LCK 可解多様体における Vaisman 構造と複素構造

沼津高専・教養科　沢井 洋
Hiroshi Sawai
Liberal Arts, National Institute of Technology, Numazu College

1　序章

(M, g, J) をコンパクトなエルミート多様体とする．また, Ω を (g, J) の基本 2 次形式とする．$d\Omega = \omega \wedge \Omega$ を満たす閉 1 次形式 ω が存在するとき, (M, g, J) を局所共形ケーラー多様体といい, 閉 1 次形式 ω を Lee 形式という．また, Lee 形式 ω がレビ・チビタ接続 ∇ に関して平行となるとき, これを Vaisman 多様体という．なお, $\omega = df$ のとき, $(M, e^{-f}g, J)$ はケーラー多様体である．

単連結な可解リー群 G が 格子群 Γ をもつとき, コンパクト多様体 $\Gamma\backslash G$ を可解多様体という．べき零多様体も同様に定義される．可解多様体がケーラー構造をもつならば, 複素トーラス上の複素トーラス束となる ([8], [2])．可解多様体において, ケーラー構造の拡張である局所共形ケーラー構造について報告する．

局所共形ケーラー多様体の例として, Hopf 曲面 [25], 井上曲面 [23], Kodaira-Thurston 多様体 [5], Oeljeklaus-Toma 多様体 [12] が知られている (cf. [6])．Hopf 曲面, Kodaira-Thurston 多様体は Vaisman 多様体であり, 井上曲面, Oeljeklaus-Toma 多様体はこれと異なり, その Lee 形式は平行でない．また, 井上曲面, Oeljeklaus-Toma 多様体は可解多様体, Kodaira-Thurston 多様体はべき零多様体の構造を, それぞれもつ．

複素構造が左不変なべき零多様体が局所共形ケーラー構造をもつならば, これは Kodaira-Thurston 多様体となる [17]．複素構造が左不変でなくても, べき零多様体が Vaisman 構造をもつならば, Kodaira-Thurston 多様体となる [3]．これに対し, 可解多様体上の局所共形ケーラー構造や Vaisman 構造についてはあまりわかっていない．本稿では, 可解多様体上の局所共形ケーラー構造が Vaisman 構造となるための複素構造に関する必要十分条件を考える．

$(M = \Gamma\backslash G, g, J)$ を複素構造が左不変な局所共形ケーラー可解多様体とし, $\mathfrak{g}$ を G のリー環とする．また, その Lee 形式 ω は左不変な閉 1 次形式 ω_0 とコホモローグとする．このとき, 局所共形ケーラー構造 (g, J) は, ω_0 を Lee 形式とする左不変な局所共形ケーラー構造 $(\langle\ ,\ \rangle, J)$ を誘導する [4]．$(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle, J)$ を局所共形ケーラー可解リー環という．

可解リー環 $\mathfrak{g}$ に対し, $\mathfrak{n}$ をその極大べき零イデアルとする．これに関して減少列をとる：

$$\mathfrak{n} \supset \mathfrak{n}^{(1)} = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \supset \mathfrak{n}^{(2)} = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}^{(1)}] \supset \cdots \supset \mathfrak{n}^{(r)} \supset \mathfrak{n}^{(r+1)} = 0,$$

但し, $\mathfrak{n}^{(i+1)} = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}^{(i)}]$ であり, $\mathfrak{n}^{(r)} \neq 0$ とする．

$\mathfrak{a}^{\perp}$ を $\langle\ ,\ \rangle$ に関する $\mathfrak{a}$ の直交補空間とする. 次が成り立つ：

主定理. [22] $(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle, J)$ を局所共形ケーラー可解リー環とする. このとき, 次は同値である：

1. $(\langle\ ,\ \rangle, J)$ は Vaisman 構造である.
2. $J\widetilde{\mathfrak{n}} \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^{\perp}$, 但し, $r \geq 1$ のとき $\widetilde{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}^{(r)}$, $r = 0$ のとき $\widetilde{\mathfrak{n}} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ とする.

べき零多様体である Kodaira-Thurston 多様体は Vaisman 多様体であり [5], 主定理の条件を満たす. さらに, 次が得られる:

系 1. $(\mathfrak{g}, J)$ を複素構造をもつ可解リー環とする. このとき, $JZ \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ を満たす $Z \in \mathfrak{n}^{(r)}$ $(r \geq 1)$ が存在するならば, $(\mathfrak{g}, J)$ は Vaisman 構造をもたない.

系 1 より, 井上曲面 S^{+} は Vaisman 構造をもたないことがわかる (cf. [4], [13]).

系 2. (cf. [10]) 可解リー環 $\mathfrak{g}$ を, $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \ltimes [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, 但し, $\mathfrak{a}$ は可換な部分リー環, とする. このとき, $\dim \widetilde{\mathfrak{n}} > \dim \mathfrak{a}$ ならば, $\mathfrak{g}$ は Vaisman 構造をもたない. 特に, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ が可換なとき, $\dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] > \frac{1}{2} \dim \mathfrak{g}$ ならば, $\mathfrak{g}$ は Vaisman 構造をもたない.

系 2 より, 井上曲面 S^{0}, Oeljeklaus-Toma 多様体は Vaisman 構造をもたないことがわかる (cf. [13]).

2　準備

本章では, 主定理を証明するための準備を述べる.

多様体 M 上の閉 1 次形式 α を用いて, 微分形式の作用素 $d_{\alpha} : A^{p}(M) \to A^{p+1}(M)$ を,

$$d_{\alpha}\beta := \alpha \wedge \beta + d\beta$$

と定義する. α は閉 1 次形式より, $d_{\alpha}^{2} = 0$ を満たす. $d_{\alpha}\beta = 0$ のとき β を α-閉形式, $\beta = d_{\alpha}\gamma$ のとき β を α-完全形式とそれぞれいう. 局所共形ケーラー構造の基本 2 次形式 Ω は, $-\omega \wedge \Omega + d\Omega = 0$ を満たすことから, $-\omega$-閉形式である.

$(M = \Gamma\backslash G, g, J)$ を複素構造が左不変な局所共形ケーラー可解多様体とし, $\mathfrak{g}$ を G のリー環とする. このとき, その Lee 形式 ω に対して, $\omega - \omega_{0} = df$ を満たす左不変な閉 1 次形式 ω_{0} と M 上の C^{∞} 級関数 f が存在すると仮定する. これらを用いて, 左不変なベクトル場 X, Y に対して, 内積を

$$\langle X, Y \rangle = \int_{M} e^{-f} g(X, Y) d\mu,$$

但し, $d\mu$ は G 上の両側不変な体積要素から誘導される M 上の体積要素, と定義する. 複素構造が左不変であることから, 左不変なエルミート構造 $(\langle\ ,\ \rangle, J)$ が誘導される. $(\langle\ ,\ \rangle, J)$ の基本 2 次形式を Ω_{0} とする. 次が成り立つ：

命題 2.1. [4] $d\Omega_0 = \omega_0 \wedge \Omega_0$.

命題 2.1 より, G の可解リー環 $\mathfrak{g}$ 上に ω_0 を Lee 形式とする局所共形ケーラー構造 $(\langle\ ,\ \rangle, J)$ が誘導される. $(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle, J)$ を局所共形ケーラー可解リー環という.

Vaisman 多様体について, 次が成り立つ：

定理 2.2. [11] コンパクトなリーマン多様体 (M, g) において, α をレビ・チビタ接続 ∇ に関して平行な 1 次形式とする. このとき, 任意の α-閉形式は, α-完全形式である.

定理 2.2 より, Vaisman 多様体の Lee 形式は平行であることから, この基本 2 次形式 Ω は $-\omega$-完全形式となる. さらに, 可解多様体の場合について次が成り立つ：

命題 2.3. [18]. $(\Gamma\backslash G, g, J)$ を局所共形ケーラー可解多様体とし, $(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle, J)$ をその局所共形ケーラー可解リー環とする. このとき, Ω が $-\omega$-完全形式ならば, Ω_0 も $-\omega_0$-完全形式となる.

定理 2.2, 命題 2.3 より, $(\Gamma\backslash G, g, J)$ が Vaisman 多様体ならば, $(\langle\ ,\ \rangle, J)$ の基本 2 次形式 Ω_0 は $-\omega_0$-完全形式となる.

3　主定理の証明 1

$(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle, J)$ を前章で得られた局所共形ケーラー可解リー環とし, ω_0 をその Lee 形式とする. 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ によって誘導される $\mathfrak{g}^*$ から $\mathfrak{g}$ への線形写像を γ_0 とし, $A = \gamma_0(\omega_0)$ とおく. また, $\langle A, A\rangle = 1$ と仮定してよい. 本章では, $(\langle\ ,\ \rangle, J)$ が Vaisman 構造ならば, 主定理の条件 2 を満たすことを示す.

可解リー環 $\mathfrak{g}$ に対し, $\mathfrak{n}$ をその極大べき零イデアルとする. これに関して減少列をとる：

$$\mathfrak{n} \supset \mathfrak{n}^{(1)} = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \supset \mathfrak{n}^{(2)} = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}^{(1)}] \supset \cdots \supset \mathfrak{n}^{(r)} \supset \mathfrak{n}^{(r+1)} = 0,$$

但し, $\mathfrak{n}^{(i+1)} = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}^{(i)}]$ であり, $\mathfrak{n}^{(r)} \neq 0$ とする. また, $\widetilde{\mathfrak{n}}$ を $r \geq 1$ のとき $\mathfrak{n}^{(r)}$, $r = 0$ のとき $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ とする.

次が成り立つ：

命題 3.1. $(\langle\ ,\ \rangle, J)$ が Vaisman 構造ならば, その基本 2 次形式 Ω_0 は次で与えられる：

$$\Omega_0 = d_{-\omega_0}\eta_0 = -\omega_0 \wedge \eta_0 + d\eta_0,$$

但し, $\eta_0 = k\omega_0 \circ J (k \in \mathbb{R})$ とする.

Proof. $(\ ,\ )$ を $\langle\ ,\ \rangle$ から誘導される $\wedge\mathfrak{g}^*$ 上の内積とする. 局所共形ケーラー可解リー環において, シュワルツの不等式

$$(\Omega_0, d_{-\omega_0}(\omega_0 \circ J))^2 \leq (\Omega_0, \Omega_0) \cdot (d_{-\omega_0}(\omega_0 \circ J), d_{-\omega_0}(\omega_0 \circ J))$$

が等式となることは, 次と同値である [19]：

$$0 = \langle [A, JA], JA\rangle.$$

したがって, $(\langle\ ,\ \rangle, J)$ が Vaisman 構造ならば,

$$0 = \nabla_{JA}\omega_0(JA) = -\omega_0(\nabla_{JA}JA) = -\langle A, \nabla_{JA}JA\rangle = -\langle [A, JA], JA\rangle$$

となり, 主張を得る. □

$\mathfrak{a}^\perp$ を $\langle\ ,\ \rangle$ に関する $\mathfrak{a}$ の直交補空間とする. 次が成り立つ：

命題 3.2. [18] $(\langle\ ,\ \rangle, J)$ の基本 2 次形式 Ω_0 が,

$$\Omega_0 = d_{-\omega_0}\eta_0 = -\omega_0 \wedge \eta_0 + d\eta_0,$$

但し, $\eta_0 = k\omega_0 \circ J$ $(k \in \mathbb{R})$, と与えられるならば, $J\widetilde{\mathfrak{n}} \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp$ となる.

Proof. $Z \in \widetilde{\mathfrak{n}} \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ と $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ に対して, $[Z, X] = 0$ より,

$$\langle JZ, X\rangle = -\Omega_0(Z, X) = (\omega_0 \wedge \eta_0 - d\eta_0)(Z, X) = 0$$

が成り立つ. □

定理 2.2, 命題 2.3 より, Vaisman 可解多様体 $(\Gamma\backslash G, g, J)$ についても, 命題 3.2 は成り立つことに注意する.

命題 3.1, 命題 3.2 より, 次が成り立つ：

定理 3.3. $(\langle\ ,\ \rangle, J)$ が Vaisman 構造ならば, $J\widetilde{\mathfrak{n}} \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp$ となる.

系 3.4. $(\mathfrak{g}, J)$ を複素構造をもつ可解リー環とする. このとき, $JZ \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ を満たす $Z \in \mathfrak{n}^{(r)}$ $(r \geq 1)$ が存在するならば, $(\mathfrak{g}, J)$ は Vaisman 構造をもたない.

系 3.5. (cf. [10]) 可解リー環 $\mathfrak{g}$ を, $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \ltimes [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, 但し, $\mathfrak{a}$ は可換な部分リー環, とする. このとき, $\dim \widetilde{\mathfrak{n}} > \dim \mathfrak{a}$ ならば, $\mathfrak{g}$ は Vaisman 構造をもたない. 特に, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ が可換なとき, $\dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] > \frac{1}{2}\dim \mathfrak{g}$ ならば, $\mathfrak{g}$ は Vaisman 構造をもたない.

Vaisman 多様体である Kodaira-Thurston 多様体は, $J\widetilde{\mathfrak{n}} \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp$ を満たす. また, 第 6 章において, 系 3.4, 系 3.5 を用いて, 井上曲面や Oeljeklaus-Toma 多様体は Vaisman 構造をもたないことを示す (cf. [4], [10], [13]).

4 条件 2 を満たす局所共形ケーラー可解リー環について

$(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle, J)$ を局所共形ケーラー可解リー環とし, ω_0 をその Lee 形式とする. 本章では, $J\widetilde{\mathfrak{n}} \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp$ を満たす局所共形ケーラー可解リー環 $(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle, J)$ について考える.

各 i について, 任意の $X \in \mathfrak{g}$ の随伴作用によって $\mathfrak{n}^{(i)}$ は保存され, また, $[\widetilde{\mathfrak{n}}, \widetilde{\mathfrak{n}}] = 0$ が成り立つことに注意する. これより, 次を得る：

補題 4.1. $Z, Z' \in \widetilde{\mathfrak{n}}$ に対して, 次が成り立つ：

$$[JZ, Z'] = [JZ', Z], \ [JZ, JZ'] = 0.$$

Proof. $Z, Z' \in \tilde{\mathfrak{n}}$ に対して,

$$\begin{aligned} 0 &= [Z, Z'] + J[JZ, Z'] + J[Z, JZ'] - [JZ, JZ'] \\ &= J\{[JZ, Z'] + [Z, JZ']\} - [JZ, JZ'] \end{aligned}$$

が成り立つ. $[JZ, Z'], [Z, JZ'] \in \tilde{\mathfrak{n}}$ より, $J\{[JZ, Z'] + [Z, JZ']\} \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp$ である. よって, 主張を得る. □

命題 4.2. $U, V, W \in \tilde{\mathfrak{n}}$ に対して,

$$\langle \mathrm{ad}(JU)V, W\rangle + \omega_0(JV)\langle U, W\rangle = \langle V, \mathrm{ad}(JU)W\rangle + \omega_0(JW)\langle U, V\rangle$$

が成り立つ.

Proof. 補題 4.1 より,

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{ad}(JU)V, W\rangle &= -\Omega_0(\mathrm{ad}(JU)V, JW) \\ &= d\Omega_0(JU, V, JW) - \Omega_0([JU, JW], V) + \Omega_0([V, JW], JU) \\ &= \omega_0 \wedge \Omega_0(JU, V, JW) - \Omega_0([JW, V], JU) \end{aligned}$$

となる.

ω_0 が 閉形式で, $\tilde{\mathfrak{n}} \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ であることから,

$$\begin{aligned} \omega_0 \wedge \Omega_0(JU, V, JW) &= \omega_0(JU)\Omega_0(V, JW) + \omega_0(JW)\Omega_0(JU, V) \\ &= -\omega_0(JU)\langle V, W\rangle + \omega_0(JW)\langle U, V\rangle. \end{aligned}$$

となる. さらに, 補題 4.1 より,

$$\begin{aligned} -\Omega_0([JW, V], JU) &= -\Omega_0([JV, W], JU) \\ &= d\Omega_0(JV, W, JU) - \Omega_0([JV, JU], W) + \Omega_0([W, JU], JV) \\ &= \omega_0 \wedge \Omega_0(JV, W, JU) - \Omega_0([JU, W], JV) \\ &= \omega_0(JV)\Omega_0(W, JU) + \omega_0(JU)\Omega_0(JV, W) - \Omega_0([JU, W], JV) \\ &= -\omega_0(JV)\langle W, U\rangle + \omega_0(JU)\langle V, W\rangle + \langle \mathrm{ad}(JU)W, V\rangle \end{aligned}$$

となる. よって,

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{ad}(JU)V, W\rangle = -\omega_0(JU)\langle V, W\rangle + \omega_0(JW)\langle U, V\rangle \\ -\omega_0(JV)\langle W, U\rangle + \omega_0(JU)\langle V, W\rangle + \langle \mathrm{ad}(JU)W, V\rangle \end{aligned}$$

$$\langle \mathrm{ad}(JU)V, W\rangle + \omega_0(JV)\langle U, W\rangle = \langle V, \mathrm{ad}(JU)W\rangle + \omega_0(JW)\langle U, V\rangle$$

が成り立つ. □

$\{Z_1, \cdots, Z_m\}$ を, $\langle\ ,\ \rangle$ に関する $\tilde{\mathfrak{n}}$ の正規直交基底とする. 補題 4.1 と命題 4.2 より, 次が成り立つ：

$$\begin{gathered} \langle \mathrm{ad}(JZ_i)Z_j, Z_j\rangle = \langle \mathrm{ad}(JZ_j)Z_i, Z_j\rangle \\ \langle \mathrm{ad}(JZ_i)Z_i, Z_j\rangle = \langle Z_i, \mathrm{ad}(JZ_i)Z_j\rangle + \omega_0(JZ_j) \quad (j \neq i). \end{gathered}$$

これより, 次を得る：

命題 4.3. [18] 各 i について, $\widetilde{\mathfrak{n}}$ から $\widetilde{\mathfrak{n}}$ への $\{Z_1, \cdots, Z_m\}$ に関する随伴表現 $\mathrm{ad}(JZ_i)$ の表現行列 A_i は次で与えられる：

$$A_i = \begin{array}{cc} & \text{line } i \\ \text{row } i & \begin{pmatrix} a_i^1 & & a_1^i+\omega_0(JZ_1) & & \\ & * & & & \\ & \ddots & \vdots & * & \\ * & & & & \\ a_1^i & \cdots & a_i^i+\omega_0(JZ_i) & \cdots & a_m^i \\ & & & * & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & * & & * & \\ & & a_m^i+\omega_0(JZ_m) & & a_i^m \end{pmatrix} \end{array}. \tag{4.1}$$

可解リー群 G が格子群 Γ をもつならば, これはユニモジュラーである. よって, $r=0$ のときは, 各 A_i はユニモジュラーとなる. さらに, 次を定義する：

定義 4.4. 可解リー環 $\mathfrak{g}$ が強ユニモジュラーであるとは, 任意の $X \in \mathfrak{g}$ における随伴表現 $\mathrm{ad}(X)$ の $\mathfrak{n}^{(i)}$ への制限が, 任意の i についてユニモジュラーとなることである.

Yamada [26] は, 可解リー群 G が格子群 Γ をもつならば, これは強ユニモジュラーであることを示した. よって, $r \geq 1$, 即ち, $\widetilde{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}^{(r)}$ のときも, 各 A_i はユニモジュラーとなる. したがって, 任意の i に対して次が成り立つ：

$$(\sum_j a_i^j) + \omega_0(JZ_i) = 0. \tag{4.2}$$

以上より, 次が成り立つ：

命題 4.5. $\displaystyle\sum_i \omega_0(JZ_i)^2 = 1.$

Proof. 各 i に対して,

$$\begin{aligned} 1 = \langle Z_i, Z_i \rangle &= \Omega_0(JZ_i, Z_i) \\ &= \omega_0 \wedge \Omega_0(A, JZ_i, Z_i) + \omega_0(JZ_i)\Omega_0(A, Z_i) \\ &= d\Omega_0(A, JZ_i, Z_i) + \omega_0(JZ_i)^2 \\ &= -\Omega_0([A, JZ_i], Z_i) + \Omega_0([A, Z_i], JZ_i) - \Omega_0([JZ_i, Z_i], A) + \omega_0(JZ_i)^2 \end{aligned}$$

となる. $J\widetilde{\mathfrak{n}} \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp$ より, $\Omega_0([A, JZ_i], Z_i) = \langle [A, JZ_i], JZ_i \rangle = 0$ である.

さらに, (4.1) から,

$$\begin{aligned} \Omega_0([JZ_i, Z_i], A) &= \langle [JZ_i, Z_i], JA \rangle = \langle \sum_j (a_j^i + \omega_0(JZ_j)) Z_j, JA \rangle \\ &= \sum_j (a_j^i + \omega_0(JZ_j))(-\omega_0(JZ_j)) \\ &= -\sum_j a_j^i \omega_0(JZ_j) - \sum_j \omega_0(JZ_j)^2 \end{aligned}$$

である. これより,

$$
\begin{aligned}
1 &= \langle Z_i, Z_i\rangle \\
1 &= -\langle [A, Z_i], Z_i\rangle + \sum_j a^i_j \omega_0(JZ_j) + \sum_j \omega_0(JZ_j)^2 + \omega_0(JZ_i)^2
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

となる. (4.3) について, i に関して和をとると, ユニモジュラー条件, または, 強ユニモジュラー条件から,

$$
\begin{aligned}
\sum_i 1 &= -\mathrm{tr}\ \mathrm{ad}(A)|_{\widetilde{\mathfrak{n}}} + \sum_{i,\ j} a^i_j \omega_0(JZ_j) + \sum_{i,\ j} \omega_0(JZ_j)^2 + \sum_i \omega_0(JZ_i)^2 \\
m &= 0 + \sum_i (\sum_j a^j_i)\omega_0(JZ_i) + m\sum_i \omega_0(JZ_i)^2 + \sum_i \omega_0(JZ_i)^2
\end{aligned}
$$

となる. よって, (4.2) から,

$$
\begin{aligned}
m &= \sum_i (-\omega_0(JZ_i))\omega_0(JZ_i) + m\sum_i \omega_0(JZ_i)^2 + \sum_i \omega_0(JZ_i)^2 \\
m &= -\sum_i \omega_0(JZ_i)^2 + m\sum_i \omega_0(JZ_i)^2 + \sum_i \omega_0(JZ_i)^2 \\
m &= m\sum_i \omega_0(JZ_i)^2,
\end{aligned}
$$

即ち, $\sum_i \omega_0(JZ_i)^2 = 1$ を得る. □

系 4.6. $A = \sum_i \omega_0(JZ_i)JZ_i \in J\widetilde{\mathfrak{n}}$.

Proof. $\langle A, A\rangle = 1$ による. □

注意 4.7. 可解リー環 $\mathfrak{g}$ が格子群をもつならば, 強ユニモジュラー条件は, その極大正規べき零部分リー環 $\mathfrak{n}$ ついて成り立つ ([15], [26]). したがって, [18] の第 2 章や [19] の第 3 章におけるべき零リー環を, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ではなく, 極大正規べき零部分リー環 $\mathfrak{n}$ に訂正する.

注意 4.8. [18] の第 2 章や [19] の第 3 章における $\mathfrak{n}^{(r)}$ を, $\widetilde{\mathfrak{n}}$, 但し, $r \geq 1$ のとき $\widetilde{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}^{(r)}$, $r = 0$ のとき $\widetilde{\mathfrak{n}} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, と訂正する. 閉 1 次形式 α_0 に対し, $\alpha_0(\widetilde{\mathfrak{n}}) = 0$ となることから, [18] や [19] における結果は成り立つ.

5 主定理の証明 2

本章では, 条件 2 を満たす局所共形ケーラー可解リー環 $(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle, J)$, 即ち, これが $J\widetilde{\mathfrak{n}} \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^{\perp}$ を満たすならば, これは Vaisman 構造となることを示す.

系 4.6 より, $Z_1 = JA$ としてよい. これより, (4.1) は

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \Big(a_{kl}(1)\Big) \\
A_i &= \Big(a_{kl}(i)\Big) + \begin{array}{c} \qquad\qquad \text{line } i \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & -1 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ & & 0 & & \end{pmatrix} \end{array} (i \neq 1),
\end{aligned}
$$

但し, $\Big(a_{kl}(1)\Big)$, $\Big(a_{kl}(i)\Big)$ は対称行列, と表される [18].

補題 4.1 より, 各 i について,

$$
\begin{aligned}
0 &= [[JZ_1, JZ_i], Z_k] \\
&= [[JZ_1, Z_k], JZ_i] + [JZ_1, [JZ_i, Z_k]] \\
&= -\mathrm{ad}(JZ_i) \circ \mathrm{ad}(JZ_1) Z_k + \mathrm{ad}(JZ_1) \circ \mathrm{ad}(JZ_i) Z_k \\
\mathrm{ad}(JZ_i) \circ \mathrm{ad}(JZ_1) Z_k &= \mathrm{ad}(JZ_1) \circ \mathrm{ad}(JZ_i) Z_k
\end{aligned}
$$

となり,

$$
A_1 A_i = A_i A_1 \tag{5.1}
$$

を満たす. (5.1) の $(1,1)$-成分を比較すると,

$$
\sum_l a_{1l}(1) a_{l1}(i) = \sum_l a_{1l}(i) a_{l1}(1) - a_{i1}(1).
$$

を得る. $\Big(a_{kl}(1)\Big)$, $\Big(a_{kl}(i)\Big)$ は対称行列だから, $i \neq 1$ に対して, $a_{i1}(1) = a_{1i}(1) = 0$ が成り立つ. よって,

$$
A_1 = \begin{pmatrix} a_{11}(1) & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & a_{kl}(1) \\ 0 & \end{pmatrix} \tag{5.2}
$$

となる. さらに, (5.1) の $(i,1)$-成分, $(1,i)$-成分を比較すると,

$$
\sum_{l=2} a_{il}(1) a_{l1}(i) = a_{i1}(i) a_{11}(1) \tag{5.3}
$$

$$
a_{11}(1) a_{1i}(i) - a_{11}(1) = \sum_{l=2} a_{1l}(i) a_{li}(1) - a_{ii}(1) \tag{5.4}
$$

である. (5.3) と (5.4) の和をとると,

$$
\sum_{l=2} a_{il}(1) a_{l1}(i) + a_{11}(1) a_{1i}(i) - a_{11}(1) = a_{i1}(i) a_{11}(1) + \sum_{l=2} a_{1l}(i) a_{li}(1) - a_{ii}(1)
$$

となる. $\left(a_{kl}(1)\right), \left(a_{kl}(i)\right)$ は対称行列だから,

$$a_{11}(1) = a_{ii}(1). \tag{5.5}$$

が成り立つ. (5.5) によって, 次を得る：

命題 5.1. $a_{11}(1) = 0$.

Proof. ユニモジュラー条件, または, 強ユニモジュラー条件より,

$$0 = \mathrm{tr}\ \mathrm{ad}(JZ_1)|_{\widetilde{\mathfrak{n}}} = \sum_i a_{ii}(1) = m a_{11}(1),$$

即ち, $a_{11}(1) = 0$ が成り立つ. □

主定理の証明. $J\widetilde{\mathfrak{n}} \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^{\perp}$ を満たす局所共形ケーラー可解リー環は Vaisman であることを示す. 局所共形ケーラー可解リー環について, 次が成り立つ：

定理 5.2. [19] $(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle, J)$ を局所共形ケーラー可解リー環とし, ω_0 をその Lee 形式とする. また, γ_0 を $\langle\ ,\ \rangle$ によって誘導される $\mathfrak{g}^*$ から $\mathfrak{g}$ への同型とする. このとき, $\langle[\gamma_0(\omega_0), J \circ \gamma_0(\omega_0)], J \circ \gamma_0(\omega_0)\rangle = 0$ ならば, $(\langle\ ,\ \rangle, J)$ は Vaisman 構造となる.

(5.2), 及び, 命題 5.1 から, $-\mathrm{ad}(A)|_{\widetilde{\mathfrak{n}}} = \mathrm{ad}(JZ_1)|_{\widetilde{\mathfrak{n}}}$ は

$$-\mathrm{ad}(A)(Z_1, \cdots, Z_m) = (Z_1, \cdots, Z_m) \begin{pmatrix} 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & a_{kl}(1) \\ 0 & \end{pmatrix}$$

となり, 即ち, $[A, JA] = [A, Z_1] = 0$ が成り立つ. よって, 定理 5.2 から, $(\langle\ ,\ \rangle, J)$ は Vaisman 構造となる.

6　局所共形ケーラー可解多様体の例

本章では, 局所共形ケーラー構造をもつ可解多様体を紹介する.
Kodaira-Thurston 多様体は主定理の例である：

例 6.1. (Kodaira-Thurston 多様体 [5]) $\mathfrak{h}(n)$ を $(2n+1)$-次元 Heisenberg リー環とし, べき零リー環 $\mathbb{R} \times \mathfrak{h}(n)$ 上の局所共形ケーラー構造を考える：

$$\mathbb{R} \times \mathfrak{h}(n) = \mathrm{span}\{A, X_i, Y_i, Z\}$$
$$[X_i, Y_i] = Z.$$

べき零リー環 $\mathbb{R} \times \mathfrak{h}(n)$ に対応するべき零リー群 N は格子群 Γ をもつ. べき零多様体 $\Gamma\backslash N$ 上の左不変な複素構造 J を $JA = Z, JX_i = Y_i$, 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を $\{A, X_i, Y_i, Z\}$ を正規直交基底となるもの, と定義すると, $(\Gamma\backslash N, \langle\ ,\ \rangle, J)$ は Vaisman 多様体となる. また, $\widetilde{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}^{(1)} = \mathrm{span}\{Z\}$ で, $JZ = -A \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^{\perp}$ である.

注意 6.2. べき零リー環が局所共形ケーラー構造をもつならば, これは $\mathbb{R}\times\mathfrak{h}(n)$ となる [17].

4 次元可解多様体の複素構造は, 左不変である [7]. 系 3.4, 系 3.5 を用いると, 井上曲面は Vaisman 構造をもたないことがわかる (cf. [4], [13])：

例 6.3. (井上曲面 S^+ ([23], [1], [9])) 4 次元可解リー環 $\mathfrak{s}_1$ を

$$\mathfrak{s}_1 = \mathrm{span}\{A, X, Y, Z\}$$
$$[A, X] = X, [A, Y] = -Y, [X, Y] = Z.$$

とする. 可解リー環 $\mathfrak{s}_1$ に対応する可解リー群 S_1 は格子群 Γ をもち [16], $\dim H^1_{DR}(\Gamma\backslash S_1) = \mathrm{rank}[\Gamma,\Gamma]\backslash\Gamma = \dim H^1(\mathfrak{s}_1) = 1$ を満たす. 可解多様体 $\Gamma\backslash S_1$ 上の左不変な複素構造 J を $JA = X, JZ = Y$, 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を $\{A, X, Y, Z\}$ を正規直交基底となるもの, と定義すると, $(\Gamma\backslash S_1, \langle\ ,\ \rangle, J)$ は, Lee 形式が平行でない局所共形ケーラー多様体となる.

可解多様体 $\Gamma\backslash S_1$ 上の局所共形ケーラー構造の複素構造は, 次のいずれかと仮定してよい ([14], [24])：

$$J_1 : J_1A = X, J_1X = -A, J_1Z = Y, J_1Y = -Z,$$
$$J_2 : J_2A = X + Z, J_2X = -A - Y, J_2Z = Y, J_2Y = -Z.$$

$Z \in \mathfrak{n}^{(1)} = \widetilde{\mathfrak{n}}$ で $J_iZ \in [\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_1] (i = 1, 2)$ より, 系 3.4 から, これは Vaisman 構造をもたない (cf. [4], [13], [21]).

注意 6.4. $(\Gamma\backslash S_1, J_1)$ は, 例 6.3 のように, 局所共形ケーラー構造をもつが, $(\Gamma\backslash S_1, J_2)$ は, 局所共形ケーラー構造をもたない [21].

例 6.3 を拡張して, 次の可解リー環を考える：

例 6.5. [21] $(2n + 2)$-次元可解リー環 $\mathfrak{g}_n$ を

$$\mathfrak{g}_n = \mathrm{span}\{A, X_i, Y_i, Z\}$$
$$[A, X] = a_iX, [A, Y] = -a_iY, [X_i, Y_i] = Z\ (i = 1, 2, \cdots, n),$$

但し, $n \geq 2, a_i \in \mathbb{Z} - \{0\}$ とする. $\mathfrak{g}_n$ に対応する可解リー群 G_n は格子群 Γ をもち, $\dim H^1_{DR}(\Gamma\backslash G_n) = \mathrm{rank}[\Gamma,\Gamma]\backslash\Gamma = \dim H^1(\mathfrak{g}_n) = 1$ を満たす.

次が成り立つ：

命題 6.6. (cf. [21]) $\mathfrak{g}_n$ は局所共形ケーラー構造をもたない.

Proof. $\mathfrak{g}_n$ が局所共形ケーラー構造 $(\langle\ ,\ \rangle, J)$ をもつと仮定し, その Lee 形式を ω_0 とする. $\dim \mathfrak{g}_n/[\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}_n] = 1$ より, $\gamma_0(\omega_0) \in \mathrm{span}\{A\}$ となることに注意する. 各 i に対して,

$$\begin{aligned}\langle JZ, X_i\rangle &= -\langle Z, JX_i\rangle = -\Omega_0(Z, X_i)\\ &= -\Omega_0([X_j, Y_j], X_i) = d\Omega_0(X_j, Y_j, X_i) = \omega_0 \wedge \Omega_0(X_j, Y_j, X_i) = 0\end{aligned}$$

と $\langle JZ, Y_i\rangle = 0$ が成り立つ. よって, $\langle JZ, [\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}_n]\rangle = 0$ となる. ゆえに, $\widetilde{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}^{(1)} = \mathrm{span}\{Z\}$ から, 主定理より, $(\langle\ ,\ \rangle, J)$ は Vaisman 構造となる. Vaisman 完全可解多様体は Kodaira-Thurston 多様体となることから [20], 矛盾する. □

例 6.7. (井上曲面 S^0 [23]) 4 次元可解リー環 $\mathfrak{s}_2$ を

$$\mathfrak{s}_2 = \mathrm{span}\{A, X, Y, Z\}$$
$$[A, X] = 2aX, [A, Y_1] = -aY_1 + bY_2, [A, Y_2] = -aY_2 - bY_1,$$

但し, $e^{2a}, e^{-a+\sqrt{-1}b}, e^{-a-\sqrt{-1}b}$ は $B \in \mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$ の固有値, とする. 可解リー環 $\mathfrak{s}_2$ に対応する可解リー群 S_2 は格子群 Γ をもち [18], $\dim H^1_{DR}(\Gamma\backslash S_2) = \mathrm{rank}[\Gamma, \Gamma]\backslash\Gamma = \dim H^1(\mathfrak{s}_2) = 1$ を満たす. 可解多様体 $\Gamma\backslash S_1$ 上の左不変な複素構造 J を $JA = X, JY_1 = Y_2$, 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を $\{A, X, Y_1, Y_2\}$ を正規直交基底となるもの, と定義すると, $(\Gamma\backslash S_2, \langle\ ,\ \rangle, J)$ は, Lee 形式が平行でない局所共形ケーラー多様体となる. また, $[\mathfrak{s}_2, \mathfrak{s}_2]$ は可換で $\dim[\mathfrak{s}_2, \mathfrak{s}_2] > \frac{1}{2}\dim \mathfrak{s}_2$ より, 系 3.5 から, これは Vaisman 構造をもたない (cf. [10], [13]).

注意 6.8. (cf. [10]) Oeljeklaus-Toma [12] は, 井上曲面 S^0 を拡張して, Lee 形式が平行でない局所共形ケーラー多様体を構成した. これを Oeljeklaus-Toma 多様体という. この多様体は可解多様体の構造をもち, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathbb{R}^{k+2}$ を満たす可解リー環 $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^k \ltimes \mathbb{R}^{k+2}$ によって与えられる. したがって, 系 3.5 より, Oeljeklaus-Toma 多様体は Vaisman 構造をもたない.

参考文献

[1] L. C. de Andrés, L. A. Cordero, M. Fernández and J. J. Mencía : Examples of four dimensional locally conformal Kähler solvmanifolds, Geom. Dedicata **29** (1989), 227-232.

[2] D. Arapura and M. Nori: Solvable fundamental groups of algebraic varieties and Kähler manifolds, Compositio Math, **116** (1999), 173-188.

[3] G. Bazzoni: Vaisman nilmanifolds, Bull. Lond. Math. Soc. **49** (2017), no. 5, 824-830.

[4] F. A. Belgun: On the metric structure of non-Kähler complex surfaces, Math. Ann. **317** (2000), 1-40.

[5] L. A. Cordero, M. Fernández and M. de Léon: Compact locally conformal Kähler nilmanifolds, Geom. Dedicata **21** (1986), 187-192.

[6] S. Dragomir and L. Ornea: *Locally conformal Kähler geometry*, Birkhäuser (1998).

[7] K. Hasegawa: Complex and Kähler structures on compact solvmanifolds, J. Symplectic Geom. **3** (2005), 749-767.

[8] K. Hasegawa: A note on compact solvmanifolds with Kähler structures, Osaka J. Math. **43** (2006), no. 1, 131-135.

[9] Y. Kamishima: Note on locally conformal Kähler surfaces, Geom. Dedicata **84** (2001), no. 1-3, 115-124.

[10] H. Kasuya : Vaisman metrics on solvmanifolds and Oeljeklaus-Toma manifolds, Bull. Lond. Math. Soc. **45** (2013), no. 1, 15-26.

[11] M. de León, B. López, J. C. Marrero and E. Padrón: On the computation of the Lichnerowicz-Jacobi cohomology, J. Geom. Phys. **44** (2003), no. 4, 507-522.

[12] K. Oeljeklaus and M. Toma: Non-Kähler compact complex manifolds associated to number fields, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **55** (2005) 161-171.

[13] A. Otiman: Currents on locally conformally Kähler manifolds, J. Geom. Phys. **86** (2014), 564-570.

[14] G. Ovando: Complex, symplectic and Kähler structures on four dimensional Lie groups, Rev. Un. Mat. Argentina **45** (2004), no. 2, 55-67.

[15] M. S. Raghunathan: *Discrete subgroup of Lie groups*, Springer(1972).

[16] H. Sawai: A construction of lattices on certain solvable Lie groups, Topology Appl. **154** (2007), no. 18, 3125-3134.

[17] H. Sawai: Locally conformal Kähler structures on compact nilmanifolds with left-invariant complex structures, Geom. Dedicata **125** (2007), 93-101.

[18] H. Sawai: Locally conformal Kähler structures on compact solvmanifolds, Osaka J. Math. **49** (2012), no. 4, 1087-1102.

[19] H. Sawai: Vaisman structures on compact solvmanifolds, Geom. Dedicata **178** (2015), 389-404.

[20] H. Sawai: Structure theorem for Vaisman completely solvmanifolds, J. Geom. Phys. **114** (2017), 581-586.

[21] H. Sawai: Examples of solvmanifolds without LCK structures, Complex Manifolds **5** (2018), 103-110.

[22] H. Sawai: Vaisman structures and complex structures on LCK solvmanifolds, preprint.

[23] F. Tricerri: Some examples of locally conformal Kähler manifolds, Rend. Sem. Math. Univ. Politec. Torino **40** (1982), no. 1, 81-92.

[24] L. Ugarte: Hermitian structures on six-dimensional nilmanifolds, Transform. Groups **12** (2007), no. 1, 175-202.

[25] I. Vaisman: Generalized Hopf manifolds, Geom. Dedicata **13** (1982), no. 3, 231-255.

[26] T. Yamada: A construction of lattices in splittable solvable Lie groups, Kodai Math. J. **39** (2016), no. 2, 378-388.