Riemann 多様体における弾性曲線の波動型運動方程式

九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所, 大阪大学名誉教授　小磯憲史
Norihito Koiso
Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University
Professor emeritus, Osaka University

要約. ピアノ線を手本とする曲線を弾性曲線という．その運動方程式は理想化の取り方によっていくつか考えられる．この講演では Caflish & Maddocks [1] が導入した太さのある弾性曲線の波動型運動方程式を紹介し，それを Riemann 多様体上に一般化する手法を解説する．詳しい証明は [4] を参照していただきたい．

1. Euler の弾性曲線

弧長表示の曲線 $\gamma = \gamma(x)$ に **弾性エネルギー** $U(\gamma) := \|\nabla_x \gamma_x\|^2 := \int |\nabla_x \gamma_x|^2\, dx$ を与える．弾性エネルギーが定める Euler-Lagrange 方程式の解を **Euler の弾性曲線** という．

$$-\nabla_x^3 \gamma_x + R(\gamma_x, \nabla_x \gamma_x)\gamma_x = \nabla_x(\mu \gamma_x) \quad (\mu = \mu(x) \text{ は未定関数})$$

Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ の Euler の弾性曲線は $\mathbf{R}^3$ に含まれ，平面閉弾性曲線は円と ∞ 型の 2 種のみ (たぶん Euler) で，空間閉弾性曲線は $\mathbf{Q} \cap [0, 1/2]$ と $1:1$ に対応する．(Langer & Singer [5])

2. 弾性曲線の運動方程式

この材質の曲線の運動を考える．それは Euler の弾性曲線が動くという意味ではなく，弾性エネルギーが支配する曲線の運動方程式を考えるという意味である．

運動方程式は **Hamilton の原理** によって与えられる．即ち，運動方程式は汎関数

$$\int_0^T F(\gamma) - U(\gamma)\, dt \quad (\gamma = \gamma(x, t))$$

の Euler-Lagrange 方程式である．ここで，

$$\begin{aligned} U(\gamma) &= \text{状態エネルギー} = \text{弾性エネルギー } \|\nabla_x \gamma_x\|^2, \\ F(\gamma) &= \text{運動エネルギー } \|\gamma_t\|^2 + \|\nabla_t \gamma_x\|^2 \end{aligned}$$

と定める．この $\|\nabla_t \gamma_x\|^2$ は曲線の太さに起因するもので，Caflish & Maddocks が導入した．

主定理. この運動方程式は解ける．

まず，**Euler-Lagrange 方程式**を求めておく．**第 1 変分公式** は次の通り．

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\int_0^T F(\gamma)-U(\gamma)\,dt=\int_0^T \langle\gamma_t,\nabla_s\gamma_t\rangle+\langle\nabla_t\gamma_x,\nabla_s\nabla_t\gamma_x\rangle-\langle\nabla_x\gamma_x,\nabla_s\nabla_x\gamma_x\rangle\,dt$$
$$=\int_0^T\langle-\nabla_t\gamma_t+\nabla_x\nabla_t^2\gamma_x-\nabla_x^3\gamma_x+\Psi,\gamma_s\rangle\,dt,$$
$$\Psi:=R(\gamma_x,\nabla_x\gamma_x)\gamma_x-R(\gamma_x,\nabla_t\gamma_x)\gamma_t.$$

Euler-Lagrange 方程式は "弧長表示を保つ変分ベクトル場 γ_s に対して第 1 変分 $=0$" という条件であり，それは次のように言い換えていくことができる．

$\iff$ "$(\gamma_x,\nabla_x\gamma_s)=0\Rightarrow$ 第 1 変分 $=0$"

$\iff$ "$\langle\forall u\gamma_x,\nabla_x\gamma_s\rangle=0\Rightarrow$ 第 1 変分 $=0$"

$\iff$ "$\gamma_s\perp\nabla_x(\forall u\gamma_x)\Rightarrow\gamma_s\perp(-\nabla_t\gamma_t+\nabla_x\nabla_t^2\gamma_x-\nabla_x^3\gamma_x+\Psi)$" ($\perp$ は $\int_0^T\langle *,*\rangle\,dt$ に関して)

$\iff$ $(-\nabla_t\gamma_t+\nabla_x\nabla_t^2\gamma_x-\nabla_x^3\gamma_x+\Psi)\in\{\nabla_x(u\gamma_x)\mid\forall u\}$

$\iff$ $-\nabla_t\gamma_t+\nabla_x\nabla_t^2\gamma_x-\nabla_x^3\gamma_x+\Psi=\nabla_x(\mu\gamma_x)\quad(\exists\mu(x,t))$

この最後の方程式を以下 **方程式 (EL)** と呼ぶ．これを解くことが目標である．

$$\text{(EL)}\qquad -\nabla_t\gamma_t+\nabla_x\nabla_t^2\gamma_x-\nabla_x^3\gamma_x+\Psi=\nabla_x(\mu\gamma_x)$$

3. 定理と証明の骨格

ここでは主定理の証明の流れを説明する．まず，次のことは直接計算で確かめられる．

命題 (方程式の分解). 方程式 (EL) の解 γ に対して $\xi:=\gamma_x$, $\eta:=\gamma_t$, $\theta:=\nabla_t^2\xi-\nabla_x^2\xi-(\mu+1)\xi$ とおけば，次の結合系が満たされる．

$$(\mathrm{CS}_0)\qquad\begin{cases}(E_\theta) & -\nabla_x^2\theta+\theta^\perp=\nabla_x\Psi+\Phi,\\ (W_\xi) & (\nabla_t^2\xi-\nabla_x^2\xi)^\perp=\theta^\perp,\quad|\xi|^2=1,\\ (I_\eta) & \nabla_t\eta=\nabla_x\theta+\Psi+\nabla_x\xi,\\ (I_\gamma) & \gamma_t=\eta.\end{cases}$$

ここで，$\Psi=R(\xi,\nabla_x\xi)\xi-R(\xi,\nabla_t\xi)\eta$, $\Phi=(|\nabla_t\xi|^2-|\nabla_x\xi|^2)\xi-R(\xi,\eta)\eta$, $*^\perp:=*-g(*,\xi)\xi$. 逆に，この結合系の解の γ は，十分微分可能であれば，方程式 (EL) の解である．■

これらの方程式を微分可能性が低い仮定の下で解くために **作用素** D_x,D_t を導入する．初期曲線の管状近傍上の正規直交枠 $\{e_i\}$ を用意する．そして，それを用いて $\nabla_{e_i}e_j=\Gamma_i{}^k{}_je_k$, $\xi=\xi^ie_i$, $\eta=\eta^ie_i$ と表示したとき，

$$D_x(p^ie_i):=p_x^ie_i+\Gamma_i{}^k{}_j\xi^ip^je_k,\quad D_t(p^ie_i):=p_t^ie_i+\Gamma_i{}^k{}_j\eta^ip^je_k$$

によって作用素 D_x,D_t を定める．

さらに，(CS_0) の ∇_x,∇_t を D_x,D_t で置き換えた **結合系 (CS)** を考え，実際にはそれを解くことにする．(CS) が完全に解けた後で，その解について $D_x=\nabla_x$, $D_t=\nabla_t$ が示され，従って (CS_0) が解けたことになる．

定理 (短時間解の存在). 曲線 $\gamma_0 \in C^0(x)$ 上に結合系 (CS) の初期値 $\eta_0 \in C^0(x)$, $\xi_0 \in C^1(x)$, $\xi_1 \in C^0(x)$ が与えられ，線素保存条件: $|\xi_0|^2 = 1$, $g(\xi_0, \xi_1) = 0$ と非測地条件: $\|D_x\xi_0\| \neq 0$ を満たされれば，一意な短時間解 $\gamma, \eta \in C_x^0 \cap C_t^1$, $\xi \in C^1$, $\theta \in C_x^1 \cap C_t^0$ が存在する．■

この定理は微分可能性が低い状況で証明しなければならないので，細かい注意を払って評価しなければならない．また，方程式 (E_θ) の評価には，4 節で定義する曲がり量を必要とする．証明の方針は通常のもので，縮小写像の原理に持ち込む．詳しくは 5 節で説明する．この定理の解は微分可能性が低いので，まだ (CS_0) の解にはならない．次の定理によって初めて (CS_0) の解になる．

定理 (解の正則性). 結合系 (CS) の短時間解の初期値が $\gamma_0 \in C^3(x)$, $\eta_0 \in C^2(x)$ で整合条件: $\xi_0 = \gamma_0'$, $\nabla_t\xi(x,0) = \nabla_x\eta_0$ を満たせば，その解は $\gamma_x \equiv \xi$, $\gamma \in C^3$ を満たし，結合系 (CS_0) の解になる．さらに，γ は方程式 (EL) の解になる．■

以上で短時間解の存在が示された．長時間存在はそれを繋ぐことで構成できる．その際，Hamilton の原理の一般論から全エネルギー $F(\gamma) + U(\gamma)$ が保存量であることが効いてくる．

定理 (長時間解の存在). (M, g) が完備なら，上の C^3 短時間解 γ は測地線に近づかない限り無限時間解に延長される．また，初期値が C^∞ なら解も C^∞ である．■

4. 曲がり量

方程式 (E_θ) の評価のために曲線の **曲がり量** $B(\gamma, \xi)$ を導入する．それは長さ L のとき

$$B(\gamma,\xi)^2 := \inf_{\phi}(L\|D_x\phi\|^2 + L^{-1}\|\phi - \xi\|^2), \quad B(\gamma) := B(\gamma, \gamma')$$

で定められる．

1. 曲がり量の最も基本的な性質は測地線を特徴付けることである．即ち，

$$B(\gamma,\xi) = 0 \iff D_x\xi = 0, \quad B(\gamma) = 0 \iff \gamma \text{ は測地線}.$$

2. 方程式 (E_θ) には次の評価式を適用する: θ の方程式 $-D_x(D_x\theta + f) + \theta^\perp = h$ は一意な解を持ち，$\|D_x\xi\|^2$ のみに依存する C を用いて $\sup|\theta|, \sup|D_x\theta| \leq CB^{-4}(\|f\| + \|h\|)$ が成り立つ．

3. 測地線を特徴付ける量としては $\|D_x\xi\|^2$ の方が簡明だが，それは ξ の H^1-位相に依存してしまい，微分可能性の低い仮定では使えない．それに対して $B(\gamma, \xi)$ は γ, ξ の L_2 位相に関して連続である．従って，初期値が $B(\gamma_0, \xi_0) > 0$ を満たせばその $C^0 \times C^0$ 近傍でも $B(\gamma, \xi) > 0$.

以上が証明に用いる基本的な性質である．証明には直接用いないが面白そうな性質を補足しておく．

4. $B(\gamma,\xi) \le 1$. 下限 $B(\gamma,\xi)$ は $-L^2D_x^2\phi+\phi=\xi$ なる ϕ で実現され，$B(\gamma,\xi)=1-L^{-1}\langle\xi,\phi\rangle$.

5. 平面上の単位円 c で $B(c)^2=4\pi^2/(1+4\pi^2)\fallingdotseq 0.975$. 正 n 角形 p_n で $B(p_n)^2=2n\sin^2(\pi/n)\sinh(1/n)/(\cosh(1/n)-\cos(2\pi/n))\to B(c)^2$. $B(p_2)^2\fallingdotseq 0.980$.

6. Euclid 空間において平面内の円が $B(\gamma)$ の最小値を与えると予想される．B は多角形近似可能なので，n 角形の中では正 n 角形が最小であることを示せばこの予想が証明できるが，まだできていない．

5．短時間解存在の証明 — 縮小写像の原理

最後に短時間解の存在の証明を簡単に説明する．

まず，(I_γ) を除き，ξ,η,θ は γ に沿ったベクトル場で，正規直交枠 $\{e_i\}$ で表示する．M_0, M_1, $M_{0,1}$, $M_{1,0}$ をそれぞれ C^0, C^1, $C^0_x\cap C^1_t$, $C^1_x\cap C^0_t$ の $S^1\times[0,T]$ 上の sup ノルムとする．記号 $\{\gamma,\xi,\eta,\theta\}\Rightarrow\{\widetilde{\gamma},\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\widetilde{\theta}\}$ によって，$\{\gamma,\xi,\eta,\theta\}$ を与えて各方程式の解 $\{\widetilde{\gamma},\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\widetilde{\theta}\}$ を求める操作を表す．

$\{\gamma_i,\eta_i,\xi_i,\theta_i\}\Rightarrow\{\widetilde{\gamma}_i,\widetilde{\eta}_i,\widetilde{\xi}_i,\widetilde{\theta}_i\}$ $(i=1,2)$ とし，関数の差を $\delta * := *_2 - *_1$ で表す．そのとき，$M_{0,1}(\delta\gamma), M_1(\delta\xi), M_{0,1}(\delta\eta), M_{1,0}(\delta\theta)\le r$ ならば，次の評価が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&M_{0,1}(\delta\widetilde{\gamma}), M_1(\delta\widetilde{\xi})\le CTr,\\
&M_0(\delta\widetilde{\eta})\le CTr,\quad M_0(\delta\widetilde{\eta}_t)\le Cr,\\
&M_{1,0}(\delta\widetilde{\theta})\le Cr\quad (M_0(\delta\widetilde{\eta}_t)\ \text{には依存しない}).
\end{aligned}
$$

ここで，ほとんどの C は初期値と $M_{0,1}(\gamma), M_1(\xi), M_{0,1}(\eta), M_{1,0}(\theta)$ のみに依存する定数であるが，$M_{1,0}(\delta\widetilde{\theta})$ の C だけは **曲がり量** $B(\gamma,\xi)^{-1}$ にも依存する．

任意に初期条件を満たす関数の組 $\{\gamma,\xi,\eta\}$ をとり，$\{\gamma,\xi,\eta\}\Rightarrow\{\theta\}$, $\{\gamma,\xi,\eta,\theta\}\Rightarrow\{\widetilde{\gamma},\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}\}$ で写像 $\Lambda(\gamma,\xi,\eta):=(\widetilde{\gamma},\widetilde{\xi},\widetilde{\eta})$ を定める．更に，$\{\widetilde{\gamma},\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}\}\Rightarrow\{\widetilde{\theta}\}$, $\{\widetilde{\gamma},\widetilde{\xi},\widetilde{\theta}\}\Rightarrow\{\widetilde{\widetilde{\eta}}\}$ で写像 $\widetilde{\Lambda}(\gamma,\xi,\eta):=(\widetilde{\gamma},\widetilde{\xi},\widetilde{\widetilde{\eta}})$ を定める．すると，上の評価から

$$
M_{0,1}(\delta\widetilde{\gamma})+M_1(\delta\widetilde{\xi})+M_{0,1}(\delta\widetilde{\widetilde{\eta}})\le CT\{M_1(\delta\xi)+M_{0,1}(\delta\eta)+M_{0,1}(\delta\gamma)\}
$$

がなりたつ．即ち，$T<C^{-1}$ のとき $\widetilde{\Lambda}$ は縮小写像であり一意な固定点を持つ．この固定点は Λ の固定点でもあることが示され，結合系 (CS) の解であることがわかる． □

参考文献

[1] R. E. Caflisch and J. H. Maddocks: *Nonlinear dynamical theory of the elastica*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. **A 99** (1984), 1-23.

[2] N. Koiso and M. Sugimoto: *Motion of elastic wire with thickness*, Osaka J. Math. **47** (2010), 787-815.

[3] N. Koiso: *On motion of an elastic wire in a Riemannian manifold and singular perturbation*, Osaka J. Math. **52** (2015), 453—473.

[4] N. Koiso: *Motion of an elastic wire with thickness in a Riemannian manifold*, arXiv:1809.08015.

[5] J. Langer and D. A. Singer: *Curve-straightening in Riemannian manifolds*, Ann. Global Anal. Geom. **5** (1987), 133-150.