

# 等角写像を用いた表面張力波の線形安定性解析

茨城大学 理学部 数学・情報数理領域 村重 淳 (Sunao Murashige)

Department of Mathematics and Informatics, Ibaraki University

## 概要

本研究では、一方向に一定速度で波形を変えずに進む周期的な表面張力波の3次元の線形安定性を考える。特に、振幅の大きな波の安定性を調べるために、適当な座標変換（等角写像）を導入する。また、横方向（波の山に沿った方向）に加える擾乱の波数は小さいという仮定のもとで、摂動法にしたがった安定性を解析する方法を提案し、数値計算でその有効性を検討する。

## 1 はじめに

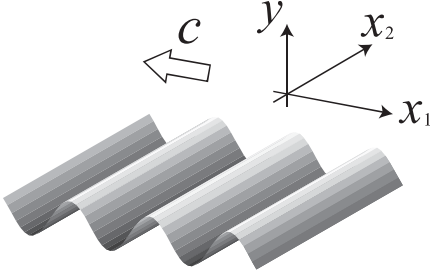
本研究では、Fig.1(a)のように水深が無限大の水の表面を一方向に一定速度  $c$  で波形を変えずに進行する定常進行波、特に表面張力波の3次元の線形安定性について考える。この定常進行波の運動は、進行方向に沿った鉛直断面内 ( $x_1y$  平面) で2次元かつ周期的で渦なしとする。Crapper [2] は、このような定常進行波のすべての波振幅に対する厳密解を解析的に求めた。この定常進行波解に振幅の小さな3次元の擾乱を与えることにより、線形安定性を調べる。

Chen & Saffman [1] はこのような表面張力波の線形安定性を、重力波に対する McLean [5] の解析と同じ方法で数値的に調べた。ただし、この方法は解を物理空間、すなわち Fig.1(a) の  $x_1x_2y$  空間で展開しているため、適用範囲が振幅の小さな波に限られる。特に、表面張力波の定常進行波解は Fig.1(b) のように、振幅が大きくなると水面が巻き込む場合があるので、適当な座標変換が必要になる。Tiron & Choi [6] は、等角写像による座標変換を導入することにより、波の進行方向の2次元の安定性をすべての波振幅に対して数値的に調べた。本研究では、Crapper が求めた定常進行波の厳密解を用いた座標変換により、振幅の大きな波にも適用できる3次元の線形安定性の解析方法を提案する。

## 1 問題の定式化

### 1.1 物理空間における定式化

Fig.1(a) のように、水深が無限大の水の表面を一方向（負の  $x_1$  軸方向）に一定速度  $c$  で波形を変えずに進行する表面張力波の3次元の線形安定性を考える。そのために、波と一緒に動く座標系 (Fig.1(a) の  $x_1x_2y$  空間) で考える。 $x_1x_2y$  空間では、波の運動は定常で、進行方向に沿った鉛直断面内 ( $x_1y$  平面) で2次元かつ周期的である。この定



(a) Progressive deep-water waves

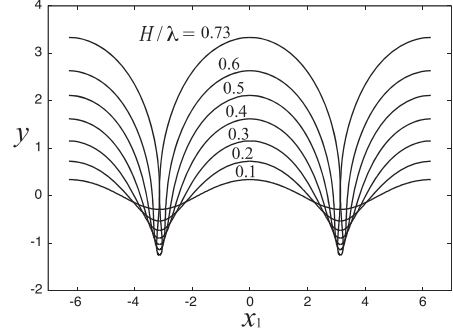
(b) Wave profiles of pure capillary waves  
(Crapper's steady wave solution (6))

Fig. 1: Pure capillary waves progressing in permanent form on water of infinite depth. The fluid motion is steady in the  $(x_1, x_2, y)$  frame in (a) which moves to the negative  $x_1$  axis with constant wave speed  $c$ . (b): wave profiles of Crapper's steady wave solutions (6) for different values of the wave steepness  $H/\lambda$ .

常進行波の線形安定性を調べるために、擾乱を加えて流体運動の時間変化を考える。流体は非粘性・非圧縮、流体の運動は渦なしとする。このとき、流体の運動は速度ポテンシャル  $\phi = \phi(x_1, x_2, y, t)$  と水面変位  $y = \tilde{y}(x_1, x_2, t)$  を用いて表すことができる ( $t$ : 時間)。定常進行波の波長を  $\lambda$ , 流体の密度を  $\rho$ , 表面張力を  $T$  で表し、各変数を代表長さ  $\lambda_0 := \lambda/(2\pi)$  と代表時間  $t_0 := \lambda_0^{3/2}(\rho/T)^{1/2}$  を用いて無次元化すると、 $\phi$  と  $\tilde{y}$  に対する支配方程式は以下のように与えられる。

$$\phi_{x_1 x_1} + \phi_{x_2 x_2} + \phi_{yy} = 0 \quad \text{for } -\infty < y < \tilde{y}(x_1, x_2, t) \quad (1)$$

$$\phi \rightarrow c x_1 \quad \text{as } y \rightarrow -\infty \quad (2)$$

$$\tilde{y}_t + \phi_{x_1} \tilde{y}_{x_1} + \phi_{x_2} \tilde{y}_{x_2} = \phi_y \quad \text{at } y = \tilde{y}(x_1, x_2, t) \quad (3)$$

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\phi_{x_1}^2 + \phi_{x_2}^2 + \phi_y^2) - \kappa = B(t) \quad \text{at } y = \tilde{y}(x_1, x_2, t) \quad (4)$$

ここで、 $B(t)$  は時間  $t$  にのみ依存する任意関数で、 $\kappa$  は次式により与えられる。

$$\kappa = \frac{(1 + \tilde{y}_{x_1}^2)\tilde{y}_{x_2 x_2} + (1 + \tilde{y}_{x_2}^2)\tilde{y}_{x_1 x_1} - 2\tilde{y}_{x_1}\tilde{y}_{x_2}\tilde{y}_{x_1 x_2}}{(1 + \tilde{y}_{x_1}^2 + \tilde{y}_{x_2}^2)^{3/2}} \quad (5)$$

## 1.2 Crapper の定常進行波解を用いた座標変換

定常進行波の運動は  $x_1y$  平面において 2次元かつ周期的である。Crapper [2] はこの定常進行波の厳密解が、複素座標  $z = x + iy$  と複素速度ポテンシャル  $f = \phi + i\psi$  を用いて次のように与えられることを示した。

$$z(\zeta) = Z(\zeta) = X(\xi_1, \eta) + iY(\xi_1, \eta) = \zeta + i \frac{4Ae^{-i\zeta}}{1 - Ae^{-i\zeta}} \quad (6)$$

ここで、

$$\zeta = \xi_1 + i\eta = \frac{1}{c}f \quad (7)$$

で、波傾斜を  $h = H/\lambda$  ( $H$ : 波高 (波の谷から山までの高さ),  $\lambda$ : 波長) で表すと  $A$  と波の進行速度  $c$  は次のように与えられる。

$$A = \frac{2}{\pi h} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\pi h}{2}\right)^2} - 1 \right\}, \quad c = \left\{ 1 + \left(\frac{\pi h}{2}\right)^2 \right\}^{-1/4} \quad (8)$$

Fig.1(b) は異なる波傾斜  $h = H/\lambda$  に対する Crapper の定常進行波解 (6) の波形の計算例を示す。波傾斜  $h = H/\lambda$  が大きくなると波面が巻き込み、 $h \simeq 0.73$  で極限波に達する。

Crapper の定常進行波解 (6) は  $\zeta$  平面から  $z$  平面への等角写像とみなすことができる。そこで、この等角写像を用いた次のような  $x_1x_2y$  空間から  $\xi_1\xi_2\eta$  空間への座標変換を考える。

$$\begin{cases} x_1 = x_1(\xi_1, \eta) = X(\xi_1, \eta) \\ x_2 = \xi_2 \\ y = y(\xi_1, \eta) = Y(\xi_1, \eta) \\ t = t \end{cases} \quad (9)$$

このとき、定常進行波の水面  $y = \tilde{y}_0(x_1)$  は  $\xi_1\xi_2$  平面上 ( $\eta = 0$ ) に写される。さらに、定常進行波に擾乱を加えたときの水面  $y = \tilde{y}(x_1, x_2, t)$  は  $\xi_1\xi_2\eta$  空間でも時間変化するので、

$$\eta = \tilde{\eta}(\xi_1, \xi_2, t) \quad (10)$$

のように表される。擾乱が微小であれば、 $\tilde{\eta}$  も微小であると仮定できる。一方、 $\xi_1\xi_2\eta$  空間における速度ポテンシャルは

$$\hat{\phi}(\xi_1, \xi_2, \eta, t) = \phi(x_1(\xi_1, \eta), x_2 = \xi_2, y(\xi_1, \eta), t) \quad (11)$$

のように表すことができる。

## 2 線形安定性解析

### 2.1 擾乱に関して線形化した方程式

$\xi_1 \xi_2 \eta$  空間における水面変位 (10) と速度ポテンシャル (11) は、次のような定常進行波解と擾乱  $\tilde{\eta}'$  と  $\hat{\phi}'$  の和の形に表すことができる。

$$\begin{cases} \tilde{\eta}(\xi_1, \xi_2, t) &= 0 + \tilde{\eta}'(\xi_1, \xi_2, t) \\ \hat{\phi}(\xi_1, \xi_2, \eta, t) &= c \xi_1 + \hat{\phi}'(\xi_1, \xi_2, \eta, t) \end{cases} \quad (12)$$

定常進行波の 3 次元的線形安定性を調べるために、微小な擾乱  $\tilde{\eta}'(\xi_1, \xi_2, t)$  と  $\hat{\phi}'(\xi_1, \xi_2, \eta, t)$  は次のように変数分離できるとする。

$$\begin{cases} \tilde{\eta}'(\xi_1, \xi_2, t) &= e^{\sigma t} e^{iq\xi_2} \check{\eta}(\xi_1) \\ \hat{\phi}'(\xi_1, \xi_2, \eta, t) &= e^{\sigma t} e^{iq\xi_2} \check{\phi}(\xi_1, \eta) \end{cases} \quad (13)$$

ここで、 $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i \in \mathbb{C}$  で、 $q > 0$  は横方向 ( $x_2$  軸、あるいは  $\xi_2$  軸方向) の擾乱の波数を表す。これらを支配方程式 (1), (2), (3), (4) に代入し、微小な擾乱に関して線形化すると、 $\xi_1 \eta$  平面 ( $\zeta$  平面) における微小な擾乱  $\check{\phi}(\xi_1, \eta)$  と  $\check{\eta}(\xi_1)$  に対する以下のような支配方程式を得る。

$$\check{\phi}_{\xi_1 \xi_1} + \check{\phi}_{\eta \eta} - q^2 J_0 \check{\phi} = 0 \quad \text{for } -\infty < \eta < 0 \quad (14)$$

$$\check{\phi} \rightarrow 0 \quad \text{as } \eta \rightarrow -\infty \quad (15)$$

$$\sigma \check{\eta} + \frac{c}{J_0} \check{\eta}_{\xi_1} - \frac{1}{J_0} \check{\phi}_{\eta} = 0 \quad \text{at } \eta = 0 \quad (16)$$

$$\sigma \check{\phi} + \frac{c}{J_0} \check{\phi}_{\xi_1} - \mathcal{K}[\check{\eta}] + q^2 J_0^{1/2} \check{\eta} = 0 \quad \text{at } \eta = 0 \quad (17)$$

ここで、 $J_0 = J_0(\xi_1, \eta)$  と  $\mathcal{K}[\check{\eta}]$  は次のように与えられる。

$$J_0(\xi_1, \eta) = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(\xi_1, \eta)} = X_{\xi_1}^2 + Y_{\xi_1}^2 \quad (18)$$

$$\mathcal{K}[\check{\eta}] = \alpha_1(\xi_1) \check{\eta} + \alpha_2(\xi_1) \check{\eta}_{\xi_1} + \alpha_3(\xi_1) \check{\eta}_{\xi_1 \xi_1} \quad (19)$$

with

$$\alpha_1(\xi_1) = \frac{1}{2J_0^{1/2}} \left\{ \frac{c^4}{2} \left( \frac{J_0^2 - 1}{J_0} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{J_0 \xi_1}{J_0} \right) \right\}, \quad \alpha_2(\xi_1) = \frac{J_0 \xi_1}{2J_0^{3/2}}, \quad \alpha_3(\xi_1) = J_0^{-1/2} \quad (20)$$

## 2.2 擾乱の Fourier 級数展開と Galerkin 法の適用

$\xi_1 \eta$  平面 ( $\zeta$  平面) における微小な擾乱  $\check{\phi}(\xi_1, \eta)$  と  $\check{\eta}(\xi_1)$  は水面上 ( $\eta = 0$ ) で周期的で, それらの  $\xi_1$  方向の波長は定常進行波の波長  $2\pi$  の  $M$  倍 ( $M = 1, 2, \dots$ ) とする. 横方向の擾乱がない場合 ( $q = 0$  のとき),  $M = 1$  が superharmonic な擾乱,  $M \geq 2$  が subharmonic な擾乱に対応する. このとき,  $\check{\eta}(\xi_1)$  と水面上の  $\check{\phi}(\xi_1, \eta = 0)$  は, それぞれ次のように Fourier 級数展開できる.

$$\check{\eta}(\xi_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\xi_1/M}, \quad \check{\phi}(\xi_1, \eta = 0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\xi_1/M} \quad (21)$$

これらを (14), (15), (16), (17) に代入して Galerkin 法にしたがい整理し, 無限級数を

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sim \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \quad (22)$$

のように近似すると, (21) の Fourier 係数  $a_j, b_j$  ( $j = -N/2, \dots, N/2 - 1$ ) と  $\sigma$  を未知変数とする問題を次のような行列形式で表すことができる.

$$L\mathbf{v} + q^2 B\mathbf{v} = \sigma\mathbf{v} + O(q^4) \quad (23)$$

ここで,  $\mathbf{v} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})^\top$ ,  $\mathbf{a} = (a_{-N/2}, \dots, a_{N/2-1})$ ,  $\mathbf{b} = (b_{-N/2}, \dots, b_{N/2-1})$  は Fourier 級数 (21) の係数を要素とするベクトル ( $^\top$ : 転置) で,  $2N \times 2N$  行列  $L, B$  の各要素は定常進行波解により与えられる. 次節以降では, (23) を用いて  $q$  の値が小さいときの 3次元線形安定性解析を行う.

### 3 波の進行方向の2次元線形安定性 ( $q = 0, M = 2$ の場合)

横方向の擾乱が無い場合, すなわち  $q = 0$  の場合, (23) は次のような固有値問題になる.

$$L \mathbf{v}^{(0)} = \sigma^{(0)} \mathbf{v}^{(0)} \quad (24)$$

この問題は波の進行方向の2次元線形安定性に対応し, すでに詳しい解析が行われている [6]. Fig.2 は  $M = 2$  の場合, すなわち擾乱の進行方向の波長が定常進行波の波長の2倍の場合の固有値  $\sigma^{(0)} = \sigma_r^{(0)} + i\sigma_i^{(0)}$  の計算結果を表す. 波傾斜  $h = H/\lambda$  の増加にともない  $h = h_c \simeq 0.272108$  で二つの固有値が衝突することにより, 固有値の実部  $\sigma_r^{(0)}$  が正になり, 定常進行波解が不安定化していることがわかる. 次節では, この不安定化に関連するモードの固有値に注目し, 横方向に擾乱を加えたときの安定性の変化を調べる.

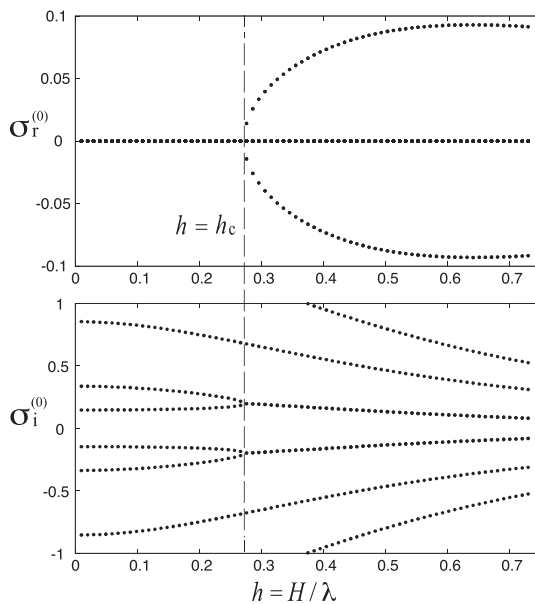


Fig. 2: Variation of the eigenvalue  $\sigma^{(0)} = \sigma_r^{(0)} + i\sigma_i^{(0)}$  of the 0th order problem (24) with the wave steepness  $h = H/\lambda$ . The wavelength of subharmonic disturbance is twice that of steady waves ( $M = 2$ ). The steady waves become unstable at  $h = h_c \simeq 0.272108$ . ( $q = 0, M = 2$  and  $N = 32$ )

#### 4 横方向の線形安定性 ( $0 < q \ll 1, M = 2$ の場合)

$M = 2$  の場合, (23) の行列  $L$  の固有値・固有ベクトルの性質は不安定化する点  $h \neq h_c \simeq 0.272108$  とそれ以外で大きく異なるので, 場合分けして考える.

##### 4.1 $h \neq h_c$ の場合

横方向の波数  $q$  が小さい場合の線形安定性を摂動法にしたがって解析するために, 摂動パラメータ

$$\epsilon = q^2 \ll 1 \quad (25)$$

を用いて (23) を

$$L\mathbf{v} + \epsilon B\mathbf{v} = \sigma\mathbf{v} + O(\epsilon^2) \quad (26)$$

のように表す. Fig.2 が示すように,  $M = 2$  の場合  $h \neq h_c$  では  $L$  の固有値はすべて異なる, すなわちすべて固有方程式の単根であるので, (26) の  $\mathbf{v}$  と  $\sigma$  は次のように展開できる [4, §1.6].

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}^{(0)} + \epsilon\mathbf{v}^{(1)} + \epsilon^2\mathbf{v}^{(2)} + \dots \\ \sigma &= \sigma^{(0)} + \epsilon\sigma^{(1)} + \epsilon^2\sigma^{(2)} + \dots \end{aligned} \right\} \text{for } h \neq h_c \quad (27)$$

これらを (26) に代入して整理すると,  $O(\epsilon^0)$  と  $O(\epsilon^1)$  の問題が次のように得られる.

$$\left. \begin{aligned} O(\epsilon^0): A\mathbf{v}^{(0)} &= \mathbf{0} \\ O(\epsilon^1): A\mathbf{v}^{(1)} &= \sigma^{(1)}\mathbf{v}^{(0)} - B\mathbf{v}^{(0)} \end{aligned} \right\} \text{for } h \neq h_c \quad (28)$$

ここで,

$$A = L - \sigma^{(0)}I \quad (29)$$

(28) の  $O(\epsilon^0)$  の問題は, 前節で考えた 2 次元の線形安定性の問題 (24) に対応する. 次に,  $O(\epsilon^1)$  の問題の両辺と

$$\overline{A}^\top \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (30)$$

をみたく  $\mathbf{u}$  との内積を考える. ここで,  $\overline{A}$  は  $A$  の複素共役,  $^\top$  は転置を表す. 両辺の内積は

$$(A\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{u}) = \sigma^{(1)}(\mathbf{v}^{(0)}, \mathbf{u}) - (B\mathbf{v}^{(0)}, \mathbf{u}) \quad (31)$$

となるが、左辺は

$$(A\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{u}) = (\mathbf{v}^{(1)}, \overline{A}^{\top} \mathbf{u}) = 0 \quad (32)$$

であるので、

$$\sigma^{(1)} = \frac{(B\mathbf{v}^{(0)}, \mathbf{u})}{(\mathbf{v}^{(0)}, \mathbf{u})} \quad (33)$$

を得る。上式を用いて  $\sigma^{(1)}$  を数値的に求めることができる。Fig.3 は、 $\sigma = \sigma^{(0)} + \epsilon\sigma^{(1)}$  ( $\epsilon = q^2$ ) の実部の計算結果を表す。横方向の擾乱を加えることにより、不安定化する点の波傾斜  $h = H/\lambda$  が大きくなるのがわかる。ただし、Fig.4(a) のように、 $h = h_c$  では  $\sigma$  の実部と虚部は両方とも発散してしまう。その理由は、Fig.2 が示すように、 $h = h_c$  では  $L$  の固有値に固有方程式の重根が含まれるため、 $\mathbf{v}$  と  $\sigma$  は (27) のように展開できないからである。

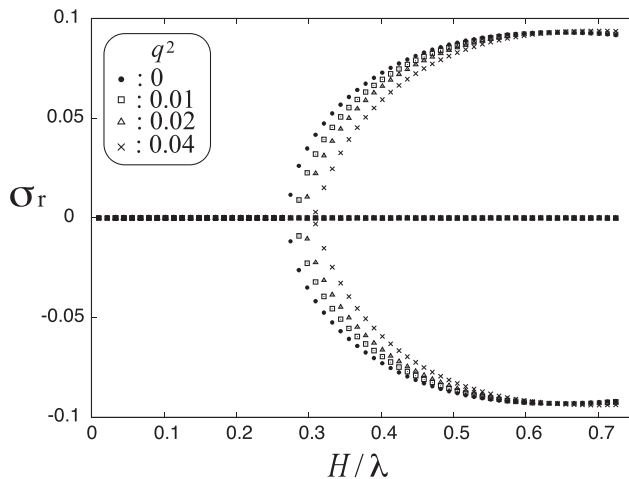
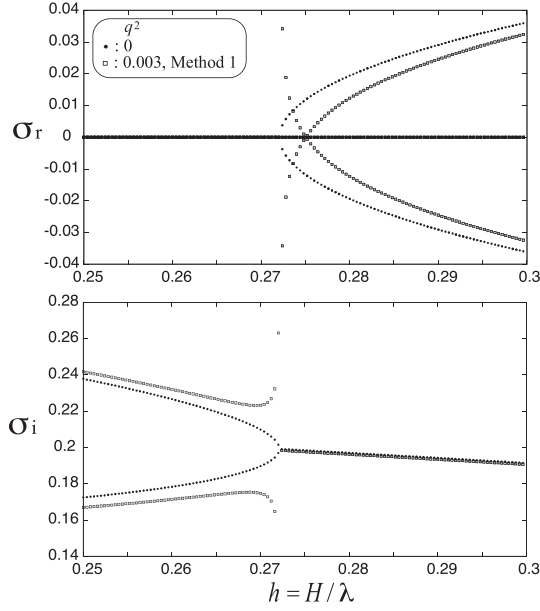
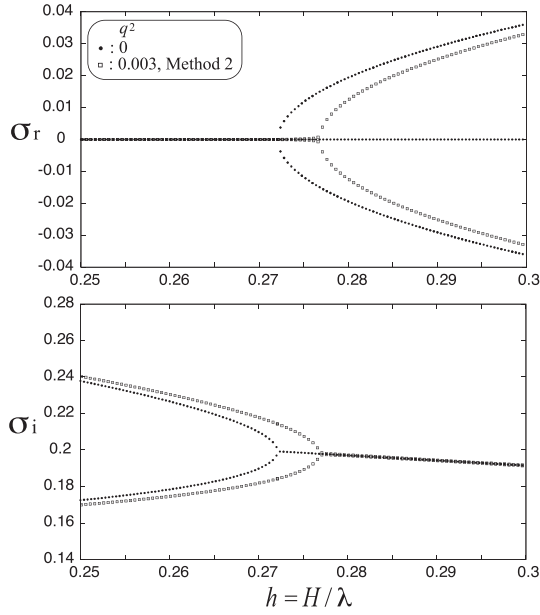


Fig. 3: Effects of transverse disturbances with the wavenumber  $q$  on the real part  $\sigma_r$  of the eigenvalue  $\sigma = \sigma^{(0)} + \epsilon\sigma^{(1)}$  where  $\sigma^{(1)}$  is given by (33). ( $M = 2, N = 32$ )





(a) Method 1 : (33)



(b) Method 2 : (43)

Fig. 4: Variation of the eigenvalue  $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$  with the wave steepness  $h = H/\lambda$  near the critical point  $h = h_c \simeq 0.272108$ . (a) Method 1:  $\sigma = \sigma^{(0)} + \epsilon\sigma^{(1)}$  using (33) and (b) Method 2:  $\sigma = \sigma_1^{(0)} + \epsilon^{1/2}\sigma^{(1)}$  using (43).  $\bullet$ :  $q^2 = 0$  and  $\square$ :  $q^2 = 0.003$ . ( $M = 2$ ,  $N = 32$ )

## 4.2 $h = h_c$ あるいは $h \simeq h_c$ の場合

前節の最後に指摘したように、不安定化する点  $h = h_c \simeq 0.272108$  で行列  $L$  の固有方程式は 2 重根  $\sigma_1^{(0)}$  を含むが、対応する線形独立な固有ベクトル  $\mathbf{v}_1^{(0)}$  は 1 つだけである。このとき、行列  $L$  の Jordan 標準形の対応する Jordan ブロックは、次のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} L \mathbf{v}_1^{(0)} &= \sigma_1^{(0)} \mathbf{v}_1^{(0)} \\ L \tilde{\mathbf{v}}_2 &= \sigma_1^{(0)} \tilde{\mathbf{v}}_2 + \mathbf{v}_1^{(0)} \end{aligned} \right\} \text{ for } h = h_c \quad (34)$$

ここで、 $\tilde{\mathbf{v}}_2$  は固有値  $\sigma_1^{(0)}$  に対する一般固有ベクトルとよばれる。このとき、 $\sigma(\epsilon)$  と  $\mathbf{v}(\epsilon)$  は次のように展開される [4, §1.6].

$$\left. \begin{aligned} \sigma(\epsilon) &= \sigma_1^{(0)} + \epsilon^{1/2} \sigma^{(1)} + \dots \\ \mathbf{v}(\epsilon) &= \mathbf{v}_1^{(0)} + \epsilon^{1/2} (\gamma_1 \mathbf{v}_1^{(0)} + \gamma_2 \tilde{\mathbf{v}}_2) + \dots \end{aligned} \right\} \text{ for } h = h_c \quad (35)$$

ここで、 $\gamma_1, \gamma_2$  は定数である。これらを (26) に代入して整理すると、次式を得る。

$$\sigma^{(1)} = \pm \sqrt{\left( B \mathbf{v}_1^{(0)}, \tilde{\mathbf{v}}_2 \right)} \quad \text{for } h = h_c \quad (36)$$

一方、 $h$  が  $h_c$  と少しでも異なると、 $L$  の Jordan 標準形も変わるので、 $\sigma(\epsilon)$  と  $\mathbf{v}(\epsilon)$  を (35) のように展開することはできない。そこで、不安定化する点付近  $h \simeq h_c$  では、次のような行列  $L$  の Schur 分解 [3, p.335] を導入する。

$$\overline{Q}^\top L Q = \begin{pmatrix} \sigma_1^{(0)} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & \sigma_2^{(0)} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \sigma_{n-1}^{(0)} & u_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \sigma_n^{(0)} \end{pmatrix} \quad (n = 2N) \quad (37)$$

あるいは

$$L \mathbf{q}_j = \sigma_j^{(0)} \mathbf{q}_j + \sum_{i=1}^{j-1} u_{ij} \mathbf{q}_i \quad (j = 1, 2, \dots, n = 2N) \quad (38)$$

ここで、変換行列  $Q = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n]$  はユニタリ行列で、 $\mathbf{q}_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) は Schur ベクトルとよばれる。この分解は LAPACK のサブルーチンを用いて数値的に安定に求めることができる。すべての変数は  $h$  に依存し、 $\mathbf{q}_1 = \mathbf{v}_1^{(0)}$  であることに注意すると、(38) より次のような関係式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} L(h) \mathbf{v}_1^{(0)}(h) &= \sigma_1^{(0)}(h) \mathbf{v}_1^{(0)}(h) \\ L(h) \mathbf{q}_2(h) &= \sigma_2^{(0)}(h) \mathbf{q}_2(h) + u_{12}(h) \mathbf{v}_1^{(0)}(h) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

さらに、不安定化する点付近  $h \sim h_c$  では  $|\sigma_1^{(0)}(h) - \sigma_2^{(0)}(h)| \ll 1$  であるので、

$$\sigma_2^{(0)}(h) - \sigma_1^{(0)}(h) = \epsilon^{1/2} \Delta\sigma(h) + \dots \quad \text{for } h \sim h_c \quad (40)$$

のように表して (39) に代入すると、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} L(h) \mathbf{v}_1^{(0)}(h) &= \sigma_1^{(0)}(h) \mathbf{v}_1^{(0)}(h) \\ L(h) \mathbf{q}_2(h) &= \sigma_1^{(0)}(h) \mathbf{q}_2(h) + u_{12}(h) \mathbf{v}_1^{(0)}(h) + O(\epsilon^{1/2}) \end{aligned} \right\} \quad \text{for } h \sim h_c \quad (41)$$

これを  $h = h_c$  における Jordan 標準形 (34) と比較すると、(35) より  $\sigma(h; \epsilon)$  と  $\mathbf{v}(h; \epsilon)$  の  $\epsilon$  に関する展開は次のように仮定できる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma(h; \epsilon) &= \sigma_1^{(0)}(h) + \epsilon^{1/2} \sigma^{(1)}(h) + \dots \\ \mathbf{v}(h; \epsilon) &= \mathbf{v}_1^{(0)}(h) + \epsilon^{1/2} \{ \gamma_1(h) \mathbf{v}_1^{(0)}(h) + \gamma_2(h) \mathbf{q}_2(h) \} + \dots \end{aligned} \right\} \quad \text{for } h \sim h_c \quad (42)$$

これらを (26) に代入すると、次式を得る。

$$\sigma^{(1)}(h) \simeq \frac{\Delta\sigma(h)}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\Delta\sigma(h)}{2} \right)^2 + u_{12}(h) \left( B(h) \mathbf{v}_1^{(0)}(h), \mathbf{q}_2(h) \right)} \quad \text{for } h \sim h_c \quad (43)$$

Fig.4(b) は (43) を用いた固有値  $\sigma = \sigma_1^{(0)} + \epsilon^{1/2} \sigma^{(1)}$  の計算結果を表す。Fig.4(a) と比較すると、 $h = h_c \simeq 0.272108$  付近で改良できていることがわかる。

## 5 まとめ

本研究では、一方向に一定速度で波形を変えずに進む振幅の大きな表面張力波の3次元線形安定性を調べるために、Crapper の定常進行波解 (6) を用いた座標変換 (9) を導入した。さらに、横方向 (波の山に沿った方向) の擾乱の波数は小さいという仮定のもとで摂動法を適用し、安定性を支配する固有値を近似的に数値計算で求める方法を提案した。また、波の進行方向に沿った擾乱の波長が波の波長の2倍の場合に対して実際に数値計算を実行し、提案手法の有効性を確認した。今後は、重力・表面張力波に対して提案手法を適用する予定である。

## 謝辞

本研究は JSPS 科研費（基盤研究（B）） JP17H02856 の助成を受けたものです。

## 参考文献

- [1] Chen, B. and Saffman, P.G. : Three-dimensional stability and bifurcation of capillary and gravity waves on deep water, *Stud. Appl. Math.*, vol.72, pp.125-147, 1985.
- [2] Crapper, G.D. : An exact solution for progressive capillary waves of arbitrary amplitudes, *J. Fluid Mech.*, vol.2, pp.532-540, 1957.
- [3] Golub, G.H. and Van Loan, C.F. : *Matrix Computations*, Johns Hopkins University Press, 1989.
- [4] Hinch, E.J. : *Perturbation Methods*, Cambridge University Press, 1991.
- [5] McLean, J. W. : Instabilities of finite-amplitude water waves, *J. Fluid Mech.*, vol.114, pp.315-330, 1982.
- [6] Tiron, R. and Choi, W. : Linear stability of finite-amplitude capillary waves on water of infinite depth, *J. Fluid Mech.*, vol.696, pp.402-422, 2012.