

The spinor representation of conformal mappings of surfaces

筑波大学・数理物質系数域 守屋克洋

Katsuhiko Moriya

Division of Mathematics, Faculty of Pure and Applied Sciences,
University of Tsukuba

1 序

ユークリッド空間内の極小曲面のワイエルシュトラス表現公式は、よく知られているものである。それは、極小曲面のパラメトライゼーションの微分を具体的に構成するものである。本稿の目的は、高次元のユークリッド空間内の曲面のパラメトライゼーションの微分をスピノル束の切断を用いて書くこと、そこから得られる共形はめ込みのコーシー・リーマン方程式の類似物を用いて、共形はめ込みの変換を与えることである ([1])。

2 曲面のスピンノル表現

\mathbb{R}^r の標準基底を e_1, \dots, e_r と書く。 V を e_1, e_2 で張られる \mathbb{R}^r の二次元線形部分空間とする。

$Cl(\mathbb{R}^r)$ を \mathbb{R}^r のクリフォード代数とし、 $Spin(\mathbb{R}^r)$ を \mathbb{R}^r のスピノル群とする。 $Cl(\mathbb{R}^{r-1})$ は $Cl(\mathbb{R}^r)$ の部分代数であり、 $Spin(\mathbb{R}^{r-1})$ は $Spin(\mathbb{R}^r)$ の部分群である。 Ad を $Cl(\mathbb{R}^r)$ の随伴作用素とする。

M をリーマン面とし J を M の複素構造とする。 $f: M \rightarrow \mathbb{R}^r$ ($r \geq 3$) を共形はめ込みとする。 任意の $p \in M$ に対し、 $(df)_p(T_p M)$ は $T_{f(p)}\mathbb{R}^r$ の 2 次元部分空間であるから、 $v: M \rightarrow Spin(\mathbb{R}^r)$ で $Ad_{v(p)}(T_{f(p)}V) = df_p(T_p M)$ となるものが存在する。 f は共形はめ込みであるから、 M 上の零にならない一次微分形式 θ_1, θ_2 で $\theta_1 e_1 + \theta_2 e_2$ が $(1, 0)$ 形式もしくは $(0, 1)$ 形式であり、

$$df = Ad_v(\theta_1 e_1 + \theta_2 e_2)$$

となるものが存在する。 $T^*M \otimes V$ のスピノル構造を一つ固定して、そのスピノル束を S と書く。 この時、二重被覆バンドル写像 $\Psi: S \rightarrow T^*M \otimes V$ が存在する。 この写像は全射だか

ら, S の切断 s で

$$\Psi(s) = \theta_1 e_1 + \theta_2 e_2$$

となるものが存在し,

$$df = \text{Ad}_v \Psi(s) \quad (1)$$

となる.

定義 1. 式 (1) の右辺を df のスピンの表現と呼ぶ.

$T^*M \otimes V$ のスピン構造が固定され, したがって Ψ が固定されているときに, $\text{Ad}_v \Psi(s)$ が共形はめ込みの微分になっているための s と v の満たすべき条件を考える. それは, $\Psi(s)$ が 0 にならない $(1, 0)$ 形式もしくは $(0, 1)$ 形式で, $\text{Ad}_v \Psi(s)$ が完全微分形式であれば良いので, 次が得られる.

補題 1. M が単連結で $v: M \rightarrow \text{Spin}(\mathbb{R}^r)$ と 0 にならない S の切断 s が

$$\begin{aligned} \Psi(s) & \text{は零点を持たない,} \\ \Psi(s) & \text{は } (1, 0) \text{ 形式もしくは } (0, 1) \text{ 形式,} \\ v^{-1} dv \wedge \Psi(s) + d\Psi(s) + \Psi(s) \wedge v^{-1} dv & = 0 \end{aligned}$$

を満たすとき, 共形はめ込み $f: M \rightarrow \mathbb{R}^r$ で $df = \text{Ad}_v \Psi(s)$ となるものが存在する.

写像

$$\begin{aligned} G: M & \rightarrow \text{Spin}(\mathbb{R}^r) / \text{Spin}(\mathbb{R}^2) \times \text{Spin}(\mathbb{R}^{r-2}), \\ G & = \text{Ad}_v e_1 e_2 \end{aligned}$$

は, f の一般化されたガウス写像である. $G^2 = -1$ であるので, スピン表現は次のように共形はめ込みのコーシー・リーマン方程式の類似方程式を誘導する.

補題 2. スピン表現が $df = \text{Ad}_v \Psi(s)$ である共形はめ込み $f: M \rightarrow \mathbb{R}^r$ は

$$df \circ J = G df = -df G, \quad G = \text{Ad}_v e_1 e_2$$

もしくは,

$$df \circ J = -G df = df G, \quad G = \text{Ad}_v e_1 e_2$$

を満たす.

この方程式を使うと共形はめ込みの変換が得られる。以下、しばらくその準備をする。

$\tilde{\mathbb{R}}^{r-1}$ を $Cl(\mathbb{R}^r)$ の部分空間で $e_1 e_r, \dots, e_{r-1} e_r$ で張られるものとする。この時 $Cl(\tilde{\mathbb{R}}^{r-1})$ は $Cl(\mathbb{R}^r)$ の部分代数となり、したがって $\text{Spin}(\tilde{\mathbb{R}}^{r-1}) \subset \text{Spin}(\mathbb{R}^r)$ である。 $\text{Pin}(\mathbb{R}^r)$ を \mathbb{R}^r のピン群とすると、

$$u = \sum_{i=1}^{r-1} a_i e_i e_r \in \text{Pin}(\tilde{\mathbb{R}}^{r-1})$$

は

$$u = \left(\sum_{i=1}^{r-1} a_i e_i \right) e_r$$

であるので、次がすぐにわかる。

補題 3. $\text{Spin}(\tilde{\mathbb{R}}^{r-1}) = \text{Spin}(\mathbb{R}^{r-1})$.

すると、共形はめ込み $g: M \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}^{r-1}$ がスピノ表現で

$$dg = \text{Ad}_w \tilde{\Psi}(\tilde{s}), \quad w: M \rightarrow \text{Spin}(\mathbb{R}^{r-1})$$

とかける。

$$dg \circ J = (\text{Ad}_w e_1 e_2) dg = -dg (\text{Ad}_w e_1 e_2)$$

または、

$$dg \circ J = -(\text{Ad}_w e_1 e_2) dg = dg (\text{Ad}_w e_1 e_2)$$

である。

定理 1. $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{r-1}$ を共形はめ込みで、そのスピノ表現を $df = \text{Ad}_v \Psi(s)$, $v: M \rightarrow \text{Spin}(\mathbb{R}^{r-1})$, $\Psi(s)$ は $(1, 0)$ 形式とし、 $g: M \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}^{r-1}$ をはめ込みとする。この時、次は同値。

1. $df \wedge dg = 0$,
2. $dg \wedge df = 0$,
3. g は共形で、スピノ表現が $dg = \text{Ad}_v \tilde{\Psi}(\tilde{s})$ で $\tilde{\Psi}(\tilde{s})$ は $(0, 1)$ 形式

証明. X を零でない M の接ベクトルとすると

$$\begin{aligned} (df \wedge dg)(X, JX) &= df(X) dg(JX) - df(JX) dg(X) \\ &= df(X) \{ dg(JX) + (\text{Ad}_v e_1 e_2) dg(X) \} = 0 \end{aligned}$$

より、 $(df(X))^{-1}$ を左からかけて

$$dg \circ J = -(\text{Ad}_v e_1 e_2) dg$$

である。したがって、 g は共形で、そのスピノ表現が $\text{Ad}_v \tilde{\Psi}(\tilde{s})$ で $\tilde{\Psi}(\tilde{s})$ は $(0, 1)$ 形式となり、1 と 3 の同値性が示される。

2 と 3 の同値性も同様である。

参考文献

- [1] Moriya, K., Transforms of conformal mappings of surfaces of higher codimension, in preparation.