辞書式順序積の weight
-The weight of lexicographic products-

神奈川大学・工学部　平田　康史 *
大分大学・理工学部　家本 宣幸 **
*Yasushi Hirata, Kanagawa University
**Nobuyuki Kemoto, Oita University

1　序

Faber [2] において, 順序位相空間の辞書式順序積の第二可算性が特徴付けられている。また, 同文献で辞書式順序積 2^ω, 通常の Tychonoff 積 2^ω と カントール集合 $\mathbb{C}$ は互いに同相であることが示されている。したがって, 辞書式順序積 2^ω は第二可算であることがわかる。次は簡単に示せる。

- Tychonoff 積 2^{ω_1} の weight は $\aleph_1$ である。
- Tychonoff 積 2^{ω_1} と Tychonoff 積 2^{ω_1+1} は同相である。

予想 1.1. 次が予想される。

(1) 辞書式順序積 2^{ω_1} の weight は $\aleph_1$ である,
(2) 辞書式順序積 2^{ω_1} と 辞書式順序積 2^{ω_1+1} の weight は一致する。

最近, [8] において, 一般順序位相空間の辞書式順序積が定義された。この概説では、一般順序位相空間の辞書式順序積の weight の計算式を与え, 上の予想を考察する。

まず, 基本的な概念について述べたい。集合論や位相の基本的な概念は Jech [4], Kunen [11] や Engelking [1] に従い、集合論と言えば 選択公理を含む ZFC-集合論 を意味する。

順序集合 $\langle X, <_X \rangle$ は $\{(\leftarrow, x)_X : x \in X\} \cup \{(x, \rightarrow)_X : x \in X\}$ を準基とする自然な順序位相と呼ばれる位相 λ を持つ, ここで $(x, \rightarrow)_X = \{z \in X : x <_X z\}$, $(x, y)_X = \{z \in X : x <_X z <_X y\}$, $(x, y]_X = \{z \in X : x <_X z \leq_X y\}$ 等である。三つの組 $\langle X, <_X, \lambda \rangle$ は順序位相空間と呼ばれ, 単に X と書くこともある。よく知られているように, 実数 $\mathbb{R}$ や有理数 $\mathbb{Q}$ は順序位相空間である。

一方, 三つの組 $\langle X, <_X, \tau \rangle$ は次の二つの条件をみたす時, 一般順序位相空間と呼ばれ, 同様に単に X と書くこともある。

- $\langle X, <_X \rangle$ は順序集合である。
- τ は X 上の T_2-位相で, 凸集合からなる基底を持つ。

この時, 位相 τ は自然な順序位相 λ より強い ($\lambda \subset \tau$) ことが簡単にわかる。Sorgenfrey line $\mathbb{S}$ や Michael line $\mathbb{M}$ は一般順序位相空間であるが, 順序位相空間でない典型的な例であることが知られている。一般順序位相空間については [12] を参考にするとよい。

ω は最小の無限順序数を, ω_1 は最小の非可算順序数を表すことにし、順序数と言えばその通常の順序による順序位相空間と考えることにする。また、一般にギリシャ文字 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \cdots$ は断らない限り順序数を表すことにする。$\mathrm{cf}\alpha$ は順序数 α の cofinality を表し, $\mathrm{cf}\alpha = \alpha$ の時, α は正則順序数と呼ばれる。ある順序数 δ の直後 $(= \delta + 1)$ となる順序数 α を後続順序数と言い、後続順序数 α の直前を $\alpha - 1$ と表す。0 でも後続順序数でもない順序数を極限順序数と呼ぶ。$|X|$ は集合 X の濃度を表し、$|\alpha| = \alpha$ をみたす順序数 α は基数と呼ばれる。正則順序数は基数である。ω や ω_1 は基数であることを強調して, それぞれ $\aleph_0$, $\aleph_1$ と表すこともある。$\aleph_\alpha$ は α 番目の無限基数を表す。κ を基数とする時, 2^κ で κ のべき集合全体の濃度を表す。

各 $\alpha < \gamma$ に対して, 順序位相空間 X_α が与えられたとき, その積 $X = \prod_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ に辞書式順序と呼ばれる順序 $<_X$ を次のように定義する: $x, x' \in X$ に対し, $x <_X x'$ を

ある $\alpha < \gamma$ が存在して, $x \restriction \alpha = x' \restriction \alpha$ かつ $x(\alpha) <_{X_\alpha} x'(\alpha)$ が成立することとする,

ただし, x を列 $\langle x(\beta) : \beta < \gamma \rangle$ とみなし, $x \restriction \alpha = \langle x(\beta) : \beta < \alpha \rangle$ とする。

$X = \langle X, <_X, \tau \rangle$ を一般順序位相空間とし、λ を自然な順序位相とする。

$$X^+ := \{x \in X : (\leftarrow, x]_X \in \tau \setminus \lambda\}$$

$$X^- := \{x \in X : [x, \rightarrow)_X \in \tau \setminus \lambda\}$$

とおくと、明らかに次がわかる。

- X が順序位相空間であることの必要十分条件は $X^+ \cup X^- = \emptyset$ となることである。

そこで,

$$X^* := X^- \times \{-1\} \cup X \times \{0\} \cup X^+ \times \{1\}$$

とおいて、 X^* に辞書式順序 $<_{X^*}$ を入れて X^* を順序位相空間と考える。ただし, X^* の辞書式順序とは $X \times \{-1, 0, 1\}$ 上の辞書式順序の X^* への制限順序である。もちろん $-1 < 0 < 1$ である。この定義において, $x = \langle x, 0\rangle$ と考え, X を $X \times \{0\}$ と同一視する。従って、 $X^* = X^- \times \{-1\} \cup X \cup X^+ \times \{1\}$ と考える。特に $X \subset X^*$ である。次は明らかである。

- X が順序位相空間なら $X^* = X$ である。
- 順序 $<_{X^*}$ は 順序 $<_X$ の拡張で, 位相空間 $\langle X, \tau\rangle$ は自然な順序位相空間 X^* の稠密な部分空間である。.

その他の X^* の性質については [13] を参照するとよい。

以上の概念を利用して, 一般順序位相空間達の辞書式順序積が定義できる ([8])。各 $\alpha < \gamma$ に対して, 一般順序位相空間 X_α が与えられたとき, $\hat{X} = \prod_{\alpha<\gamma} X_\alpha^*$ は辞書式順序位相空間となるが, $X = \prod_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ にその制限順序と部分空間位相を付与することで X は一般順序位相空間となる。この X を一般順序位相空間 X_α 達の辞書式順序積という。これから先, 積 $\prod_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ を扱う場合は常に $2 \leq \gamma$ と $2 \leq |X_\alpha|$ $(\alpha < \gamma)$ を仮定する。一般順序位相空間達の Tychonoff 積や辞書式順序積については [3, 6, 7, 9, 10] を参考にするとよい。

2 辞書式順序積 の weight

[2, Theorem 4.3.1] では順序位相空間達の辞書式順序積の第二可算性が次のように特徴付けられている。

定理 2.1. [2, Theorem 4.3.1] $X = \prod_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ は順序位相空間達の辞書式順序積で $|X| \geq \aleph_0$ とする時, X が第二可算であることの必要十分条件は次が成立することである。

(1) $\gamma \leq \omega$,

(2) もし $\gamma = \omega$ ならば, すべての $\alpha < \gamma$ について $|X_\alpha| \leq \aleph_0$,

(3) もし $\gamma < \omega$ ならば, $X_{\gamma-1}$ は第二可算かつ, すべての $\alpha < \gamma - 1$ について X_α は可算。

この定理を改良するため, いくつかの考察から始める。X を位相空間とする。

$$w(X) := \min\{|\mathcal{B}|:\ \mathcal{B} \text{ は } X \text{ の開基 }\}$$

$$d(X) := \min\{|D|:\ D \text{ は } X \text{ で稠密 }\}$$

とおく。$w(X)$ は X の weight と呼ばれ, $d(X)$ は X の density と呼ばれる。一般順序位相空間の weight と density の関係は次の補題のように与えられる。ここで

$$N_X^+ := \{x \in X:\ x < y \text{ と } (x,y) = \emptyset \text{ をみたす } y \in X \text{ が存在する }\}$$

である。

補題 2.2. X を一般順序位相空間とすると

$$w(X) = \max\{d(X), |N_X^+|, |X^+|, |X^-|\}$$

が成立する。

この補題は一般順序位相空間の開基 (weight) は部分集合 (稠密部分集合, N_X^+, X^+, X^- 達) からコントロールできることを示している。辞書式順序積で開基を直接扱うのは難しいが、この補題を利用することで次の二つの補題がわかる。

補題 2.3. $X = X_0 \times X_1$ は二つの一般順序位相空間の辞書式順序積で $|X| \geq \aleph_0$ をみたし, κ は無限基数とする。この時 $w(X) \leq \kappa$ であることと, $|X_0| \leq \kappa$ かつ $w(X_1) \leq \kappa$ であることは同値である。

補題 2.4. γ を極限順序数とする。$X = \prod_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ は一般順序位相空間達の辞書式順序積で $|X| \geq \aleph_0$ をみたし, κ は無限基数とする。この時 $w(X) \leq \kappa$ であることと, $\gamma \leq \kappa$ かつ、各 $\beta < \gamma$ について $|\prod_{\alpha\leq\beta} X_\alpha| \leq \kappa$ であることは同値である。

上の二つの補題から, 次の主定理が得られる。証明については, 後続順序数の場合が補題 2.3 から, 極限順序数の場合が補題 2.4 から得られると思えばよい。

定理 2.5. $X = \prod_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ は一般順序位相空間達の辞書式順序積で $|X| \geq \aleph_0$ をみたすとすると,

$$w(X) = \begin{cases} \sup\{|\prod_{\alpha\leq\beta} X_\alpha| : \beta < \gamma\} & \gamma \text{ は極限順序数} \\ \max\{|\prod_{\alpha<\gamma-1} X_\alpha|, w(X_{\gamma-1})\} & \gamma \text{ は後続順序数} \end{cases}$$

が成り立つ。

この定理を応用すれば, 定理 2.1 はそのまま一般順序位相空間達の辞書式順序積の定理として拡張できる。また, この定理から次がわかる。

例 2.6. $\gamma = 2$ に適用して, $w(\mathbb{Q}\times\mathbb{R}) = \aleph_0$ で $w(\mathbb{R}\times\mathbb{Q}) = 2^{\aleph_0}$ となることがわかる。これは上の定理を使わなくても直接導くこともできる。また, $w(\omega\times[0,1)_{\mathbb{R}}) = \aleph_0$, $w([0,1)_{\mathbb{R}}\times\omega) = 2^{\aleph_0}$ もわかる。ここで $[0,1)_{\mathbb{R}}$ は $\mathbb{R}$ の半開区間 $[0,1)$ を意味する。

3 応用

ここでは上で得られた主定理を応用して、特殊な辞書積順序積の weight を実際に計算してみよう。基数 μ に対して, μ^+ は μ を超える最小の基数を表す。無限の基数 λ は基数 μ が存在して $\lambda = \mu^+$ と表されるとき, 後続基数と呼ばれる。後続基数でない非可算基数は極限基数と呼ばれる。

基数 κ と極限基数 λ に対して次の基数関数は集合論でよく利用される。

$$\kappa^{<\lambda} = \sup\{\kappa^{\mu}:\ \mu \text{ は基数で } \mu < \lambda\ \},$$

[4, p.52, (5.10)] を参照せよ。ここではこの基数関数の概念を拡張する。基数 κ と順序数 γ に対して基数関数 $\kappa^{<\gamma}$ を

$$\kappa^{<\gamma} = \sup\{\kappa^{\mu}:\ \mu \text{ は基数で } \mu < \gamma\ \}$$

と定義する。例えば無限基数 κ について次が成り立つ。

- $\kappa < \gamma$ ならば $\kappa^{<\gamma} = 2^{<\gamma}$,
- $\kappa \le 2^{<\kappa} \le \kappa^{<\kappa}$, $\kappa < \kappa^{\mathrm{cf}\kappa}$,
- 一般連続体仮設 (GCH) を仮定すれば, κ が正則基数 (すなわち $\mathrm{cf}\kappa = \kappa$) であることの必要十分条件は $2^{<\kappa} = \kappa^{<\kappa}$, [4, Theorem 5.15] を見よ,
- $2^{<\omega} = \aleph_0^{<\omega} = \aleph_0$, $2^{<\omega+1} = \aleph_0^{<\omega+1} = 2^{\aleph_0}$, $\aleph_1^{<\omega} = \aleph_1$, $\aleph_1^{<\omega+1} = \aleph_1^{<\omega_1} = 2^{\aleph_0}$, $\aleph_1^{<\omega_1+1} = 2^{\aleph_1}, \cdots$。

上で定義した基数関数を使えば, 辞書式順序積 2^{γ}, ただし $2 = \{0,1\}$ で $0 < 1$, の weight は次のように計算できる。

系 3.1. γ を無限順序数とすると辞書式順序積 2^{γ} の *weight* は $2^{<\gamma}$ となる。すなわち、$w(2^{\gamma}) = 2^{<\gamma}$。

例 3.2. 上の系を適用すれば $w(2^\omega) = \aleph_0$, $w(2^{\omega+1}) = w(2^{\omega_1}) = 2^{\aleph_0}$, $w(2^{\omega_1+1}) = w(2^{\omega_2}) = 2^{\aleph_1}$, $w(2^{\omega_\omega}) = 2^{<\aleph_\omega} \geq \aleph_\omega$ などがわかる。もっと一般に, 無限基数 κ について, $w(2^\kappa) = 2^{<\kappa} \geq \kappa$ が成り立ち, 更に $\kappa < \gamma \leq \kappa^+$ ならば $w(2^\gamma) = 2^\kappa$ が成り立つことがわかる。

以上から, 予想 1.1 は次のように解かれた。

系 3.3. 次が成立する。

(1) 辞書式順序積 2^{ω_1} の *weight* が $\aleph_1$ であることは連続体仮説と同値である,
(2) 辞書式順序積 2^{ω_1} と辞書式順序積 2^{ω_1+1} の *weight* が一致することの必要十分条件は $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$ である。

系 3.1 は次のように一般化できる。

系 3.4. $X = \prod_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ を一般順序位相空間達の辞書式順序積とし, κ を無限基数とする。もし、各 $\alpha < \gamma$ に対し, $|X_\alpha| = \kappa$ が成り立つならば, $w(X) = \kappa^{<\gamma}$ である。

$|\mathbb{Q}| = \aleph_0$, $|\mathbb{R}| = |\mathbb{S}| = 2^{\aleph_0}$ に注意して上の系を適用すると

例 3.5.

$$
\left.\begin{array}{l} w(\mathbb{Q}^2) = (\aleph_0)^{<2} \\ w(\mathbb{Q}^\omega) = (\aleph_0)^{<\omega} \end{array}\right\} = \aleph_0,
$$

$$
\left.\begin{array}{l} w(\mathbb{Q}^{\omega+1}) = (\aleph_0)^{<\omega+1} \\ w(\mathbb{Q}^{\omega_1}) = (\aleph_0)^{<\omega_1} \end{array}\right\} = (\aleph_0)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0},
$$

$$
w(\mathbb{Q}^{\omega_1+1}) = (\aleph_0)^{<\omega_1+1} = (\aleph_0)^{\aleph_1} = 2^{\aleph_1},
$$

$$
\left.\begin{array}{l} w(\mathbb{R}^2) = w(\mathbb{S}^2) = (2^{\aleph_0})^{<2} \\ w(\mathbb{R}^\omega) = w(\mathbb{S}^\omega) = (2^{\aleph_0})^{<\omega} \end{array}\right\} = 2^{\aleph_0},
$$

$$
\left.\begin{array}{l} w(\mathbb{R}^{\omega+1}) = w(\mathbb{S}^{\omega+1}) = (2^{\aleph_0})^{<\omega+1} \\ w(\mathbb{R}^{\omega_1}) = w(\mathbb{S}^{\omega_1}) = (2^{\aleph_0})^{<\omega_1} \end{array}\right\} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0},
$$

$$
w(\mathbb{R}^{\omega_1+1}) = w(\mathbb{S}^{\omega_1+1}) = (2^{\aleph_0})^{<\omega_1+1} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_1} = 2^{\aleph_1}.
$$

また, 順序数空間については,

例 3.6.

- $w(\omega^2) = w(\omega^\omega) = \aleph_0$, $w(\omega_1^2) = w(\omega_1^\omega) = \aleph_1$,
- $w(\omega^{\omega+1}) = w(\omega^{\omega_1}) = 2^{\aleph_0}$, $w(\omega_1^{\omega+1}) = w(\omega_1^{\omega_1}) = 2^{\aleph_0}$,
- $w(\omega^{\omega_1+1}) = w(\omega^{\omega_2}) = 2^{\aleph_1}$, $w(\omega_1^{\omega_1+1}) = w(\omega_1^{\omega_2}) = 2^{\aleph_1}$,
- $w((\omega_\omega)^{\omega+1}) = (\aleph_\omega)^{\aleph_0} > \aleph_\omega$,

- 一般連続体仮説を仮定すれば, $w(2^{\omega_\omega}) = 2^{<\omega_\omega} = \aleph_\omega$ が成り立つ。

系 3.3 と同様に次がわかる。

系 **3.7.** 次が成立する。

(1) $w(\mathbb{S}^2) = \aleph_1$, $w(\mathbb{S}^{\omega_1}) = \aleph_1$, $w(\omega^{\omega+1}) = \aleph_1$ や $w(\omega^{\omega_1}) = \aleph_1$ はそれぞれ連続体仮説と同値である。

(2) $w(\mathbb{R}^{\omega_1}) = w(\mathbb{R}^{\omega_1+1})$, $w(\mathbb{S}^{\omega_1}) = w(\mathbb{S}^{\omega_1+1})$, $w(\omega^{\omega_1}) = w(\omega^{\omega_1+1})$ や $w(\omega_1^{\omega_1}) = w(\omega_1^{\omega_1+1})$ はそれぞれ $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$ と同値である。

例 **3.8.** γ を無限順序数とすると, 主定理から

(1) $w(\prod_{2\leq\alpha<\gamma} \alpha) = 2^{<\gamma}$

が成り立つことが導かれる。よって,

(2) $w(\prod_{2\leq\alpha<\omega} \alpha) = \aleph_0$, $w(\prod_{2\leq\alpha<\omega+1} \alpha) = w(\prod_{2\leq\alpha<\omega_1} \alpha) = 2^{\aleph_0}$, $w(\prod_{2\leq\alpha<\omega_1+1} \alpha) = 2^{\aleph_1}, \cdots$,

(3) $w(\prod_{\alpha<\omega} \omega_\alpha) = \aleph_\omega$, $w(\prod_{\alpha<\omega+1} \omega_\alpha) = \aleph_\omega^{\aleph_0} > \aleph_\omega$, (基数の計算は [4, Lemma 5.9] を参照)。

4 辞書式順序積 2^γ の homogeneous 性

位相空間 X が homogeneous とは, 各 $x, y \in X$ に対して, 同相写像 $h : X \to X$ で $h(x) = y$ をみたすものが存在することである。次は簡単にわかる。

- もし、位相空間 X_α 達 $(\alpha \in \Lambda)$ が homogeneous ならば, Tychonoff 積 $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ もまた homogeneous である,
- もし、位相空間 X が homogeneous ならば, ただ一つの基数 κ が存在して任意の $x \in X$ に対して $\chi(x, X) = \kappa$ を満たす, ここで $\chi(x, X) = \min\{|\mathcal{U}| : \mathcal{U}$ は x における近傍基 $\}$ で x における character と呼ばれる, [1] を見よ,
- もし、位相空間 X が homogeneous で孤立点を持てば、すべての点が孤立点である, したがって Λ が無限集合であれば, Tychonoff 積 2^Λ は homogeneous で 孤立点を持たない。

特に Tychonoff 積 2^ω は homogeneous であることがわかる。したがって辞書式順序積 2^ω も homogeneous である。ここでは辞書式順序積 2^γ の homogeneous 性について考察する。[5] で定義された コンパクト順序位相空間の cofinality の概念はこの考察に有効である。L がコンパクト順序位相空間で $x \in L$ とする。$(\leftarrow, x)_L$ の部分集合 A は, 各 $y < x$ に対して, $y \le a$ をみたす $a \in A$ が存在する時, x に対して 0-非有界と言う。$(x, \rightarrow)_L$ の部分集合に対する 1-非有界の概念も同様に定義される。

$$0\text{-}\operatorname{cf}_L x = \min\{|A| :\ A \text{ は } x \text{ に対して 0-非有界 }\}$$

とおくと明らかに $0\text{-}\operatorname{cf}_L x$ は 0, 1 か無限正則基数となる。また, $0\text{-}\operatorname{cf}_L x = 0$ ($0\text{-}\operatorname{cf}_L x = 1$) は x は L の最小元 (x は L において直後元を持つ) となることに注意しよう。通常 $0\text{-}\operatorname{cf}_L x$ は $0\text{-}\operatorname{cf} x$ と表される。 $1\text{-}\operatorname{cf} x$ についても同様に定義される。各 $x \in L$ について $\chi(x, L) = \max\{0\text{-}\operatorname{cf} x, 1\text{-}\operatorname{cf} x\}$ が成り立つことや, 辞書式順序積 2^γ はコンパクト順序位相空間であることに注意しよう。

補題 4.1. 2^γ を辞書式順序積で $x \in 2^\gamma$ とすると次が成立する。

(1) $x^{-1}[\{1\}]$ は最大元を持たないとし, $\delta = \sup x^{-1}[\{1\}]$ とおくと, $0\text{-}\operatorname{cf} x = \operatorname{cf} \delta$ が成立する, ここで $\sup \emptyset = 0$ で $\operatorname{cf} 0 = 0$ と考える,

(2) $x^{-1}[\{1\}]$ が最大元を持てば $0\text{-}\operatorname{cf} x = 1$ が成立する。

上の補題で 0 と 1 を入れ替えることで, $1\text{-}\operatorname{cf} x$ についての同様の補題が得られる。

L をコンパクト順序位相空間すると, L の任意の部分集合 A は上限 $\sup_L A$ と下限 $\inf_L A$ を持つことに注意しよう, [1, 3.12.3 (a)] を見よ。コンパクト順序位相空間 L の点 x について, $\min\{0\text{-}\operatorname{cf} x, 1\text{-}\operatorname{cf} x\} \le 1$ が成り立つとき x は I-型, そうでないときは, x は II-型であるということにしよう。正則非可算基数 κ 上の club set の族が κ 上のフィルター基になることはよく知られているが, その証明と同じような議論を行うことで次のことを示すことができる。

補題 4.2. L をコンパクト順序位相空間とする。L が $\omega_1 \le \max\{0\text{-}\operatorname{cf} x, 1\text{-}\operatorname{cf} x\}$ をみたす I-型の点 x と II-型の点 y 持てば, L は *homogeneous* でない。

この補題を利用すれば次が得られる。

定理 4.3. 次が成立する。

(1) もし γ が後続順序数で $\gamma > \omega$ をみたせば, 辞書式順序積 2^γ は *homogeneous* で

ない,

(2) もし γ が極限順序数で $\gamma \geq \omega_1$ をみたせば, 辞書式順序積 2^γ は *homogeneous* でない。

(1) は 2^γ が孤立点 (例えば 2^γ の最大元) と, 非孤立点の両方を持つことからわかる。(2) は補題 4.2 を使う。補題 4.1 を使って補題 4.2 のような I-型の点 x と II-型の点 y が存在することを示せばよい。これを利用すれば次がわかる。

系 4.4. γ を順序数とすると次は同値である。

(1) 辞書式順序積 2^γ と *Tychonoff* 積 2^γ は同相である,

(2) 辞書式順序積 2^γ から *Tychonoff* 積 2^γ への恒等写像は同相である,

(3) 集合 Λ が存在して, 辞書式順序積 2^γ と *Tychonoff* 積 2^Λ は同相である,

(4) $\gamma \leq \omega$。

この系の証明でポイントになるのは (1) $\Rightarrow$ (4) であるのでその概略を見てみよう。$\gamma > \omega$ と仮定して, 辞書式順序積 2^γ と Tychonoff 積 2^γ は同相でないことを示せばよい。上の補題から $\omega < \gamma < \omega_1$ としてよい。γ は可算であるから Tychonoff 積 2^γ は Tychonoff 積 2^ω と同相である。したがって Tychonoff 積 2^γ の weight は可算である。一方, 系 3.1 から辞書式順序積 2^γ の weight は $2^{<\gamma} = 2^{\aleph_0}$ である。$\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ であるから, 辞書式順序積 2^γ と Tychonoff 積 2^γ は同相にはならないことがわかる。

γ が有限順序数の時は, 辞書式順序積 2^γ は有限であるから, 明らかに homogeneous である。したがって定理 4.3 より次が問題として残る。

問題 4.5. γ が極限順序数で $\omega < \gamma < \omega_1$ の時, 辞書式順序積 2^γ は homogeneous か？

参考文献

[1] R. Engelking, *General Topology-Revised and completed ed.*. Heldermann Verlag, Berlin (1989).

[2] M. J. Faber, *Metrizability in generalized ordered spaces*, Mathematical Centre Tracts, No. 53. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1974.

[3] Y. Hirata and N. Kemoto, *Countable metacompactness of products of LOTS'*,

Top. Appl., 178 (2014) 1-16.

[4] T. Jech, *Set theory. The third millennium edition, revised and expanded*, Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[5] N. Kemoto, *Normality of products of GO-spaces and cardinals*, Top. Proc. 18 (1993) 133-142.

[6] N. Kemoto, *The lexicographic ordered products and the usual Tychonoff products*, Top. Appl., 162 (2014) 20-33.

[7] N. Kemoto, *Orderability of products*, Top. Proc., 50 (2017) 67-78.

[8] N. Kemoto, *Lexicographic products of GO-spaces*, Top. Appl., 232 (2017), 267-280.

[9] N. Kemoto, *Paracompactness of Lexicographic products of GO-spaces*, Top. Appl., 240 (2018) 35-58.

[10] N. Kemoto, *Hereditary paracompactness of lexicographic products*, Top. Proc., 53 (2019) 301-317.

[11] K. Kunnen, *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, vol. 102, North-Holland, Amsterdam, 1980.

[12] D.J. Lutzer, *On generalized ordered spaces*, Dissertationes Math. Rozprawy Mat. 89 (1971).

[13] T. Miwa and N. Kemoto, *Linearly ordered extensions of GO-spaces*, Top. Appl., 54 (1993), 133-140.