M$ の第 2 基本形式, $\lambda_1(\Delta_L)$ は L 上の (関数に作用する) ラプラシアン Δ_L の第 1 固有値, $\mathrm{Rm}(M)$ は M の曲率テンソル, そして $\mathrm{inj}(M)$ は M の単射半径である.

$\mathcal{T}(L)$ が十分に小さいという条件は, complex phase $\Psi : L \to \mathbb{S}^2$ が, ある定値写像に十分近いということを表している. これは初期値のハイパーラグランジュ曲面 $L_0 = L$ が, 何らかの複素構造 $J \in \mathbb{S}^2$ に関する正則曲線に ($\mathcal{T}(L)$ の意味で) 十分近いシンプレクティック曲面であるという状況である. ただし, あらかじめ特定された複素構造に関してシンプレクティック曲面であることを要求しているわけではないことを注意しておく. むしろ, 主定理はハイパーラグランジュ平均曲率流により, 極限の複素構造と正則曲線を同時に見つけるものといえる.

証明に関して, 詳しいことは論文 [KT18] を参照していただきたい. ここでは主要なアイデアだけ述べる. 我々の主定理の証明は, H. Li の論文 [Li12] の手法に基づいている. Li はケーラー・アインシュタイン多様体の中で, ラグランジュ平均曲率流に沿った極小ラグランジュ部分多様体の (局所的な) 安定性を示している. ただし, 初期値でラグランジュ部分多様体の平均曲率 1 形式が完全形式であることを仮定する (この性質は平均曲率流で保たれる). Li の手法で重要なポイントは, ラグランジュ平均曲率流に沿って $\int_L |H|^2 d\mu$ に関する ε-regularity を示すことであった. そのためには $\int_L |H|^2 d\mu$ の発展方程式を計算し, exponential decay 評価を導出するのだが, 途中でラグランジュ部分多様体の平均曲率 1 形式の完全性を用いる. 我々の場合にも, Li と同様に $\int_L |H|^2 d\mu$ に関して ε-regularity が示せればよいのだが, 扱う対象がハイパーラグランジュ曲面である (これはラグランジュ部分多様体とは限らない) ため, そのままではうまくいかない. そこでハイパーラグランジュ構造に着目し, $\int_L |H|^2 d\mu$ の代わりに $\mathcal{T}(L)$ に関する ε-regularity を示す, というところが主定理の証明の肝となる. なぜ $\mathcal{T}(L)$ を使うとよいかは, Leung-Wan が示した次の式を見るとわかる.

命題 2.3 (Leung-Wan [LW07]). $L \subset M$ をハイパーラグランジュ曲面, $\Psi : L \to \mathbb{S}^2$ をその complex phase とするとき次が成り立つ:

$$i_H \Omega_\Psi + 2\sqrt{-1}\partial\Psi = 0.$$

特にハイパーラグランジュ曲面 L について, 極小 ($H = 0$) であることと complex phase $\Psi : L \to \mathbb{S}^2$ が反正則写像であることは同値である.

この帰結として $|H|^2 \leq 2|\nabla\Psi|^2$ を示すことができるので,

$$\int_L |H|^2 d\mu \leq 2\mathcal{T}(L)$$

が言える. つまり $\mathcal{T}(L)$ が十分に小さいということは, complex phase が定値写像に近いことを意味するが, 同時に平均曲率もこの意味で十分小さいことを意味している. $\mathcal{T}(L)$ のハイパーラグランジュ平均曲率流に沿った発展方程式は, complex phase が (一般化された) 調和写像流 $\frac{d}{dt}\Psi_t = \Delta_t \Psi_t$ を満たすことを使うと計算できて, 特に exponential decay 評価を導出できる. これにより, $\mathcal{T}(L)$ に関する ε-regularity が示されるので, (L がラグランジュ曲面であることや, 平均曲率 1 形式の完全性などを用いることなく) $\int_L |H|^2 d\mu$ の ε-regularity も自動的に従う. このような観察から, ハイパーラグランジュ平均曲率流において, 正則曲線への収束を示すためには $\mathcal{T}(L)$ をコントロールすることが自然であるとわかる.

関連する結果について

最後に, 主結果と関連する結果について述べておく. Chen-Tian [CT00] は実 4 次元ケーラー・アインシュタイン多様体における (実 2 次元) シンプレクティック曲面は, 平均曲率流に沿って保たれることを示した. したがって, 初期値がシンプレクティック曲面である平均曲率流を, シンプレクティック平均曲率流という. Han-Sun [HS12] はトーラス $\mathbb{T}^4$ 内のコンパクトなシンプレクティック曲面に対するシンプレクティック平均曲率流を考察し, $\int_L |A|^2 d\mu$ に関する ε-regularity を導くことにより, 我々と類似の結果 (正則曲線への収束) を示している. ここで, 実は $\mathcal{T}(L)$ に関して次が成り立つことを注意しておく:

$$\mathcal{T}(L) \leq 8 \int_L |A|^2 d\mu.$$

つまり Han-Sun たちの仮定では $\int_L |A|^2 d\mu$ を使い, しかも外側の空間の平坦性を (本質的に) 使っているという意味で, 我々の状況よりも強い制約が課されている. したがって, 今回の主結果は Han-Sun の定理の改良版と言える.

また, Han-Li [HL05] は, 正のリッチ曲率を持つ 4 次元ケーラー・アインシュタイン多様体の中で, シンプレクティック平均曲率流に沿った正則曲線の (局所的な) 安定性を示している. これはやはり我々の定理の類似であるが, Han-Li は外側の多様体のリッチ曲率が正であることを本質的に用いており, その手法はハイパーケーラー多様体 (リッチ曲率 0) の場合には適用できない. 本論文の主結果は, 実 4 次元ハイパーケーラー多様体の中の正則曲線が, シンプレクティック平均曲率流のもとで (局所的に) 安定であるという主張も含んでおり, これは新しい結果である.

References

[CT00] J. Chen and G. Tian: *Moving Symplectic Curves in Kähler–Einstein Surfaces.* Acta Math. Sinica **16** (2000), no. 4, 541–548.

[HL05] X. L. Han and J. Li: *The mean curvature flow approach to the symplectic isotopy problem.* Int. Math. Res. Not. IMRN **2005** (2005), no. 26, 1611–1620.

[HS12] X. L. Han and J. Sun: ε_0*-regularity for mean curvature flow from surface to flat Riemannian manifold.* Acta Math. **28** (2012), no. 7, 1475–1490.

[KT18] K. Kunikawa and T. Takahashi: *Convergence of mean curvature flow in hyperähler manifolds.* `arXiv:1808.06997` (2018), to appear in Pacific J. Math.

[Li12] H. Li: *Convergence of Lagrangian mean curvature flow in Kähler-Einstein manifolds.* Math. Zeit. **271** (2012), no. 1, 313–342.

[LW07] N. C. Leung and T. Y. H. Wan: *Hyper-Lagrangian submanifolds of hyperkähler manifolds and mean curvature flow.* J. Geom. Anal. **17** (2007), no. 2, 343–364.

[QS19] H. Qiu and L. Sun: *Mean curvature flow of surfaces in a hyperkähler* 4-*manifold.* `arXiv:1902.00645`.