順序数の積空間の閉長方形の C^*-embedding

神奈川大学 工学部
平田 康史 (Yasushi Hirata)　矢島 幸信 (Yukinobu Yajima)
Faculty of Engineering, Kanagawa University *

1 Introduction

空間は正則な T_1-位相空間とし, 積空間はすべて通常の積空間（Tychonoff 積）を考えているものとする. $\mathbb{R}$ は実数直線, $\mathbb{I}$ は $\mathbb{R}$ の部分空間としての閉区間 $[0,1]$ を表す.

空間 X から $\mathbb{I}$ への連続関数 $f: X \to \mathbb{I}$ があって, $U = \{x \in X : f(x) > 0\}$ となるような集合 U のことを X における**コゼロ**集合とよぶ.

空間 X, Y の積空間 $X \times Y$ を考えているとき, ある $E \subset X$ と $F \subset Y$ に対して $E \times F$ で表せるような $X \times Y$ の部分集合を, $X \times Y$ における**長方形**とよぶ. 表記を簡潔にするため, 今後長方形と言ったら, 空でないことが仮定されているものとする. 積空間 $X \times Y$ における長方形 $E \times F$ が $X \times Y$ において閉集合 (コゼロ集合) になるためには, E が X の閉集合 (コゼロ集合) であり, F が Y の閉集合 (コゼロ集合) であることが必要十分である. そのような $E \times F$ は $X \times Y$ の**閉長方形** (**コゼロ長方形**) とよばれる.

積空間 $X \times Y$ が**長方形的**であるとは, 有限個のコゼロ集合 (長方形でなくてもよい) からなる $X \times Y$ の任意の被覆が, コゼロ長方形からなる σ-局所有限な細分をもつことを意味する. 長方形的積空間の概念は 1975 年に Pasynkov によって導入されたもので, 次元論に関する次の定理はよく知られている.

定理 1.1 ([10]). 完全正則空間 X, Y の積空間 $X \times Y$ が長方形的ならば, 不等式

$$\dim(X \times Y) \leq \dim X + \dim Y$$

が成り立つ.

* 本研究は科研費 (課題番号:19K03606, 17K05351) の助成を受けたものである.

この講究録に掲載の別稿「順序数によるある積空間の基数関数による特性化定理」[7] でも述べている通り, 次の定理が成り立つ. ここで, $e(X)$ は空間 X の extent を表す.

定理 1.2 ([7, 定理 4.1])**.** 弱到達不可能基数は存在しないと仮定する. 順序数の任意の部分空間 A, B に対して，次は同値である.

(a) $A \times B$ は長方形的積空間である.
(b) $A \times B$ の任意の閉長方形 $A' \times B'$ に対して，等式 $e(A' \times B') = e(A') \cdot e(B')$ が成り立つ.

この定理の (a) から (b) を導くには, 次の 2 つの事実がわかれば十分である.

事実 1.3. A', B' が順序数の空でない部分空間で, $A' \times B'$ が長方形的積空間ならば, $e(A' \times B') = e(A') \cdot e(B')$ が成り立つ.

事実 1.4. A, B が順序数の部分空間で, $A \times B$ が長方形的積空間ならば, $A \times B$ の任意の閉長方形 $A' \times B'$ も長方形的積空間である.

上記の 2 つの事実のうちで, 新たな証明を要したのは事実 1.3 の方だけである. というのは, 可算パラコンパクト空間の閉集合が可算パラコンパクトであることは明らかなので, 事実 1.4 の方は, 次の知られている定理から直ちに導かれるからである.

定理 1.5 ([8])**.** 順序数の部分空間 A, B について, $A \times B$ が長方形的積空間であることは, $A \times B$ が可算パラコンパクトと同値である.

A, B: 順序数の部分空間, $A' \times B'$ が $A \times B$ の閉長方形のとき:

$$\begin{array}{ccc} A \times B \text{ は rectangular} & \Leftrightarrow & A \times B \text{ は可算パラコンパクト} \\ & & \Downarrow \\ A' \times B' \text{ は rectangular} & \Leftrightarrow & A' \times B' \text{ は可算パラコンパクト} \end{array}$$

事実 1.4 を導くときに使った定理 1.5 は, 順序数の部分空間の特殊性に多分に依存している. そこで, 順序数の部分空間に限らず, 一般の空間 X, Y による長方形的な積空間 $X \times Y$ において, 長方形 $X' \times Y'$ がまた長方形的積空間になるための十分条件にはどのようなものがあるかを考えてみた. そして, 次の事実が成り立つことに気付いた.

事実 1.6. 長方形的積空間 $X \times Y$ における長方形 $X' \times Y'$ について, もし $X' \times Y'$ が $X \times Y$ において C^*-embedded であるならば, $X' \times Y'$ は長方形的積空間である.

ここで, C^*-embedded の定義を確認しておこう. 空間 X の部分集合 E が **C^*-embedded** (**C-embedded**, **P-embedded**) であるとは, E から $\mathbb{I}$ ($\mathbb{R}$, 任意のバナッハ空間) への連続関数が, X 上の連続関数に拡張できることである.

3 種類の埋め込み性の間には, 次の implication が成り立つ.

P-embedded $\Rightarrow$ C-embedded $\Rightarrow$ C^*-embedded

Tietze-Urysohn の拡張定理としてよく知られているように,

- 空間 X が正規であること,
- X の任意の閉集合が C^*-embedded であること,
- X の任意の閉集合が C-embedded であること,

は互いに同値である.

同様に,

- 空間 X が族正規であることと,
- X の任意の閉集合が P-embedded であること,

が同値であることも知られている [1](**Dowker の拡張定理**).

この 2 つの拡張定理が成り立つためか, 部分集合が特に閉集合であるときに, それが C^*-, C-, P-embedded であるかどうかが考察されることが多いようである.

2 π-埋め込みとレトラクト

前節では, 事実 1.4 が定理 1.5 から導けること, そして, 順序数の部分空間のような特殊な空間に限らず, より一般の空間を対象とした事実 1.6 が成り立つことについて言及した. それでは, 定理 1.5 を使う代わりに, 事実 1.6 を使って事実 1.4 を導くことができるだろうか?

疑問 2.1. A, B が順序数の部分空間で $A \times B$ が長方形的積空間であるとき, $A \times B$ における任意の閉長方形 $A' \times B'$ は $A \times B$ において C^*-embedded か?

この疑問に答えるには, π-埋め込みやレトラクトの概念が有用である.

定義 2.2 ([11])**.** 空間 X の部分集合 X' が **π-embedded** であるとは, 任意の空間 Y に対して, $X' \times Y$ が $X \times Y$ において C^*-embedded であること.

距離空間や, 局所コンパクトなパラコンパクト空間においては, 任意の閉集合が π-embedded であることが知られている [9, 12]. 一方, 一般順序空間における閉集合が π-embedded でないこともある. 例えば, Michael line $\mathbb{M}$ において, 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は π-embedded ではない閉集合である [9]. 順序数の部分空間は一般順序空間の中でも特殊なものであるが, これについては次のことが知られている.

定理 2.3 ([3])**.** A が順序数の部分空間ならば, A において任意の閉集合は π-embedded である.

定義 2.4. 空間 X の部分集合 X' が**レトラクト**であるとは, X から X' への連続写像で, X' の各点を動かさないものが存在すること.

X' が空間 X のレトラクトならば, 明らかに,

- X' は X において P-embedded (特に C^*-embedded) である,
- 任意の空間 Y に対して, $X' \times Y$ は $X \times Y$ のレトラクトであり, よって, $X \times Y$ において C^*-embedded である.

ゆえに, 空間 X における任意のレトラクトは, X において π-embedded である.

定理 2.3 は次のように一般化されている.

定理 2.5 ([2])**.** A が順序数の部分空間ならば, A の任意の空でない閉集合は A のレトラクトである.

π-embdded な部分集合やレトラクトについて, 次の事実が成り立つことは容易にわかる.

事実 2.6. $n \in \omega$ で, 各 $k < n$ に対して, X'_k が空間 X_k における π-embedded な部分集合であるならば, $X' = \prod_{k<n} X'_k$ は $X = \prod_{k<n} X_k$ において C^*-embedded である.

事実 2.7. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して, X'_λ が空間 X_λ のレトラクトならば, $X' = \prod_{\lambda \in \Lambda} X'_\lambda$ は $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ におけるレトラクトである, よって, X' は X において C^*-embedded である.

定理 2.3 と事実 2.6 を使ってもよいし, 定理 2.5 と事実 2.7 を使ってもよいが, いずれにしても, 次の系が得られる.

系 2.8. $n \in \omega$ で, 各 $k < n$ に対して, A_k は順序数の部分空間, A'_k は A_k の閉集合とす

る．このとき, $\prod_{k<n} A'_k$ は $\prod_{k<n} A_k$ において C^*-embedded である．

この系から, 疑問 2.1 に対する肯定的な答えが得られる．ここでは $A \times B$ が長方形的積空間であることは, 仮定から外してしまってよい．

系 2.9. A, B が順序数の部分空間ならば, $A \times B$ における任意の閉長方形 $A' \times B'$ は $A \times B$ において C^*-embedded である．

このことから, 事実 1.4 を導くには, 定理 1.5 を経由する代わりに, 事実 1.6 を使ってもよいことがわかる．

3　一般順序空間の積における C^*-embedding

前節で述べたように, A, B が順序数の部分空間であれば, $A \times B$ における任意の閉長方形 $A' \times B'$ は C^*-embedded である．また, $A \times B$ において C^*-embedded な任意の閉集合 (長方形でなくてもよい) は P-embedded であることも分かっている [6]. 順序数の部分空間は一般順序空間の特殊なものであるので, 一般順序空間においても同様のことが成り立つかどうかを考えるのは自然であろう．

疑問 3.1. X, Y は一般順序空間とする．

(1) $X \times Y$ における任意の閉長方形 $X' \times Y'$ は C^*-embedded か?
(2) $X \times Y$ における C^*-embedded な任意の閉集合は P-embedded か?

一般には (1) の答えは No である．Michael line $\mathbb{M}$, その部分空間としての有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$, 実数直線 $\mathbb{R}$ の部分空間としての無理数全体の空間 $\mathbb{P}$ について, $\mathbb{M} \times \mathbb{P}$ は一般順序空間の積で, $\mathbb{Q} \times \mathbb{P}$ はその閉長方形であるが, C^*-embedded ではないからである [9]. そこで, 間をとって, 片方は一般順序空間, もう片方は順序数の部分空間の場合の積空間を考えてみた．更に, 長方形的積空間であることも仮定すれば, 疑問 3.1 の答えが肯定的であるという結果を得ることができた．

定理 3.2. X は一般順序空間, B は順序数の部分空間で, $X \times B$ は長方形的積空間であるとすると, 次が成り立つ．

(1) $X \times B$ における任意の閉長方形 $X' \times B'$ は C^*-embedded である．
(2) $X \times B$ における C^*-embedded な任意の閉集合は P-embedded である．

ここから派生する問題として, 次のようなものが考えられるが, 現時点で筆者たちは答えを得るに至っていない.

問題 3.3. $X \times B$ が長方形的積空間であるという仮定なしで, 定理 3.2 と同様のことが成り立つか?

問題 3.4. 一般順序空間 X, Y の長方形的積空間 $X \times Y$ について,

(1) $X \times Y$ における任意の閉長方形 $X' \times Y'$ は C^*-embedded か?
(2) $X \times Y$ における C^*-embedded な任意の閉集合は P-embedded か?

尚, 先ほどの疑問 3.1 (1) の反例 $\mathbb{M} \times \mathbb{P}$ は長方形的積空間ではないので, 問題 3.4 (1) の反例にはなっていない.

一般順序空間は単調正規空間の特別なものである.

問題 3.5. 単調正規空間 X と順序数の部分空間 B の長方形的積空間 $X \times B$ について,

(1) $X \times B$ における任意の閉長方形 $X' \times B'$ は C^*-embedded か?
(2) $X \times B$ における C^*-embedded な任意の閉集合は P-embedded か?

長方形的積空間という仮定をはずして, 巨大基数の存在を仮定すれば, 問題 3.5 (2) の反例が存在する. 空間が非孤立点を高々 1 つしかもたないないとき, その空間は**ほとんど離散**であるという. ほとんど離散な空間は単調正規かつパラコンパクトである.

定理 3.6 ([4])**.** 可測基数 κ に対して, ほとんど離散な空間 X_κ が存在して, $X_\kappa \times \kappa$ においては, C-embedded だが P-embedded ではない閉集合が存在する.

一方, 長方形的積空間の仮定を保持すると, 問題 3.5 (2) の反例で X がほとんど離散な空間であるようなものは存在しないことが次の定理からわかる.

定理 3.7 ([5, Theorem 6.6], [13, Theorem 4.2])**.** 単調正規空間 X とほとんど離散な空間 Y の積空間 $X \times Y$ が長方形的ならば, $X \times Y$ は族正規である. (よって, $X \times Y$ の任意の閉集合は P-embedded である.)

参考文献

[1] C. H. Dowker, *On a theorem of Hanner*, Ark. Mat. **2** (1952), 307–313.

[2] G. Gruenhage, Y. Hattori and H. Ohta, *Dugundji extenders and retracts on generalized ordered spaces*, Fund. Math. **158** (1998), 147–164.

[3] Y. Hattori, *π-embeddings and Dugundji extension theorems for generalized ordered spaces*, Topology and Appl. **84** (1998), 43–54.

[4] Y. Hirata, *C^*-, C-, P*-埋め込みと弱正規超フィルターについて, 数理解析研究所講究録 **2110** (2019), 13–16.

[5] Y. Hirata, N. Kemoto and Y. Yajima, *Products of monotonically normal spaces with various special factors*, Topology and Appl. **164** (2014), 45–86.

[6] Y. Hirata and Y. Yajima, *C^*-embedding implies P-embedding in products of ordinals*, Topology and Appl. **231** (2017), 251–265.

[7] Y. Hirata and Y. Yajima, 順序数によるある積空間の基数関数による特性化定理, to appear in 数理解析研究所講究録 (本巻).

[8] N. Kemoto and Y. Yajima, *Rectangular products with ordinal factors*, Topology and Appl. **154** (2007), 758–770.

[9] K. Morita, *On the dimension of the product of topological spaces*, Tsukuba J. Math. **1** (1977), 1-6.

[10] B. A. Pasynkov, *On the dimension of rectangular products*, Soviet Math. Dokl. **16** (1975), 344–347.

[11] T. C. Przymusiński, *Extending functions from products with a metric factor and absolutes*, Pacific J. Math. **101** (1982), 463–475.

[12] M. Starbird, *The normality of products with a compact or a metric factor*, Ph.D. Thesis, University of Wisconsin, 1974.

[13] Y. Yajima, *Products of monotonically normal spaces with factors defined by topological games*, Topology and Appl. **159** (2012), 1223–1235.