Complex structures on the complexification of a real Lie algebra

島根大学・総合理工学部　山田拓身
Takumi Yamada
Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering,
Shimane University

1　序文

第 1 チャーン類が 0 となるケーラー構造をもつコンパクト複素多様体 M に対して, その正則ベクトル場全体のなすリー環 $\mathfrak{h}(M)$ は, 可換で次元は 1 次ベッチ数の半分となり, 0 でない正則ベクトル場は零点をもたないことなどが Lichnerowicz によって 1969 年に示された (cf.[6]).

また, 等質複素多様体に関しては, 1957 年に松島与三によりコンパクト等質ケーラー多様体 (複素構造とケーラー構造の両方を保つ群が推移的に作用する複素多様体) は, 複素多様体として旗多様体と複素トーラスの直積に正則同型となることが示された ([5]). 1961 年には Borel-Remmert によりコンパクト等質複素多様体 (複素構造を保つ群が推移的に作用する複素多様体) がケーラー構造をもつ場合に拡張されている ([2]). これは正則ベクトル場全体のなす複素リー環 $\mathfrak{h}(M)$ が簡約リー環となることを意味する. 松島の結果の擬ケーラー構造 (不定値ケーラー計量) の場合として, 1989 年に Dorfmeister-D.Guan によりコンパクト等質擬ケーラー複素多様体は, ケーラーの場合と同様に, 複素多様体として旗多様体と複素トーラスの直積に正則同型となることが示された ([4]). しかし, コンパクト擬ケーラー等質複素多様体は旗多様体と複素トーラスの直積とは限らないことが 2005 年に著者により示され, 擬ケーラー構造をもつ複素平行化可能可解多様体の $\mathfrak{h}(M)$ は meta-abelian であることが示された ([12, 13]).

よって, 擬ケーラー構造をもつ等質複素多様体でないコンパクト複素等質多様体 M (複素構造をもつ等質空間であるが, 複素構造を保つ群が推移的とは限らない多様体) の $\mathfrak{h}(M)$ やホッジ数の性質が次に興味がでてくる研究対象の 1 つとなる. その際, ベキ零多様体である小平-サーストン多様体のように擬ケーラー構造や正則シンプレクティック構造などの複

数の複素幾何的構造をもつものは扱いやすいと考えた．その際に 1 つの実ベキ零多様体上の 2 つの複素構造により, 2 つの複素多様体 M_1, M_2 を構成すると, 任意の s, t においてホッジ数が $h^{s,t}(M_1) = h^{t,s}(M_2)$ となり, ホッジ対称性, ミラー対称性の類似が成り立つこと, また擬ケーラー構造と正則シンプレクティック構造が互いにうつりあう場合があることを示した ([18, 14]).

一方, 等質多様体上の複素構造については様々な研究がなされている. 旗多様体上の不変複素構造は $\mathfrak{t}$-ルートを用いて代数的に分類できる ([1]). コンパクト可解多様体に関しても中村による研究が 1970 年代にあり, 複素平行化可能多様体の変形は複素平行化可能とは限らないことなどが示されている ([7]). また可解多様体の特別な場合になるベキ零多様体の不変複素構造に関しては, S. M. Salamon らによる研究がある ([11]). しかし, べき零リー環の分類を用いており, 高次元の場合は十分に研究されていない. さらに変形に関してはベキ零多様体上の不変な複素構造の変形がふたたび不変な複素構造となるための十分条件が Console-Fino や Rollenske により与えられている ([3], [9]). 同じ Console-Fino の論文では, ドルボコホモロジー群に関する野水型の定理, すなわち不変な複素構造を持つベキ零多様体のドルボーコホモロジー群がそのベキ零リー環のコホモロジー群と同型となるための十分条件が与えられている.

以上のことからコンパクト等質多様体上の異なる不変複素構造をホッジ数を用いて比較することや, その上の不変複素構造を代数的に分類することなどに興味がでてくる. 本論文ではコンパクトベキ零多様体においてこの問いについて得られた結果を紹介する. なお, 本論文のみで著者の関連論文の内容がある程度わかるようにするため, 以前に講究録等で記載した内容もいくつか述べる.

2　複素構造の構成とホッジ数計算のアイデア

主結果等の詳細を述べる前に, 複数の複素構造をもつリー環の構成とそのリー環のドルボーコホモロジー群の次元の計算方法のアイデアを述べる.

アイデアは次の通りである.

1. 実リー環 $\mathfrak{g}$ とその部分リー環への直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ を考える.

2. 実リー環 $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ を考え, さらに複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ を実リー環 $_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ と思う.

3. 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ を利用して, 実リー環 $_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ 上に複素構造 $\tilde{J}$ を構成する ($\tilde{J}$ の $\pm\sqrt{-1}$-固有空間になる部分ベクトル空間を, $\tilde{J}$ より先に与える).

4. 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ を利用して, あらたに実リー環をいくつか構成する ($\mathfrak{a}$ 部分を可換化した $\mathfrak{g}_{\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{b}$ 部分を可換化した $\mathfrak{g}_{\mathfrak{b}}$, 直積 $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ など).

5. $(_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}), \tilde{J})$ のドルボーコホモロジー群と上で構成した実リー環のコホモロジー群を結びつける (D.G.A. の簡単な議論).

6. 実リー環のコホモロジー群を経由して, $_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ 上の異なる複素構造 $\tilde{J}_1$, $\tilde{J}_2$ のドルボーコホモロジー群を関連づける.

この際, $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{g}$ の部分リー環より, $\tilde{J}$ の可積分性が導かれ, 一方, $\bar{\partial}_{\tilde{J}}^2 = 0$ から, $\mathfrak{g}_{\mathfrak{a}}$ と $\mathfrak{g}_{\mathfrak{b}}$ がリー環であることが導かれる.

3 コンパクトベキ零複素多様体のドルボーコホモロジー群について

この節ではコンパクトベキ零複素多様体のドルボーコホモロジー群に関して知られている結果をいくつか紹介する.

N を単連結かつ連結なべき零リー群とし, $\mathfrak{n}$ をそのリー環とする. N が余コンパクト離散部分群をもつためには, 有理数体上のリー環 $\mathfrak{n}_{\mathbb{Q}}$ で $\mathfrak{n} \cong \mathfrak{n}_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R}$ を満たすものが存在することが必要十分である ([8]). また, $\mathfrak{n}$ の複素構造 J は, 有理数体上のリー環 $\mathfrak{n}_{\mathbb{Q}}$ に対して, $J(\mathfrak{n}_{\mathbb{Q}}) \subset \mathfrak{n}_{\mathbb{Q}}$ を満たすとき, 有理複素構造と呼ばれる. 特に余コンパクト離散部分群 Γ に対応する有理数体上のリー環 $\mathfrak{n}_{\mathbb{Q}}$ に対して, $J(\mathfrak{n}_{\mathbb{Q}}) \subset \mathfrak{n}_{\mathbb{Q}}$ を満たすとき, Γ に対応する有理複素構造と呼ばれる. $\mathfrak{n}$ の有理複素構造 J からリー群 N に誘導される左不変な複素構造も N の有理複素構造と呼ぶことにする. $\mathfrak{n}^{\pm}$ で複素構造 J に関する $\pm\sqrt{-1}$ 固有空間をそれぞれ表すことにする.

以下, ベキ零リー群は常に単連結かつ連結を仮定する.

定理 3.1 ([10])**.** N を複素ベキ零リー群とし, Γ を N の余コンパクト離散部分群とする. このとき, 任意の s,t に対して,

$$H_{\bar\partial}^{s,t}(\Gamma\backslash N) \cong H_{\bar\partial}^{0,t}(\mathfrak{n}^-) \otimes \bigwedge^s (\mathfrak{n}^+)^* \cong H^t(\mathfrak{n}^-) \otimes \bigwedge^p (\mathfrak{n}^+)^*$$

が成り立つ.

定理 3.2 ([3])**.** N をベキ零リー群, Γ を N の余コンパクト離散部分群とし, J を Γ に対応する有理複素構造とする. このとき, 任意の s,t に対して

$$H_{\bar\partial}^{s,t}(\Gamma\backslash N) \cong H_{\bar\partial}^{s,t}(\mathfrak{n}^{\mathbb{C}})$$

が成り立つ.

以上の結果より, 適当な条件のもとでベキ零リー環のドルボーコホモロジー群とそれから誘導されるベキ零多様体のドルボーコホモロジー群を結びつけられる. 本論文では, N 上の左不変な複素構造から $\Gamma\backslash N$ 上に誘導される複素構造を不変な複素構造と呼ぶ.

4 モデルとなるベキ零リー群

現象のモデルとなるベキ零リー群とその左不変複素構造を述べる.

ベキ零リー群 N として

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_3 \\ 0 & 1 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, z_i \in \mathbb{C} \right\}$$

を考える. 複素変数であるが実ベキ零リー群と考えて, N 上の複素座標系として,

$$\varphi_1 : \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_3 \\ 0 & 1 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3,\ \varphi_2 : \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_3 \\ 0 & 1 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (\bar z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$$

を考える. このとき, N の群構造はそれぞれの複素座標系において

$$(z_1, z_2, z_3) \cdot (w_1, w_2, w_3) = (z_1 + w_1, z_2 + w_2, z_3 + z_1 w_2 + w_3),$$
$$(z_1, z_2, z_3) \cdot (w_1, w_2, w_3) = (z_1 + w_1, z_2 + w_2, z_3 + \bar z_1 w_2 + w_3)$$

と書ける． $\mathcal{S}_1 = \{(N, \varphi_1)\}$, $\mathcal{S}_2 = \{(N, \varphi_2)\}$ とする． このとき, $N_1 = (N, \mathcal{S}_1)$ と $N_2 = (N, \mathcal{S}_2)$ は実リー群としては同型であるが, 複素構造をもつリー群としては同型ではない. また, $\Gamma\backslash N_1$ と $\Gamma\backslash N_2$ は複素多様体としては双正則同値ではない. ここで Γ は

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \mu_1 & \mu_3 \\ 0 & 1 & \mu_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, \mu_i \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}] \right\}$$

で定義される N の余コンパクト離散部分群とする. このとき, 任意の s, t に対して,

$$h^{s,t}(\Gamma\backslash N_1) = h^{t,s}(\Gamma\backslash N_2)$$

が成り立つ. 特に, 任意の r に対して,

$$\sum_{s+t=r} h^{s,t}(\Gamma\backslash N_1) = \sum_{s+t=r} h^{s,t}(\Gamma\backslash N_2)$$

となる. 研究の初期の動機の 1 つは, このようなことが, いつどの程度成り立つか, また複数の不変複素構造の構成法の確立であった.

5　複素化されたリー環の複素構造

この節では, リー環の複素化と実制限から新たに複素構造を構成する方法を紹介する.

実リー環 $\mathfrak{g}$ とその部分リー環 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ で, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \{0\}$ かつ

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$$

となるものを考える. さらに, $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ の基底を考える:

$$\mathfrak{a} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{U_1^1, \ldots, U_p^1\},$$
$$\mathfrak{b} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{V_1^1, \ldots, V_q^1\}.$$

リー環 $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ を考えると $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} + \sqrt{-1}\mathfrak{g}$ であるから, 複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の係数体を実数体に制限した ${}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ は次のような基底をもつ:

$$\{U_1^1, \ldots, U_p^1, V_1^1, \ldots, V_q^1, U_1^2, \ldots, U_p^2, V_1^2, \ldots, V_q^2\},$$

ただし $U_i^2=\sqrt{-1}U_i^1$, $V_j^2=\sqrt{-1}V_j^1$ とする. ここで,

$$\{\alpha_1^1,\dots,\alpha_p^1,\beta_1^1,\dots,\beta_q^1,\alpha_1^2,\dots,\alpha_p^2,\beta_1^2,\dots,\beta_q^2\}$$

を

$$\{U_1^1,\dots,U_p^1,V_1^1,\dots,V_q^1,U_1^2,\dots,U_p^2,V_1^2,\dots,V_q^2\}$$

の双対基底とする.

$_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ の (概) 複素構造 J を, 各 i,j に対して

$$JU_i^1=U_i^2\ (JU_i^2=-U_i^1),\ JV_j^1=V_j^2\ (JV_j^2=-V_j^1)$$

により定義する. このとき $(_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}),J)$ は複素リー環となる. ここで,

$$\lambda_i=\alpha_i^1+\sqrt{-1}\alpha_i^2,\ \mu_j=\beta_j^1+\sqrt{-1}\beta_j^2$$

とおくと, $\mathfrak{g}$ が実リー環であるから,

$$d\lambda_i=-\sum_{k,h}C_{kh}^i\lambda_k\wedge\lambda_h-\sum_{k,s}D_{ks}^i\lambda_k\wedge\mu_s,d\mu_j=-\sum_{s,t}E_{st}^j\mu_s\wedge\mu_t-\sum_{k,s}F_{ks}^j\lambda_k\wedge\mu_s$$

としたとき, $C_{kh}^i,D_{ks}^i,E_{st}^j,F_{ks}^j$ はすべて実数となる.

さて, $_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ 上の異なる概複素構造 $\tilde{J}$ を各 i,j に対して

$$\tilde{J}U_i^1=-U_i^2\ (\tilde{J}U_i^2=U_i^1),\ \tilde{J}V_j^1=V_j^2\ (\tilde{J}V_j^2=-V_j^1)$$

により定義する. 関連して,

$$\xi_i=\alpha_i^1-\sqrt{-1}\alpha_i^2,\ \eta_j=\beta_j^1+\sqrt{-1}\beta_j^2$$

とおく. $\bigwedge_{\tilde{J}}^{s,t}=\bigwedge_{\tilde{J}}^{s,t}(_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}))^*$ で, $_{\mathbb{R}}(G^{\mathbb{C}})$ 上の左不変な $\tilde{J}$ に関する (s,t)-形式全体のなす空間を表すことにする. このとき, $\xi_i,\eta_j\in\bigwedge_{\tilde{J}}^{1,0}$ であり,

$$\bar{\partial}\xi_i=-\sum_{k,s}D_{ks}^i\xi_k\wedge\bar{\eta}_s,\bar{\partial}\eta_j=-\sum_{k,s}F_{ks}^j\bar{\xi}_k\wedge\eta_s, \qquad (1)$$

$$\bar{\partial}\bar{\xi}_i=-\sum_{k,h}C_{kh}^i\bar{\xi}_k\wedge\bar{\xi}_h,\ \bar{\partial}\bar{\eta}_j=-\sum_{s,t}E_{st}^j\bar{\eta}_s\wedge\bar{\eta}_t$$

となる.

$_{\mathbb{R}}(G^{\mathbb{C}})$ を $_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ に対応する単連結なリー群とする. このとき, 次が成り立つ:

命題 5.1 ([19]). $\tilde{J}$ は $_{\mathbb{R}}(G^{\mathbb{C}})$ 上の可積分な概複素構造である. J が有理概複素構造であるならば, $\tilde{J}$ もまた有理概複素構造である.

次の節で, 可積分に関して代数的な証明を与える.

6　主結果１：複素構造とリー環の分解

ここでは, 前節で構成した概複素構造の可積分性, および部分リー環による分解と複素構造の関係について述べる.

以下, 単に複素構造と書いた場合は可積分なものとする. 次の結果がなりたつ.

定理 6.1. $\mathfrak{g}$ を実リー環とする. このとき, 部分リー環 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ による直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ 全体のなす集合と $\mathfrak{h} = {}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ の可積分な複素構造全体のなす集合には $1:1$ 対応がある.

この定理の証明に関連して, 次の命題はよく知られている:

命題 6.2. 実リー群 H が左不変な複素構造をもつための必要十分条件の一つは $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ が直和分解

$$\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{q} \oplus \tau\mathfrak{q}$$

で, $\mathfrak{q}$ が $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ の複素部分リー環であるものをもつことである. ここで, τ は複素共役とする.

命題 6.3. J を実リー環 $\mathfrak{h}$ 上の両側不変な複素構造とする. $\mathfrak{h}$ の部分リー環 $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{m}$ を

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}, \mathfrak{k} \cap \mathfrak{m} = \{0\}, J(\mathfrak{k}) \subset \mathfrak{k}, J(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$$

をみたすものとする. ここで,

$$\mathfrak{q} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{X - \sqrt{-1}JX, Y + \sqrt{-1}JY \mid X \in \mathfrak{k}, Y \in \mathfrak{m}\}$$

とおく. このとき, $\mathfrak{q}$ は $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ の部分リー環で, $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{q} \oplus \tau\mathfrak{q}$ をみたし, $\tilde{J} = -\sqrt{-1}\,\mathrm{id}_{\mathfrak{q}} \oplus \sqrt{-1}\,\mathrm{id}_{\tau\mathfrak{q}}$ は $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ 上の可積分な複素構造である.

証明. $\mathrm{ad}(X) \circ J = J \circ \mathrm{ad}(X)$ であるから, $\mathfrak{q}$ は $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ の部分リー環である. □

実リー環 $\mathfrak{g}$ と部分リー環 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ による直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ を考える. 実リー環 ${}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ の複素構造 $\tilde{J}$ を, 記載方法が異なるが前節で,

$$\tilde{J} = \begin{cases} -J & \text{on} \quad {}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}^{\mathbb{C}}) \\ J & \text{on} \quad {}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{b}^{\mathbb{C}}) \end{cases}$$

で定義した. このとき,

$$\mathfrak{q} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{X - \sqrt{-1}JX, Y + \sqrt{-1}JY \mid X \in {}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}^{\mathbb{C}}), Y \in {}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{b}^{\mathbb{C}})\}$$

とすれば, 命題 6.3 より, $\tilde{J}$ は可積分である. したがって, 命題 5.1 が示された. 逆に, $_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ の可積分な複素構造 $\tilde{J}$ に対して, $_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ の部分リー環による直和分解 $_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) = \mathfrak{q} \oplus \tau\mathfrak{q}$ が, 命題 6.2 より存在する. この分解から $\mathfrak{g}$ の部分リー環による直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ が得られる. したがって, 定理 6.1 が得られる.

前節の記号 $C^i_{kh}, D^i_{ks}, E^j_{st}, F^j_{ks}$ をもちいて, リー環 $\mathfrak{g}_{\mathfrak{a}}, \mathfrak{g}_{\mathfrak{b}}$ を双対空間 $\mathfrak{g}^*_{\mathfrak{a}} = \mathrm{span}\{\mu^0_1, \ldots, \mu^0_{\mathrm{p}}, \nu^0_1, \ldots, \nu^0_{\mathrm{q}}\}$, $\mathfrak{g}^*_{\mathfrak{b}} = \mathrm{span}\{\mu^1_1, \ldots, \mu^1_{\mathrm{p}}, \nu^1_1, \ldots, \nu^1_q\}$ がそれぞれ構造方程式

$$d\mu^0_i = -\sum_{k,s} D^i_{ks}\mu^0_k \wedge \nu^0_s,\ d\nu^0_j = -\sum_{s,t} E^j_{ks}\nu^0_s \wedge \nu^0_t, \tag{2}$$

$$d\mu^1_i = -\sum_{k,h} C^i_{kh}\mu^1_k \wedge \mu^1_h,\ d\nu^1_j = -\sum_{k,s} F^j_{ks}\mu^1_k \wedge \nu^1_s \tag{3}$$

をみたすもので定める. 実際, $\bigwedge^{*,*}_{\tilde{J}}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^*$ 上で $\bar{\partial}^2 = 0$ であるから, $\bigwedge^1 \mathfrak{g}^*_{\mathfrak{a}}$ と $\bigwedge^1 \mathfrak{g}^*_{\mathfrak{b}}$ でそれぞれ $d^2 = 0$ が成り立つ. これは $\mathfrak{g}_{\mathfrak{a}}, \mathfrak{g}_{\mathfrak{b}}$ がリー環であることを示す.

7 主結果 2： コホモロジー環の関係

ここでは, $_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ 上の複数の複素構造とそのホッジ数を, 最初の実リー環 $\mathfrak{g}$ の部分リー環 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ による直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ と関連付けて述べる. なお, $\mathfrak{h} = {}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ に対して, $\mathfrak{g}$ と $\tilde{J}$ を強調するため, $H^{s,t}_{\bar{\partial}_{\tilde{J}}}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$ の代わりに $H^{s,t}_{\bar{\partial}}(\mathfrak{g}_{\tilde{J}})$ と書くことにする (ここで, 外微分 d の $\tilde{J}$ に関する自然な分解 $d = \partial_{\tilde{J}} + \bar{\partial}_{\tilde{J}}$ を考えている).

分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ に対応する複素構造 $\tilde{J}$ の代わりに, 複素構造 $-\tilde{J}$ を考えることはリー環の分解では何に対応するか考えよう. これは分解において, $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ の役割を入れ替えることに対応する. このとき, 次が成り立つ.

補題 7.1 ([19])**.** 任意の s, t に対して,

$$H^{s,t}_{\bar{\partial}}(\mathfrak{g}_{\tilde{J}}) \cong H^{s,t}_{\bar{\partial}}(\mathfrak{g}_{-\tilde{J}})$$

が成り立つ.

この補題より, もし $\dim H^{s,t}_{\bar{\partial}}(\mathfrak{g}_{\tilde{J}})$ が $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ に関する量で記述できる場合, 次の定理等のように, その中で $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ の役割を入れ替えることができなければならない.

前節の記号をもちいて，この補題の証明を述べる．まず $\xi_i = \bar{\lambda}_i, \eta_j = \mu_j \in \bigwedge_{\tilde{J}}^{1,0}$ に注意する．さらに，$\xi'_i = \lambda_i, \eta'_j = \bar{\mu}_j$ とすると，$\xi'_i, \eta'_j \in \bigwedge_{-\tilde{J}}^{1,0}$ であり，また，$C^i_{kh}, D^i_{ks}, E^j_{st}, F^j_{ks}$ が実数であることに注意すれば，

$$\begin{aligned}
d\xi_i = d\bar{\lambda}_i &= -\sum_{k,h} C^i_{kh}\bar{\lambda}_k \wedge \bar{\lambda}_h - \sum_{k,s} D^i_{ks}\bar{\lambda}_k \wedge \bar{\mu}_s \\
&= -\sum_{k,h} C^i_{kh}\xi_k \wedge \xi_h - \sum_{k,s} D^i_{ks}\xi_k \wedge \bar{\eta}_s, \\
d\eta_j = d\mu_j &= -\sum_{s,t} E^j_{st}\eta_s \wedge \eta_t - \sum_{k,s} F^j_{ks}\bar{\xi}_k \wedge \eta_s, \\
d\xi'_i = d\lambda_i &= -\sum_{k,h} C^i_{kh}\xi'_k \wedge \xi'_h - \sum_{k,s} D^i_{ks}\xi'_k \wedge \bar{\eta'}_s, \\
d\eta'_j = d\bar{\mu}_j &= -\sum_{s,t} E^j_{st}\bar{\mu}_s \wedge \bar{\mu}_t - \sum_{k,s} F^j_{ks}\bar{\lambda}_k \wedge \bar{\mu}_s \\
&= -\sum_{s,t} E^j_{st}\eta'_s \wedge \eta'_t - \sum_{k,s} F^j_{ks}\bar{\xi'}_k \wedge \eta'_s
\end{aligned}$$

を得る．したがって，$\{\xi_i, \eta_j\}$ と $\{\xi'_i, \eta'_j\}$ は同じ構造方程式をみたす．故に，任意の s, t に対して，$H^{s,t}_{\bar{\partial}}(\mathfrak{g}_{\tilde{J}}) \cong H^{s,t}_{\bar{\partial}}(\mathfrak{g}_{-\tilde{J}})$ をえる．

準同型写像 F を

$$F : \bigoplus_r \Big(\bigoplus_{s+t=r} \bigwedge^{s,t} (\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})^*\Big) \longrightarrow \bigoplus_r \bigwedge^{r} ((\mathfrak{g}_{\mathfrak{a}} \times \mathfrak{g}_{\mathfrak{b}})^{\mathbb{C}})^*)$$

で，同型な線型写像 $(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})^* \longrightarrow ((\mathfrak{g}_{\mathfrak{a}} \times \mathfrak{g}_{\mathfrak{b}})^{\mathbb{C}})^*$,

$$\bar{\xi}_i \mapsto \mu^1_i,\ \eta_j \mapsto \nu^1_j,\ \xi_i \mapsto \mu^0_i,\ \bar{\eta}_j \mapsto \nu^0_j\ (i = 1, \ldots, p, j = 1, \ldots, q)$$

から誘導される写像とする．このとき，上記の恒等式 (1), (2), (3) から F は D.G.A.(differential graded algebra) として同型写像となる．写像 F の制限 $F\,\big|\bigwedge^{0,t}$ と F 自身をそれぞれ用いると，次の結果が成り立つことが示せる．

定理 7.2. 任意の t に対して，

$$h^{0,t}(\mathfrak{g}_{\tilde{J}}) = \dim H^t(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})$$

が成り立つ．

定理 7.3 ([19]). 任意の r に対して,

$$\sum_{s+t=r} h^{s,t}(\mathfrak{g}_{\tilde{J}}) = \dim H^r(\mathfrak{g}_{\mathfrak{a}} \times \mathfrak{g}_{\mathfrak{b}})$$

が成り立つ.

$Z_d^k(\mathfrak{g}_{\mathfrak{a}})$ と $Z_d^k(\mathfrak{g}_{\mathfrak{b}})$ をそれぞれ $\mathfrak{g}_{\mathfrak{a}}$ と $\mathfrak{g}_{\mathfrak{b}}$ の d-閉な k-形式全体のなす集合とする. さらにこれらの部分空間を

$$Z_d^k(\mathfrak{g}_{\mathfrak{a}})|_{\mathfrak{a}} = Z_d^k(\mathfrak{g}_{\mathfrak{a}}) \cap \bigwedge{}^*\langle \mu_1^0, \ldots, \mu_p^0 \rangle,$$
$$Z_d^k(\mathfrak{g}_{\mathfrak{b}})|_{\mathfrak{b}} = Z_d^k(\mathfrak{g}_{\mathfrak{b}}) \cap \bigwedge{}^*\langle \nu_1^1, \ldots, \nu_q^1 \rangle$$

で定義する. このとき, 次が成り立つ.

命題 7.4 ([19]). 任意の s に対して,

$$h^{s,0}(\mathfrak{g}_{\tilde{J}}) = \sum_{s_1+s_2=s} \dim Z_d^{s_1}(\mathfrak{g}_{\mathfrak{a}})|_{\mathfrak{a}} \cdot \dim Z_d^{s_2}(\mathfrak{g}_{\mathfrak{b}})|_{\mathfrak{b}}$$

が成り立つ.

8 例

ここでは前節の結果を用いて, ホッジ数の具体的な計算に関する例を述べる.

例 8.1 ([16]). $H_{\mathbb{R}}(n)$ を $(2n+1)$-次元実ハイゼンベルグ群とし, そのリー環 $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}(n)$ の基底 $\{X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n, Z\}$ を構造方程式 $[X_i, Y_i] = Z$ $(i = 1, \ldots, n)$ をみたすものとする. 部分リー環 $\mathfrak{a}_k$, $\mathfrak{b}_k$ を

$$\mathfrak{a}_k = \mathrm{span}\{X_1, \ldots, X_k\},$$
$$\mathfrak{b}_k = \mathrm{span}\{X_{k+1}, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n, Z\}$$

とし, 部分リー環による分解 $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}(n) = \mathfrak{a}_k + \mathfrak{b}_k$ に対応する ${}_{\mathbb{R}}(H_{\mathbb{R}}(n)^{\mathbb{C}})$ 上の左不変な複素構造を $\tilde{J}_k$ と書く. 簡単のため, $\mathfrak{h}(n;k) = ({}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}(n)^{\mathbb{C}}), \tilde{J}_k)$ とおく.

$$\mathfrak{g}_{\mathfrak{a}_k} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}(n-k) \times \mathbb{R}^{2k}, \mathfrak{g}_{\mathfrak{b}_k} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}(k) \times \mathbb{R}^{2(n-k)}$$

であるから, 任意の r に対して,

$$\sum_{s+t=r} h^{s,t}(\mathfrak{h}(n;k)) = \dim H^r(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}(k) \times \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}(n-k) \times \mathbb{R}^{2n})$$

が成り立つ. 右辺における対称性から, 特に任意の r に対して,

$$\sum_{s+t=r} h^{s,t}(\mathfrak{h}(n;k)) = \sum_{s+t=r} h^{s,t}(\mathfrak{h}(n;n-k))$$

を得る. この結果は, A 型のルート系から構成されるある種のベキ零リー環の場合に拡張できる ([17]).

注意 8.2. 実リー環の直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ において, $\mathfrak{b}$ が可換なイデアルのとき, 任意の r に対して

$$\sum_{s+t=r} h^{s,t}(\mathfrak{g}_J) = \sum_{s+t=r} h^{s,t}(\mathfrak{g}_{\tilde{J}})$$

が成り立つ. これ以外にも, 同様な条件のもと J と $\tilde{J}$ に関するホッジ数に幾つかの関係式が成り立つ ([16]).

例 8.3. $X_{ij} = E_{ij} \in M(4,\mathbb{R})$ $(1 \leq i < j \leq 4)$ とする. ただし, E_{ij} は行列単位とする. ベキ零リー環 $\mathfrak{n}(3) = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{X_{ij}\}_{1\leq i<j\leq 4}$ を考え, さらに次の $\mathfrak{n}(3)$ の部分リー環を考える:

$$\mathfrak{a} = \mathrm{span}\{X_{13}, X_{23}\}, \mathfrak{b} = \mathrm{span}\{X_{12}, X_{14}, X_{24}, X_{34}\}.$$

このとき, $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ は $\mathfrak{n}(3) = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, および $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \{0\}$ を満たす. 従って, 次の左不変な複素構造をもつベキ零リー群が得られる:

$$({}_{\mathbb{R}}(N(3)^{\mathbb{C}}), \tilde{J}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z_{12} & \bar{z}_{13} & z_{14} \\ 0 & 1 & \bar{z}_{23} & z_{24} \\ 0 & 0 & 1 & z_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, z_{ij} \in \mathbb{C} \right\}.$$

このとき,

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \cong \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}(1) \times \mathbb{R}^3, \, \mathfrak{g}_{\mathfrak{a}} \cong \mathfrak{g}_{\mathfrak{b}} \cong \mathfrak{h}(1,2) \times \mathbb{R}^1$$

となる. ここで, $\mathfrak{h}(1,2)$ は 5 次元の一般化されたハイゼンベルグ・リー環である. つまり, $\mathfrak{h}(1,2) = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{X_1, X_2, Y, Z_1, Z_2\}$ で構造方程式 $[X_i, Y] = Z_i$ $(i = 1,2)$ をもつ. よって,

$$h^{0,t}(\mathfrak{n}(3)_{\tilde{J}}) = \dim H^t(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}(1) \times \mathbb{R}^3),$$
$$\sum_{s+t=r} h^{s,t}(\mathfrak{n}(3)_{\tilde{J}}) = \dim H^r(\mathfrak{h}(1,2) \times \mathfrak{h}(1,2) \times \mathbb{R}^2)$$

となる. また直接計算により,

$$\dim Z^1_d(\mathfrak{g}_\mathfrak{a})|_\mathfrak{a} = \dim Z^2_d(\mathfrak{g}_\mathfrak{a})|_\mathfrak{a} = 1,$$
$$\dim Z^1_d(\mathfrak{g}_\mathfrak{b})|_\mathfrak{b} = 2, \dim Z^2_d(\mathfrak{g}_\mathfrak{b})|_\mathfrak{b} = \dim Z^3_d(\mathfrak{g}_\mathfrak{b})|_\mathfrak{b} = 3 \ \dim Z^4_d(\mathfrak{g}_\mathfrak{b})|_\mathfrak{b} = 1.$$

となり, ゆえに

$$h^{1,0}(\mathfrak{n}(3)_{\tilde{J}}) = 3, \quad h^{2,0}(\mathfrak{n}(3)_{\tilde{J}}) = 6, \quad h^{3,0}(\mathfrak{n}(3)_{\tilde{J}}) = 8,$$
$$h^{4,0}(\mathfrak{n}(3)_{\tilde{J}}) = 7, \quad h^{5,0}(\mathfrak{n}(3)_{\tilde{J}}) = 4, \quad h^{6,0}(\mathfrak{n}(3)_{\tilde{J}}) = 1$$

を得る.

参考文献

[1] D. V. Alekseevsky, *Flag manifolds*, 11th Yugoslav Geometrical Seminar (Divičbare, 1996), Zb. Rad. Mat. Inst. Beograd. (N. S.) 6 (14) (1997), 3–35.

[2] A. Borel and R. Remmert, *Über kompakte homogene Kählersche Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. **145** (1961/1962) 429–439.

[3] S. Console and A. Fino, *Dolbeault cohomology of compact nilmanifolds*, Transform. Groups **6** (2001), 111–124.

[4] J. Dorfmeister and Z.-D. Guan, *Classification of compact homogeneous pseudo-Kähler manifolds*, Comment. Math. Helv. **67** (1992), 499–513.

[5] Y. Matsushima, *Sur les espaces homogènes kählériens d'un groupe de Lie réductif*, Nagoya Math. J. **11** (1957), 53–60.

[6] Y. Matsushima, *Holomorphic vector fields on compact Kähler manifolds*, Conference board of mathematical sciences regional conference series in mathematics, No. 7., Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1971. vi+38 pp.

[7] I. Nakamura, *Complex parallelisable manifolds and their small deformations*, J. Differential Geom. **10** (1975), 85–112.

[8] M. S. Raghunathan, Discrete subgroups of Lie groups, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 68, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972. ix+227 pp.

[9] S. Rollenske, *Lie-algebra Dolbeault-cohomology and small deformations of nilmanifolds*, J. Lond. Math. Soc. **79** (2009), 346–362.

[10] Y. Sakane, *On compact complex parallelisable solvmanifolds*, Osaka J. Math. **13** (1976), 187–212.

[11] S. M. Salamon, *Complex structures on nilpotent Lie algebras*, J. Pure. Appl. Algebra **157** (2001), 311–333.

[12] T. Yamada, *A pseudo-Kähler structure on a compact non-toral complex parallelizable solvmanifolds*, Geom. Dedic. **112** (2005), 115–122.

[13] T. Yamada, *A structure theorem of compact complex parallelizable pseudo-Kähler solvmanifolds*, Osaka J. Math. **43** (2006), 923–933.

[14] T. Yamada, *Duality of Hodge numbers of compact complex nilmanifolds*, Complex manifolds **2** (2015), 168–177.

[15] T. Yamada, *Hodge numbers and invariant complex structures of compact nilmanifolds*, Complex manifolds **3** (2016), 193–206.

[16] T. Yamada, *Remarks on Hodge numbers and invariant complex structures of compact nilmanifolds*, Complex manifolds **3** (2016), 271–281.

[17] T. Yamada, *Some relations between Hodge numbers and invariant complex structures on compact nilmanifolds*, Complex manifolds **4** (2017), 73–83.

[18] T. Yamada, *Complex structures and non-degenerate closed 2-forms of compact real parallelizable nilmanifolds*, Osaka J. Math. **54**, (2017), 121–128.

[19] T. Yamada, *Complex structures on the complexification of a real Lie algebra*, Complex manifolds **5** (2018), 150–157.

Department of Mathematics
Shimane University
Nishikawatsu-cho 1060
Matsue, 690-8504, Japan
e-mail: t_yamada@riko.shimane-u.ac.jp