間接境界要素法に基づく磁性流体界面解析の検証

元 北海道大学大学院・工学研究院　水　田　　洋
Yo Mizuta
Faculty of Engineering, Hokkaido University

1　はじめに

磁性流体界面現象の安定性解析や動的解析には，大きく変形した界面や任意の印加磁場分布を扱える方法が必要である．ただし，たとえば，臨界磁場近傍で界面形状が遷移する速い過程の解析では，界面変動の細かい各時間ステップごとに，流体と磁場両方を効率的に解析できることも重要になる．

磁性流体の流体解析・磁場解析には，しばしば，有限要素法 (FEM) のような汎用性の高い方法が用いられる [1, 2, 3, 4]．FEM は解析領域の形状が変わらない問題を詳しく調べるのには適しているが，領域内部の量まで求めてしまうため，極めて負担が大きくなる．

本研究では，磁性流体界面現象の解析では，多くの場合，界面磁場・界面応力を調べれば十分なことに着目し，界面力学方程式 (Equation for Interface Motion, EIM) による流体解析と汎用磁場解析 (Magnetic Analysis for General Use, MAGU) による磁場解析を組み合わせて [5, 6, 7]，これまで，界面安定性の分岐 [6, 8, 9] や界面物理量の波数スペクトルの時間変化 [9, 10, 11] などを調べてきた．MAGU では，Green の定理から厳密に導かれた３次元界面磁場方程式 (Interface Magnetic Field Equation, IMFE) を解いて，任意の界面形状と印加磁場で調和性と界面条件を満たす界面磁場を求める．この界面磁場を用いて，EIM では磁場から流体への作用を表す磁気応力差を決める．

IMFE は，実際には，緩やかな界面形状を仮定して波数空間で解いている．このため，MAGU とは別に，間接境界要素法 (Indirect Boundary Element Method, IBEM) に基づく磁場解析を用意し，計算結果の比較や解析方法の改良に役立てることにした [12]．IBEM では，単極子密度 σ を導入して，境界上の未知の磁気ポテンシャル ϕ と法線磁束密度 b_Z を互いに分離して求める．

磁性流体では，大きい磁場で磁化が飽和して磁場に比例しなくなり，透磁率が磁場を通して場所の関数となる**非線形磁化**が生じる．[13, 14, 15] では MAGU を非線形磁化へ拡張したが，本稿では，3 節, 4 節において，IBEM の拡張についても論じ，さらに MAGU との関係を調べる．5 節では,「界面応力と界面エネルギー密度の関係 (RELA)」を用いて，界面応力が正しいことを

物理的に確かめる方法を述べる [10, 13, 15]．6 節では，流体領域・真空領域から成る一様鉛直磁場中の２層系について，IBEM で求めた界面磁場と共に界面応力 (磁気応力・表面張力) を示し，それらの分布について解析を行う．

2　界面力学方程式 (Equation for Interface Motion, EIM)

非圧縮性・非粘性・非回転の磁性流体界面の動的解析を界面形状の制限なく行うため，Bernoulli 方程式と界面上の力学的条件から導かれた，次の界面力学方程式 (EIM) を用いる [7].

$$\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} + S = 0, \quad \varphi = \int_{-\infty}^{\zeta} \mathrm{d}z v_z, \quad S \equiv G + C + T + D + p_0. \tag{1}$$

ここで，$\zeta, S, D, G, C, \rho, p_0, \varphi, v_z$ はそれぞれ，界面変位・界面応力和・動圧・重力ポテンシャル・表面張力・流体密度・大気圧・速度ポテンシャル・流速の鉛直成分である．なお，界面の動きが充分遅くまた大気圧が一様として，以後，S 中の D と p_0 は無視する．

磁気応力差 T は磁場から流体への作用を表し，流体 (J=1)・真空 (J=2) それぞれの領域内で透磁率 μ_J が一定の場合，接線磁場 $h_{X,Y}$ と法線磁束密度 b_Z から次のように得られる．

$$T = \left[\frac{1}{\mu_J}\right]\frac{\mu_1\mu_2(h_X^2 + h_Y^2) + b_Z^2}{2}. \tag{2}$$

ここで，$[\cdots]$ は界面をはさむ値の跳び (流体–真空) を表す．

3　非線形磁化のための磁場解析

汎用磁場解析 (MAGU) では，任意の界面形状と印加磁場分布の下で,「調和性」と「界面条件」を満たす接線磁場 $h_{X,Y}$ と法線磁束密度 b_Z を求める．ここでは，これまで透磁率 μ_J が流体・真空各領域内で一様であることを前提としてきた間接境界要素法 (IBEM) および汎用磁場解析を，非線形磁化の場合へ拡張し [13, 14, 15]，さらにこれらの関係を調べる．

3.1　磁気ポテンシャル方程式と勾配方程式

S, V を閉曲面とその内部領域，$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'$ を観測点とソース点とし，ソース点だけの関数や微分を $'$ で表せば，２つの関数 ψ, ϕ' に対する Green の定理は

$$\iiint_V \mathrm{d}V' \left(\phi'\Delta'\psi - \psi\Delta'\phi'\right) = \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}'\cdot\{\phi'(\nabla'\psi) - \psi(\nabla'\phi')\}. \tag{3}$$

透磁率が $\mu(H(\boldsymbol{r}')) = \mu(\boldsymbol{r}') = \mu'$ と磁場を通じて場所の関数となることを考慮して，(3) を次のように拡張する (これはGauss の定理を用いて示される).

$$\iiint_V \mathrm{d}V' \{\phi'\nabla'\cdot(\mu'\nabla'\psi) - \psi\nabla'\cdot(\mu'\nabla'\phi')\} = \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}' \cdot \{\phi'(\mu'\nabla'\psi) - \psi(\mu'\nabla'\phi')\}. \quad (4)$$

ここで，ϕ' として $\boldsymbol{h}' = \nabla'\phi'$, $\boldsymbol{b}' = \mu'\boldsymbol{h}'$ のように磁場と磁束密度を導き Gauss の法則 $\nabla'\cdot\boldsymbol{b}' = \nabla'\cdot(\mu'\nabla'\phi') = 0$ を満たす磁気ポテンシャルを選ぶ．また，ψ として３次元 Poisson 方程式 $\nabla'\cdot(\mu'\nabla'\psi) = \delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r})$ の解を選ぶ．このとき，観測点 $\boldsymbol{r}$ が S の内部・境界上・外部いずれかに応じて $\iiint_V \mathrm{d}V'\nabla'\cdot(\mu'\nabla'\psi) = 1, 1/2, 0 \equiv \alpha$ となる．さらに，面積素 $\mathrm{d}S'$ と法線単位ベクトル $\boldsymbol{t}'_Z$ で面積素ベクトルを $\mathrm{d}\boldsymbol{S}' = \mathrm{d}S'\boldsymbol{t}'_Z$ と表し，$\mu'\boldsymbol{t}'_Z\cdot\nabla'\psi \equiv q$,　$\mu'\boldsymbol{t}'_Z\cdot\nabla'\phi' = \boldsymbol{t}'_Z\cdot\mu'\boldsymbol{h}' = b'_Z$ と置けば，磁気ポテンシャル ϕ' と法線磁束密度 b'_Z に対する次の**磁気ポテンシャル方程式**が導かれる.

$$\alpha\phi = \oint_S \mathrm{d}S'\,(q\phi' - \psi b'_Z). \quad (5)$$

次に，観測点 $\boldsymbol{r}$ において (5) の両辺に $\boldsymbol{t}_I\cdot\nabla$ を演算する．ここで $\boldsymbol{t}_I$ $(I{=}X, Y, Z)$ は，S 上においては接線単位ベクトル $\boldsymbol{t}_{X,Y}$，法線単位ベクトル $\boldsymbol{t}_Z$ をまとめて表したものである．この演算は，(5) 右辺の被積分量では，$\boldsymbol{r}$ を含む q, ψ に対してのみ行われる．$\phi_I \equiv \boldsymbol{t}_I\cdot\nabla\phi$,　$q_I \equiv \boldsymbol{t}_I\cdot\nabla q$,　$\psi_I \equiv \boldsymbol{t}_I\cdot\nabla\psi$ と置けば，次の**勾配方程式**が導かれる.

$$\alpha\phi_I = \oint_S \mathrm{d}S'\,(q_I\phi' - \psi_I b'_Z). \quad (6)$$

3.2　単一領域の間接境界要素法

(5),(6) にしたがって，内部問題 ($\boldsymbol{r}$ が領域内部) と外部問題 ($\boldsymbol{r}$ が領域外部) の式を用意した後，Fig. 1(a) のように，$\boldsymbol{r}$ を境界まで近づける [16, 17].

$$\begin{cases} \phi = \oint_S \mathrm{d}S'\,(q\phi' - \psi b'_Z), \\ 0 = \oint_S \mathrm{d}S'\,(q^*\phi'^* - \psi^* b'^*_Z), \end{cases} \qquad \begin{cases} \phi_I = \oint_S \mathrm{d}S'\,(q_I\phi' - \psi_I b'_Z), \\ 0 = \oint_S \mathrm{d}S'\,(q^*_I\phi'^* - \psi^*_I b'^*_Z). \end{cases} \quad (7)$$

$$(b'^*_Z \equiv \mu'\boldsymbol{t}'^*_Z\cdot\nabla'\phi'^*, \quad q^* \equiv \mu'\boldsymbol{t}'^*_Z\cdot\nabla'\psi^*, \quad \psi^*_I \equiv \boldsymbol{t}_I\cdot\nabla\psi^*, \quad q^*_I \equiv \boldsymbol{t}_I\cdot\nabla q^*)$$

ここで，上つき添え字 “*” は外部問題の量を表す．境界をはさんでポテンシャルは連続であり，また，各領域の法線単位ベクトルは互いに逆向きなので ($\boldsymbol{t}'^*_Z = -\boldsymbol{t}'_Z$),

$$\phi'^* = \phi', \quad \psi^* = \psi, \quad q^* = -q, \quad \psi^*_I = \psi_I, \quad q^*_I = -q_I.$$

更に，**単極子密度** $\sigma' \equiv b'_Z + b'^*_Z$ を定義すれば，(7) 括弧内両式の和から，間

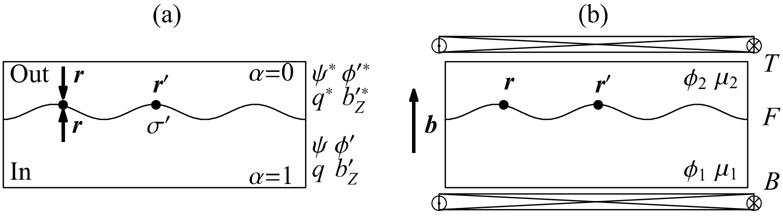

Fig. 1: (a) 間接境界要素法における内部問題と外部問題．(b) 流体 (1)・真空 (2) 各領域における，磁気ポテンシャル $\phi_{1,2}$ と 3 次元 Poisson 方程式の基本解 $\psi_{1,2}$．$\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'$ は観測点・ソース点の位置ベクトル，T,B,F は上方境界・下方境界および界面.

接境界要素法の基礎式が導かれる.

$$\phi = -\oint_S \mathrm{d}S'\psi\sigma', \quad \phi_Z = -\oint_S \mathrm{d}S'\psi_Z\sigma'. \tag{8}$$

(8) で $\boldsymbol{r}$ は境界上に限られるが，σ' が得られていれば，ϕ と ϕ_Z は互いに分離して求められる．また，境界上の ϕ, ϕ_Z があれば，領域内部の量は (5), (6) を用いて求めることができる (直接境界要素法).

3.3 複合領域の間接境界要素法

前節までの結果を Fig. 1(b) のような複合領域へ適用するには，流体領域 (J=1) と真空領域 (J=2) ごとに

$$\begin{aligned}
&S_J, \quad \boldsymbol{t}_{IJ}, \quad \phi_J, \quad \sigma'_J,\\
&b_{IJ} \equiv \mu_J\phi_{IJ} = \mu_J\boldsymbol{t}_{IJ}\cdot\nabla\phi_J, \quad b'_{ZJ} \equiv \mu'_J\boldsymbol{t}'_{ZJ}\cdot\nabla'\phi'_J,\\
&\psi_J, \quad q_J \equiv \mu'_J\boldsymbol{t}'_{ZJ}\cdot\nabla'\psi_J, \quad \psi_{IJ} = \boldsymbol{t}_{IJ}\cdot\nabla\psi_J, \quad q_{IJ} = \boldsymbol{t}_{IJ}\cdot\nabla q_J
\end{aligned}$$

を再定義して，(5),(6),(8) を次のように書き換える.

$$\alpha\phi_J = \oint_{S_J}\mathrm{d}S'\left(q_J\phi'_J - \psi_J b'_{ZJ}\right), \quad \alpha b_{IJ} = \mu_J\oint_{S_J}\mathrm{d}S'\left(q_{IJ}\phi'_J - \psi_{IJ}b'_{ZJ}\right), \tag{9}$$

$$\phi_J = -\oint_{S_J}\mathrm{d}S'\psi_J\sigma'_J, \quad b_{ZJ} = -\mu_J\oint_{S_J}\mathrm{d}S'\psi_{ZJ}\sigma'_J. \tag{10}$$

境界要素法では，各境界上のポテンシャル ϕ_J と法線磁束密度 b_{ZJ} は境界条件・界面条件から決める．特に界面上では，界面をはさんで ϕ_J, b_{ZJ} が連続なことから，次の界面条件を用いる.

$$\text{接線界面条件}：\phi_1 = \phi_2 = \phi, \quad \text{法線界面条件}：b_{Z1} = -b_{Z2} = b_Z. \tag{11}$$

3.4 3 次元 Poisson 方程式の基本解

前節で導入した ψ_J は，3 次元 Poisson 方程式 $\nabla'(\mu_J\nabla'\psi_J) = \delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r})$ を満たすが，以下では代わりに，

$$\mu'_J\nabla'\psi_J = \nabla'\psi \tag{12}$$

のように，J によらず ψ_J と関係する ψ を用いる．このとき，$\boldsymbol{R} \equiv \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}$, $R \equiv |\boldsymbol{R}|$ と置いて，$\nabla' \cdot (\nabla' \psi) = \delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r})$ より $\psi = -1/4\pi R$ が求められる．これを用いれば，次の関係を導くことができる．

$$\nabla' \psi = -\nabla \psi = \mu_1' \nabla' \psi_1 = \mu_2' \nabla' \psi_2 = \frac{\boldsymbol{R}}{4\pi R^3}, \tag{13}$$

$$q_J \equiv \mu_J' \boldsymbol{t}_{ZJ}' \cdot \nabla' \psi_J = \boldsymbol{t}_{ZJ}' \cdot \nabla' \psi, \tag{14}$$

$$\psi_{IJ} = \boldsymbol{t}_{IJ} \cdot \nabla \psi_J = \boldsymbol{t}_{IJ} \cdot (-\nabla' \psi_J) = \boldsymbol{t}_{IJ} \cdot (-\nabla' \psi / \mu_J') = \boldsymbol{t}_{IJ} \cdot \nabla \psi / \mu_J'. \tag{15}$$

(10) には，関係 (12) により既知の ψ を積分した ψ_J を用いる．ただし，(10) 第 2 式の b_{ZJ} においては (15) を使うことができる．(10) に (15) を代入するとき，非線形磁化では，分母の μ_J' は積分の中に留めておく必要がある．

3.5　汎用磁場解析 (Magnetic Analysis for General Use, MAGU) の導出

(9) の磁気ポテンシャル方程式・勾配方程式において，界面上の面積分を分離し，残る上方境界・下方境界などにおける面積分からの寄与を

$$\mathcal{T} \equiv \frac{1}{\alpha} \iint_T \mathrm{d}S' \,(q_2 \phi_2' - \psi_2 b_{Z2}'), \quad \mathcal{B} \equiv \frac{1}{\alpha} \iint_B \mathrm{d}S' \,(q_1 \phi_1' - \psi_1 b_{Z1}')$$

と表す．また，$\psi_{IJ} = \boldsymbol{t}_{IJ} \cdot \nabla \psi_J$,　$q_{IJ} = \boldsymbol{t}_{IJ} \cdot \nabla q_J$ を用いれば，(9) の第 2 式は次のように書き換えられる．

$$\begin{aligned} \frac{b_{IJ}}{\mu_J} &= (\boldsymbol{t}_{IJ} \cdot \nabla) \left\{ \frac{1}{\alpha} \iint_F \mathrm{d}S' \left(q_J \phi_J' - \psi_J b_{ZJ}' \right) + \begin{pmatrix} \mathcal{T} \\ \mathcal{B} \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{\alpha} \iint_F \mathrm{d}S' \left(q_{IJ} \phi_J' - \psi_{IJ} b_{ZJ}' \right) + \begin{pmatrix} \boldsymbol{t}_{IJ} \cdot \nabla \mathcal{T} \\ \boldsymbol{t}_{IJ} \cdot \nabla \mathcal{B} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{16}$$

界面積分では，各領域で互いに逆向きな法線単位ベクトルを，$J = 2, 1$ に対応する複号上下で $\boldsymbol{t}_{IJ} = \mp \boldsymbol{t}_I$ と表す．また，(14),(15) を考慮しながら，J によらない $q \equiv \boldsymbol{t}_Z' \cdot \nabla' \psi$,　$q_I \equiv \boldsymbol{t}_I \cdot \nabla q$,　$\psi_I \equiv \boldsymbol{t}_I \cdot \nabla \psi$ を用いて，(16) の中の量を

$$\begin{aligned} q_J &= \boldsymbol{t}_{ZJ}' \cdot \nabla' \psi &&= \mp \boldsymbol{t}_Z' \cdot \nabla' \psi &&= \mp q, \\ q_{IJ} &= \boldsymbol{t}_{IJ} \cdot \nabla q_J &&= \mp (\boldsymbol{t}_I \cdot \nabla)(\mp q) &&= q_I, \\ \psi_{IJ} &= \boldsymbol{t}_{IJ} \cdot \nabla \psi / \mu_J' &&= \mp \boldsymbol{t}_I \cdot \nabla \psi / \mu_J' &&= \mp \psi_I / \mu_J', \\ b_{IJ} / \mu_J &= \boldsymbol{t}_{IJ} \cdot \nabla \phi_J &&= \mp \boldsymbol{t}_I \cdot \boldsymbol{b}_J / \mu_J && \end{aligned}$$

と置き換える．これらにより，(16) は次のように書き換えられる．

$$\mp \boldsymbol{t}_I \cdot \frac{\boldsymbol{b}_J}{\mu_J} = \frac{1}{\alpha} \iint_F \mathrm{d}S' \left(q_I \phi_J' \pm \frac{\psi_I}{\mu_J'} b_{ZJ}' \right) + \begin{pmatrix} -\boldsymbol{t}_I \cdot \nabla \mathcal{T} \\ \boldsymbol{t}_I \cdot \nabla \mathcal{B} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

ここで，流体領域・真空領域に対する (17) の差を以下の (18) のように取り，界面条件 (11) を適用すれば，(19) が導かれる．

$$\boldsymbol{t}_I \cdot \left(\frac{\boldsymbol{b}_1}{\mu_1} + \frac{\boldsymbol{b}_2}{\mu_2} \right) = \frac{1}{\alpha} \iint_F \mathrm{d}S' \left\{ q_I (\phi_1' - \phi_2') - \psi_I \left(\frac{b_{Z1}'}{\mu_1'} + \frac{b_{Z2}'}{\mu_2'} \right) \right\} + \boldsymbol{t}_I \cdot \nabla (\mathcal{T} + \mathcal{B}) \tag{18}$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\iint_F \mathrm{d}S'\psi_I\left(\frac{1}{\mu_1'} - \frac{1}{\mu_2'}\right) b_Z' + \boldsymbol{t}_I \cdot \nabla(\mathcal{T} + \mathcal{B}) \tag{19}$$

$$= -2\hat{G}_{1I}\left[M' b_Z'\right] + \boldsymbol{t}_I \cdot \nabla(\mathcal{T} + \mathcal{B}). \tag{20}$$

(20) では，**３次元 Hilbert 変換演算子** $\hat{G}_{1I}[f'] \equiv -\frac{1}{\alpha}\iint_F \mathrm{d}S'\psi_I f'$ を定義して用い，また $M' \equiv \left(1/\mu_2' - 1/\mu_1'\right)\big/2$ と置いた．(20) は非線形磁化の MAGU を導いた [13] の (22) に一致している．[13] に示したように，この後，$\boldsymbol{b}_J$ を両領域の界面が存在する前に与える基本場 $\boldsymbol{b}_J^0$ とそれからのずれである誘導場 $\boldsymbol{b}_J^1 = \boldsymbol{b}_J - \boldsymbol{b}_J^0$ に分離し，既知の外部印加磁場を $\boldsymbol{h}^0$ として $b_Z, h_{X,Y}$ の基本場を $b_Z^0 = \boldsymbol{t}_Z \cdot \boldsymbol{h}^0\big/P, h_{X,Y}^0 = \boldsymbol{t}_{X,Y} \cdot \boldsymbol{h}^0$ と選ぶとき ($P \equiv (1/\mu_2 + 1/\mu_1)/2$)，誘導場 b_Z^1, $h_{X,Y}^1$ に対する次の３次元界面磁場方程式が導かれる．

$$\begin{cases} P b_Z^1 = -\hat{G}_{1Z}\left[M'\left(b_Z^{0\prime} + b_Z^{1\prime}\right)\right] + \boldsymbol{t}_Z \cdot \boldsymbol{g}, \\ h_{X,Y}^1 = -\hat{G}_{1X,1Y}\left[M'\left(b_Z^{0\prime} + b_Z^{1\prime}\right)\right] + \boldsymbol{t}_{X,Y} \cdot \boldsymbol{g}. \end{cases} \tag{21}$$

ただし，$\boldsymbol{g}$ は，上方境界と下方境界が誘導場に及ぼす影響を表している．

3.6　非線形磁化における IBEM と MAGU

(16) と同様に，IBEM の (10) でも界面積分を分離して書き換えれば，

$$\frac{b_{IJ}}{\mu_J} = (\boldsymbol{t}_{IJ} \cdot \nabla)\left\{-\iint_F \mathrm{d}S'\psi_J\sigma_J' + \begin{pmatrix}\mathcal{T}^* \\ \mathcal{B}^*\end{pmatrix}\right\} = -\iint_F \mathrm{d}S'\psi_{IJ}\sigma_J' + \begin{pmatrix}\boldsymbol{t}_{IJ} \cdot \nabla\mathcal{T}^* \\ \boldsymbol{t}_{IJ} \cdot \nabla\mathcal{B}^*\end{pmatrix}. \tag{22}$$

ただし，

$$\mathcal{T}^* \equiv -\iint_T \mathrm{d}S'\psi_J\sigma_J', \quad \mathcal{B}^* \equiv -\iint_B \mathrm{d}S'\psi_J\sigma_J'.$$

ここで，$\boldsymbol{t}_{IJ} = \mp\boldsymbol{t}_I$，$\psi_{IJ} = \mp\psi_I/\mu_J'$ を用いれば，

$$\mp\boldsymbol{t}_I \cdot \frac{\boldsymbol{b}_J}{\mu_J} = \pm\iint_F \mathrm{d}S'\frac{\psi_I}{\mu_J'}\sigma_J' + \begin{pmatrix}-\boldsymbol{t}_I \cdot \nabla\mathcal{T}^* \\ \boldsymbol{t}_I \cdot \nabla\mathcal{B}^*\end{pmatrix}. \tag{23}$$

さらに，流体領域・真空領域に対する (23) の差を取れば，

$$\boldsymbol{t}_I \cdot \left(\frac{\boldsymbol{b}_1}{\mu_1} + \frac{\boldsymbol{b}_2}{\mu_2}\right) = -\iint_F \mathrm{d}S'\psi_I\left(\frac{\sigma_1'}{\mu_1'} + \frac{\sigma_2'}{\mu_2'}\right) + \boldsymbol{t}_I \cdot \nabla(\mathcal{T}^* + \mathcal{B}^*). \tag{24}$$

すなわち，IBEM では (24) が MAGU の (18) に対応している．ただし，(24) にこれ以上界面条件を組み込むことはできない．

非線形磁化の場合，透磁率が磁場を通じて場所の関数となることに注意しながら，IBEM では (10) を，MAGU では (21) を導いた．数値解析では，前ステップの界面磁場で μ_J', M' を決めてから，これらの方程式を解いて次ステップの界面磁場を求める繰り返し法を用いることになる．なお，非線形磁化では，(2) の代わりに，界面磁場 $h_{X,Y}, b_Z$ から求めた磁化 $\boldsymbol{M} = (M_X, M_Y, M_Z)$ に

よる，次の非線形磁気応力差を用いる [13, 18].

$$T = \left[H_n B_n - \int_0^H B \mathrm{d}H\right] = -\frac{\mu_0}{2} M_Z^2 - \mu_0 \int_0^H |\boldsymbol{M}| \,\mathrm{d}H. \tag{25}$$

4　境界要素法による数値解析

4.1　離散化

(9), (10) の面積分 S_J を N_J 個の微小な面要素 (FE) の和で置き換える (Fig. 2(a)). $\boldsymbol{r}_i$ を観測点座標，$\boldsymbol{r}'_j$ を j 番目の面要素 S_{Jj} の中央座標とする. S_{Jj} 内で $\sigma'_J, \phi'_J, b'_{ZJ}$ は一定とし，$\sigma_{Jj} \equiv \sigma_J(\boldsymbol{r}'_j), \phi_{Jj} \equiv \phi'_J(\boldsymbol{r}'_j), b_{ZJj} \equiv b'_{ZJ}(\boldsymbol{r}'_j)$ と置けば，(9), (10) に対する離散式が行列形式で次のように得られる.

$$\alpha \boldsymbol{b}_{IJ} = \alpha(b_{IJi}) = \boldsymbol{K}_{IJ}\boldsymbol{\phi}'_J + \boldsymbol{H}_{IJ}\boldsymbol{b}'_J, \quad \boldsymbol{K}_{IJ} = (\mu_J Q_{IJij}), \quad \boldsymbol{H}_{IJ} = \left(\mu_J P_{IJij}\right), \tag{26}$$

$$\boldsymbol{\phi}_J = (\phi_{Ji}) = \boldsymbol{G}_J \boldsymbol{\sigma}_J, \quad \boldsymbol{G}_J = (P_{Jij}), \tag{27}$$

$$\boldsymbol{b}_J = (b_{ZJi}) = \boldsymbol{H}_J \boldsymbol{\sigma}_J, \quad \boldsymbol{H}_J = (\mu_J P_{ZJij}). \tag{28}$$

ただし，$\boldsymbol{\sigma}_J = (\sigma_{Jj}), \boldsymbol{\phi}'_J = (\phi_{Jj}), \boldsymbol{b}'_J = (b_{ZJj}), (1 \le i, j \le N_J)$. また，$\boldsymbol{R} \equiv \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}$, $R \equiv |\boldsymbol{R}|$, $\boldsymbol{t}_R \equiv \boldsymbol{R}/R$, $\zeta \equiv \boldsymbol{t}_{IJ} \cdot \boldsymbol{t}_R$, $\zeta' \equiv \boldsymbol{t}'_{ZJ} \cdot \boldsymbol{t}_R$ として，行列要素は次のように求める.

$$P_{Jij} \equiv \left(-\iint_{S_j} \mathrm{d}S' \psi_J\right)_i \simeq S_j \frac{1}{4\pi R \mu'_J}, \; P_{IJij} \equiv \left(-\iint_{S_j} \mathrm{d}S' \psi_{IJ}\right)_i = S_j \frac{\zeta}{4\pi R^2 \mu'_J}, \tag{29}$$

$$Q_{IJij} \equiv \left(\iint_{S_j} \mathrm{d}S' q_{IJ}\right)_i = S_j \frac{3\zeta\zeta' - (\boldsymbol{t}_{IJ} \cdot \boldsymbol{t}'_{ZJ})}{4\pi R^3}. \tag{30}$$

(26),(27) で P_{Jij}, P_{ZJij} を間接境界要素法に用いるとき，$\boldsymbol{r}_i$ は境界上に限られる．このため，$\boldsymbol{G}_J$ と $\boldsymbol{H}_J$ の対角要素では，面要素内で被積分関数が特異になり，数値積分が奨められている [16, 17], しかしここでは，中心を $\boldsymbol{r}$，無限小半径を $\boldsymbol{\varepsilon}$ とする境界外の球面 S_ε を用いて，次のように計算する.

$$P_{Jii} = \iint_{S_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}S'}{4\pi R \mu_J} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\phi_0 \varepsilon^2}{4\pi \varepsilon \mu_J} = 0, \tag{31}$$

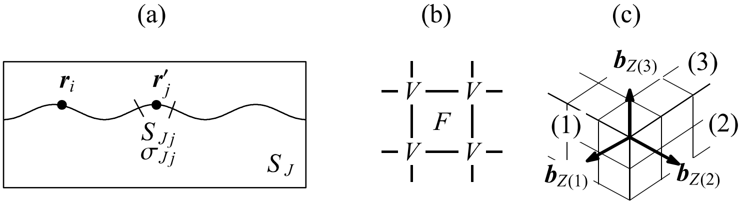

Fig. 2: (a) 間接境界要素法における境界面積分の離散化. (b) 微小な面要素 (FE) と点要素 (VE). (c) 境界同士が交差した尖端における多価な b_Z.

$$P_{ZJii} = \iint_{S_\varepsilon} \mathrm{d}S' \frac{\boldsymbol{t}_{ZJ} \cdot \boldsymbol{t}_R}{4\pi R^2 \mu_J} = \lim_{\varepsilon \to 0} \phi_0 \varepsilon^2 \frac{\boldsymbol{t}_{ZJ} \cdot \boldsymbol{t}_R}{4\pi \varepsilon^2 \mu_J} = \frac{\phi_0}{4\pi\mu_J} \boldsymbol{t}_{ZJ} \cdot \boldsymbol{t}_R. \tag{32}$$

ただし，面要素が面上・縁上・隅上に応じて，$\phi_0=2\pi, \pi, \pi/2$ とする．なお，$\boldsymbol{K}_{IJ}, \boldsymbol{H}_{IJ}$ の対角項については，$\boldsymbol{r}_i$ を境界から外して使う場合，被積分関数の特異性が問題になることはない．

4.2　解析手順

流体領域 ($J = 1$)・真空領域 ($J = 2$) の各境界は，適用される境界条件に応じて，(1) Dirichlet 条件 ($\boldsymbol{\phi}_J^{(1)}$ が既知，$\boldsymbol{b}_J^{(1)}$ が未知)，(2) Neumann 条件 ($\boldsymbol{b}_J^{(2)}$ が既知，$\boldsymbol{\phi}_J^{(2)}$ が未知)，(3) 界面条件 ($\boldsymbol{0} = \boldsymbol{\phi}_1^{(3)} - \boldsymbol{\phi}_2^{(3)}, \boldsymbol{0} = \boldsymbol{b}_1^{(3)} + \boldsymbol{b}_2^{(3)}$ を満たすように $\boldsymbol{\phi}_J^{(3)}, \boldsymbol{b}_J^{(3)}$ を求める) のように分類される．

式 (26), (27) は，$\boldsymbol{\phi}_J^{(1)(2)(3)}, \boldsymbol{b}_J^{(1)(2)(3)}$ は直接的には同じ領域に属する境界上の量と $\boldsymbol{\sigma}_J^{(1)(2)(3)}$ を通して関係し，別な領域に属する境界上の量とは界面条件を通してのみ関係することを示している．上記の境界条件の分類を考慮すれば，このことは次の式で表される．

$$\begin{cases} \boldsymbol{\phi}_J^{(1)(2)(3)} = \boldsymbol{G}_J^{(11)(21)(31)} \boldsymbol{\sigma}_J^{(1)} + \boldsymbol{G}_J^{(12)(22)(32)} \boldsymbol{\sigma}_J^{(2)} + \boldsymbol{G}_J^{(13)(23)(33)} \boldsymbol{\sigma}_J^{(3)}, \\ \boldsymbol{b}_J^{(1)(2)(3)} = \boldsymbol{H}_J^{(11)(21)(31)} \boldsymbol{\sigma}_J^{(1)} + \boldsymbol{H}_J^{(12)(22)(32)} \boldsymbol{\sigma}_J^{(2)} + \boldsymbol{H}_J^{(13)(23)(33)} \boldsymbol{\sigma}_J^{(3)}. \end{cases} \tag{33}$$

数値解析の手順は，次のようにまとめられる．

(A) 界面以外の境界では，接線条件 (Dirichlet 条件)，法線条件 (Neumann 条件) のいずれか，界面では接線条件・法線条件の両方を与える．これらすべての条件を連立した一次方程式を解いて，すべての境界上で $\boldsymbol{\sigma}_J^{(1)(2)(3)}$ を求める．

(B) $\boldsymbol{\sigma}_J^{(1)(2)(3)}$ が得られた後，Dirichlet 条件の境界では $\boldsymbol{b}_J^{(1)}$，Neumann 条件の境界では $\boldsymbol{\phi}_J^{(2)}$，界面では $\boldsymbol{\phi}_J^{(3)}, \boldsymbol{b}_J^{(3)}$ を求める．

(C) 既知および求められた $\boldsymbol{\phi}_J^{(1)(2)(3)}, \boldsymbol{b}_J^{(1)(2)(3)}$ を (26) に用いて，領域内部を含む任意の観測点で磁束密度成分 $\boldsymbol{b}_{IJ}$ を求める．

4.3　数値要素上の量の再配置

面要素 (FE) 上の磁気応力差を精度よく計算するには，FE 上の界面磁場 $h_{X,Y}$, b_Z が必要になる．もし ϕ_{Ji}, b_{ZJi} が FE 中心の代わりに FE 間の点要素 (VE) で求められていれば，FE 上の $h_{X,Y}$ は差分で，FE 上の b_Z は内挿で，精度を落とさず求められる (Fig. 2(b))．さらに，ϕ_{Ji}, b_{ZJi} と同じく，σ_{Jj} も VE 上に置く．これにより，$\boldsymbol{\sigma}_J^{(1)(2)(3)}$ を求めるとき，条件の数と未知量の数が一致する．したがって，$\phi_{Ji}, b_{ZJi}, \sigma_{Jj}$ は VE 上に再配置する方がよい．ただし，境界同士が交わる尖った縁または尖端上の VE では，多価となる b_Z を注意

深く扱う必要がある (Fig. 2(c)).

5　界面応力と界面エネルギー密度の関係

界面力学方程式 (EIM)(1) において，数値的に求めた界面応力和 S が物理的に正しいことを確かめるとき，ある任意の界面変位 ζ で，$S(\zeta)$ とは別に**界面エネルギー密度** $U(\zeta)$ (Flat Space における単位面積当たりのエネルギー) を求められるようにし，微小距離 $\delta\zeta$ だけ界面移動したときのその変化が次の**界面応力と界面エネルギー密度の関係 (RELA)** を満たすことを用いる [10, 13, 15].

$$\begin{aligned} &\delta U \equiv U(\zeta+\delta\zeta) - U(\zeta) = S(\zeta)\delta\zeta, \\ &U(\zeta) = U_G(\zeta) + U_C(\zeta) + U_T(\zeta), \\ &S(\zeta) = G(\zeta) + C(\zeta) + T(\zeta). \end{aligned} \tag{34}$$

以後，$\delta\zeta$ による物理量の変化を δ で表す.

流体密度・重力加速度・表面張力係数・界面形状の主曲率を $\rho, g, \sigma, \kappa_{1,2}$ とすれば，$S(\zeta)$ 中の重力ポテンシャル $G(\zeta)$・表面張力 $C(\zeta)$ と，それらに対応する界面エネルギー密度 $U_{\mathrm{G}}(\zeta), U_{\mathrm{C}}(\zeta)$ は次のようになる.

$$\begin{aligned} &U_{\mathrm{G}}(\zeta) = \rho g\zeta^2\big/2, && G(\zeta) = \rho g\zeta, \\ &U_{\mathrm{C}}(\zeta) = \sigma\sqrt{1+(\nabla\zeta)^2}, && C(\zeta) = -\sigma(\kappa_1+\kappa_2). \end{aligned} \tag{35}$$

これらにより，$\delta U_{\mathrm{G}} = G(\zeta)\delta\zeta, \delta U_{\mathrm{C}} = C(\zeta)\delta\zeta$ を確かめる.

一方，磁気応力差 $T(\zeta)$(2) と対応する磁気界面エネルギー密度 $U_{\mathrm{T}}(\zeta)$ は，流体・真空各領域の磁気界面エネルギー密度 $U_{\mathrm{T1}}, U_{\mathrm{T2}}$，微小変位 $\delta\zeta_1, \delta\zeta_2$ による $U_{\mathrm{T1}}, U_{\mathrm{T2}}$ の変化の割合 (実は Maxwell 応力) T_1, T_2 で,

$$U_{\mathrm{T}}(\zeta) = U_{\mathrm{T1}}(\zeta) + U_{\mathrm{T2}}(\zeta), \quad T(\zeta) = T_1(\zeta) - T_2(\zeta) \tag{36}$$

と表される．これは，$\delta U_{\mathrm{T}} = T\delta\zeta = \delta U_{\mathrm{T1}} + \delta U_{\mathrm{T2}}$ において

$$\delta U_{\mathrm{T1}} = T_1\delta\zeta_1, \quad \delta U_{\mathrm{T2}} = T_2\delta\zeta_2, \tag{37}$$

および $\delta\zeta_1 = -\delta\zeta_2 = \delta\zeta$ ($\delta\zeta_1, \delta\zeta_2$ は大きさが同じで互いに逆向き) から導く.

5.1　表面張力と表面張力界面エネルギー密度の関係

界面形状を $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ z(X,Y) \end{pmatrix}$ のように媒介変数表示するとき，界面の平均曲率

$$H = \frac{\kappa_1+\kappa_2}{2} = \frac{\left(1+z_Y^2\right)z_{XX} + \left(1+z_X^2\right)z_{YY} - 2z_Xz_Yz_{XY}}{2\left(1+z_X^2+z_Y^2\right)^{3/2}} \tag{38}$$

により，表面張力が $C(\zeta) = -2\sigma H$ と表されることはよく知られているが，元をただせば，これは，面積素 $\mathrm{d}S = |\boldsymbol{r}_X \times \boldsymbol{r}_Y|\,\mathrm{d}X\mathrm{d}Y$ ($\boldsymbol{r}_X = \partial\boldsymbol{r}/\partial X$, $\boldsymbol{r}_Y = \partial\boldsymbol{r}/\partial Y$) により表面張力エネルギーが $U_{\mathrm{C}}\mathrm{d}X\mathrm{d}Y = \sigma\mathrm{d}S$ で与えられ [19]，界面を法線

方向に $\delta\zeta$ だけ動かせば (Fig. 3(a))，面積素が $\delta \mathrm{d}S = -2H\mathrm{d}S\delta\zeta$ だけ変化する [20] ことによる．

界面形状を2次曲面で内挿し，その界面方向偏微分から (38) より平均曲率 H を求めた．これによる解析的な表面張力を Fig. 6(e)，または $y = 0$ 断面内で Fig. 6(d) と Fig. 3(c) に示す．一方，界面を動かす前後で数値的に求めた表面張力界面エネルギー密度 U_C の差 δU_C を Fig. 3(b) に示す．Fig. 3(b),(c) を比較して，**表面張力と表面張力界面エネルギー密度の関係 (CRELA)**

$$\delta U_\mathrm{C}\mathrm{d}X\mathrm{d}Y = \sigma\delta\mathrm{d}S = C(\zeta)\mathrm{d}S\delta\zeta \tag{39}$$

を確認した．界面形状に従い，C は大部分の領域で正であるが，一部に負の領域が見られる．

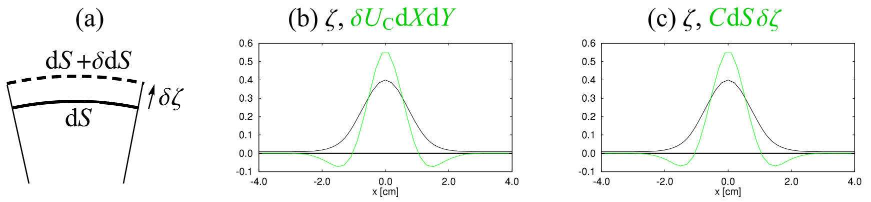

Fig. 3: (a) 「表面張力と表面張力界面エネルギー密度の関係 (CRELA)」を導くための面要素，(b)「表面張力界面エネルギー密度」から求めた表面張力，(c) 解析的に求めた表面張力．

5.2 Maxwell 応力と磁気界面エネルギー密度の関係

以下では，Fig. 4 のような，Flat Space の流体側に界面に対し垂直方向に伸びた高さ ζ，深さ Z_0，断面積 S_Z の角柱領域で，(37) の「Maxwell 応力と磁気界面エネルギー密度の関係 (MRELA)」について調べる [10, 13, 15]．接線成分を $h_{X,Y}, b_{X,Y}$，法線成分を h_Z, b_Z とする磁場ベクトル $\boldsymbol{h}$・磁束密度ベクトル $\boldsymbol{b}$ を

$$\boldsymbol{h} = (h_X, h_Y, h_Z) = \boldsymbol{h}_2 + h_Z\boldsymbol{t}_Z, \quad \boldsymbol{h}_2 = (h_X, h_Y, 0),$$
$$\boldsymbol{b} = (b_X, b_Y, b_Z) = \boldsymbol{b}_2 + b_Z\boldsymbol{t}_Z, \quad \boldsymbol{b}_2 = (b_X, b_Y, 0).$$

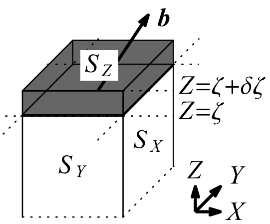

Fig. 4: 「Maxwell 応力と磁気界面エネルギー密度の関係 (MRELA)」を導くための角柱領域．

と表せば，磁気界面エネルギー密度は次のようになる．

$$U_\mathrm{T1} = \int_{Z_0}^{\zeta}\mathrm{d}Z\frac{e(X,Y,Z)}{2}, \quad e \equiv \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{h}_2\cdot\boldsymbol{b}_2 + h_Zb_Z. \tag{40}$$

ζ を $\delta\zeta$ だけ変えたとき，(43) 第2辺に示すように，U_T1 の変化は角柱の体積変化と e 自身の変化の和になる．e に対する連続方程式に Ampére の法

則・Gauss の法則を適用すれば，e の変化は次のように求められる [13].

$$\delta e = -2\delta\zeta\left\{\frac{\partial(\boldsymbol{h}_2\cdot\boldsymbol{b}_2)}{\partial Z} - \nabla_2\cdot(h_Z\boldsymbol{b}_2) + \frac{\mathit{\Delta}}{2}\right\}, \tag{41}$$

$$\mathit{\Delta} \equiv -\boldsymbol{h}_2\cdot\frac{\partial\boldsymbol{b}_2}{\partial Z} + \boldsymbol{b}_2\cdot\frac{\partial\boldsymbol{h}_2}{\partial Z} - h_Z\frac{\partial b_Z}{\partial Z} + b_Z\frac{\partial h_Z}{\partial Z}. \tag{42}$$

ここで，$\nabla_2 = (\partial/\partial X, \partial/\partial Y, 0)$ 接線方向偏微分を表す．(41) を用いれば，δU_{T1} は (43) の形にまとめられる．

$$\delta U_{\mathrm{T1}} = \frac{1}{2}\left\{e(X,Y,\zeta)\delta\zeta + \int_{Z_0}^{\zeta}\mathrm{d}Z\delta e(X,Y,Z)\right\} = \delta\zeta\,(T_1 + T_1'). \tag{43}$$

ここで，T_1 は (36) に現れた Maxwell 応力で，特に $\boldsymbol{b} = \mu_1\boldsymbol{h}$ (μ_1：流体の透磁率) の場合は，$\mathit{\Delta} = 0$ より，以下の (44) のようになる．

$$T_1 \equiv \frac{h_{Z0}b_{Z0} - \boldsymbol{h}_{20}\cdot\boldsymbol{b}_{20}}{2} - \int_{Z_0}^{\zeta}\mathrm{d}Z\frac{\mathit{\Delta}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{b_{Z0}^2}{\mu_1} - \mu_1|\boldsymbol{h}_{20}|^2\right). \tag{44}$$

ここでは，$Z = \zeta$ における $\boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{b}_2, h_Z, b_Z$ の値を $\boldsymbol{h}_{20}, \boldsymbol{b}_{20}, h_{Z0}, b_{Z0}$ と表した．(44) とこれと同様の T_2 を $T = T_1 - T_2$ に用いれば，磁気応力差 (2) が得られる．一方，

$$T_1' \equiv \int_{Z_0}^{\zeta}\mathrm{d}Z\nabla_2\cdot(h_Z\boldsymbol{b}_2) + (\boldsymbol{h}_2\cdot\boldsymbol{b}_2)_{Z=Z_0} \tag{45}$$

については，これを角柱断面内で積分し，第 1 項については，Gauss の定理の 2 次元版

$$\iint_{S_Z}\mathrm{d}S_Z\int_{Z_0}^{\zeta}\mathrm{d}Z\nabla_2\cdot\boldsymbol{A} = \iint_{S_2}\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2\cdot\boldsymbol{A}$$

を用いて，角柱側面 (Fig. 4 の S_X, S_Y) にわたる積分に書き換える．

$$\begin{aligned} &T_1'S_Z \\ &\equiv \iint_{S_Z}\mathrm{d}S_Z\int_{Z_0}^{\zeta}\mathrm{d}Z\nabla_2\cdot(h_Z\boldsymbol{b}_2) + (\boldsymbol{h}_2\cdot\boldsymbol{b}_2)_{Z=Z_0}S_Z \\ &= \iint_{S_2}\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2\cdot(h_Z\boldsymbol{b}_2) + (\boldsymbol{h}_2\cdot\boldsymbol{b}_2)_{Z=Z_0}S_Z. \end{aligned} \tag{46}$$

(37) とは異なり，(43) では δU_{T1} に T_1' からの寄与が含まれる．(46) より，T_1' は角柱側面および底面からの磁気エネルギーの漏洩，と解釈できる．なお，U_{T1} および T_1' を数値的に評価する際には，領域内部の磁場が必要になる．このためには，境界上の磁気ポテンシャルと法線磁束密度が求まった後，直接境界要素法の式 (26) を使う．

6　一様鉛直磁場中の 2 層系

同じ層厚の流体領域・真空領域からなる 2 層系 (Fig. 1(a)) で，界面 F 上

の物理量を計算した．真空領域上方 T と流体領域下方 B には同じ鉛直一様磁場を印加した．用いた境界条件を Fig. 5 に示す．ここで，T, B では b_Z に既知の値を与え，側面境界では $b_Z = 0$ とした．

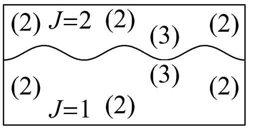

Fig. 5: 界面磁場数値解析のための境界条件．(·) は 4.2 節に示した境界条件の分類番号．

[21] を参照して，重力加速度 g=9.8 m s^{-2}, 流体密度 ρ=1.0×10^3 kg m^{-3}, 表面張力係数 σ=3.1×10^{-2} N m^{-1}, 流体・真空の透磁率 μ_1=2.0μ_0, μ_2=1.0μ_0 を用いれば，印加磁場が線形波を不安定化する際の臨界値が得られる [22].

$$
\begin{aligned}
k_\mathrm{C} &= (\rho g/\sigma)^{1/2} &&= 6.1\times10^{2}\ \mathrm{m^{-1}},\\
M_\mathrm{C} &= \{4P(\rho g\sigma)^{1/2}\}^{1/2} &&= 6.7\times10^{3}\ \mathrm{A\,m^{-1}},\\
\lambda_\mathrm{C} &= 2\pi/k_\mathrm{C} &&= 1.0\times10^{-2}\ \mathrm{m},\\
b_\mathrm{C} &= M_\mathrm{C}/2M &&= 1.7\times10^{-2}\ \mathrm{T},\\
-T_\mathrm{C} &\simeq Mb_\mathrm{C}^2 &&= 5.6\times10^{1}\ \mathrm{N\,m^{-2}},\\
h_\mathrm{C} &= -T_\mathrm{C}/\rho g &&= 4.9\times10^{-3}\ \mathrm{m}.
\end{aligned}
$$

ここで，$P \equiv (1/\mu_2 + 1/\mu_1)/2$, $M \equiv (1/\mu_2 - 1/\mu_1)/2$ を定義し，波数・磁化・波長・磁束密度・磁気応力差の臨界値をそれぞれ k_C, M_C, λ_C, b_C, T_C と表した．また h_C は，磁気応力と重力ポテンシャルが釣り合うときの界面高である．Fig. 6 には，これらの値が細い黒線で示されている．

F が平らであれば，印加磁場がそのまま F にも現れると考えられる．まず，ϕ と b_Z が界面を横切って連続であること，$\pi/2$ だけ回転した分布が元の分布に重なることを確認した．界面磁場は F 上のできるだけ広い領域で一様になることが望ましいが，これは実験前に広い一様磁場領域を持つ Helmholtz コイルを用意することに相当する．$\boldsymbol{H}_J$ の対角成分を調整することで，F の縁まで一様に近い磁場分布を達成した．この後，F を変形した．

幅 w_pro，高さ ζ_pro の軸対称な孤立波形状に界面を変形して強度 b_apl の鉛直一様磁束密度を印加したときの，流体領域に対する接線磁束密度ベクトル $\boldsymbol{b}_t = \mu_J\nabla\phi_J\times\boldsymbol{t}_{ZJ} = b_{tx}\boldsymbol{x} + b_{tz}\boldsymbol{z}$, 接線磁束密度ベクトル $\boldsymbol{b}_n = b_{ZJ}\boldsymbol{t}_{ZJ} = b_{nx}\boldsymbol{x} + b_{nz}\boldsymbol{z}$ およびそれらの合成場 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_n + \boldsymbol{b}_t$ を Fig. 6(a)–(c) に，これらの界面磁場や界面形状から求めた表面張力 C・磁気応力差 T・重力ポテンシャル G も含む界面応力和 S を Fig. 6(d)–(g) に示す．(a)–(d) は，(e)–(g) のような界面上分布の $y = 0$ 断面内での変化を表したものである．

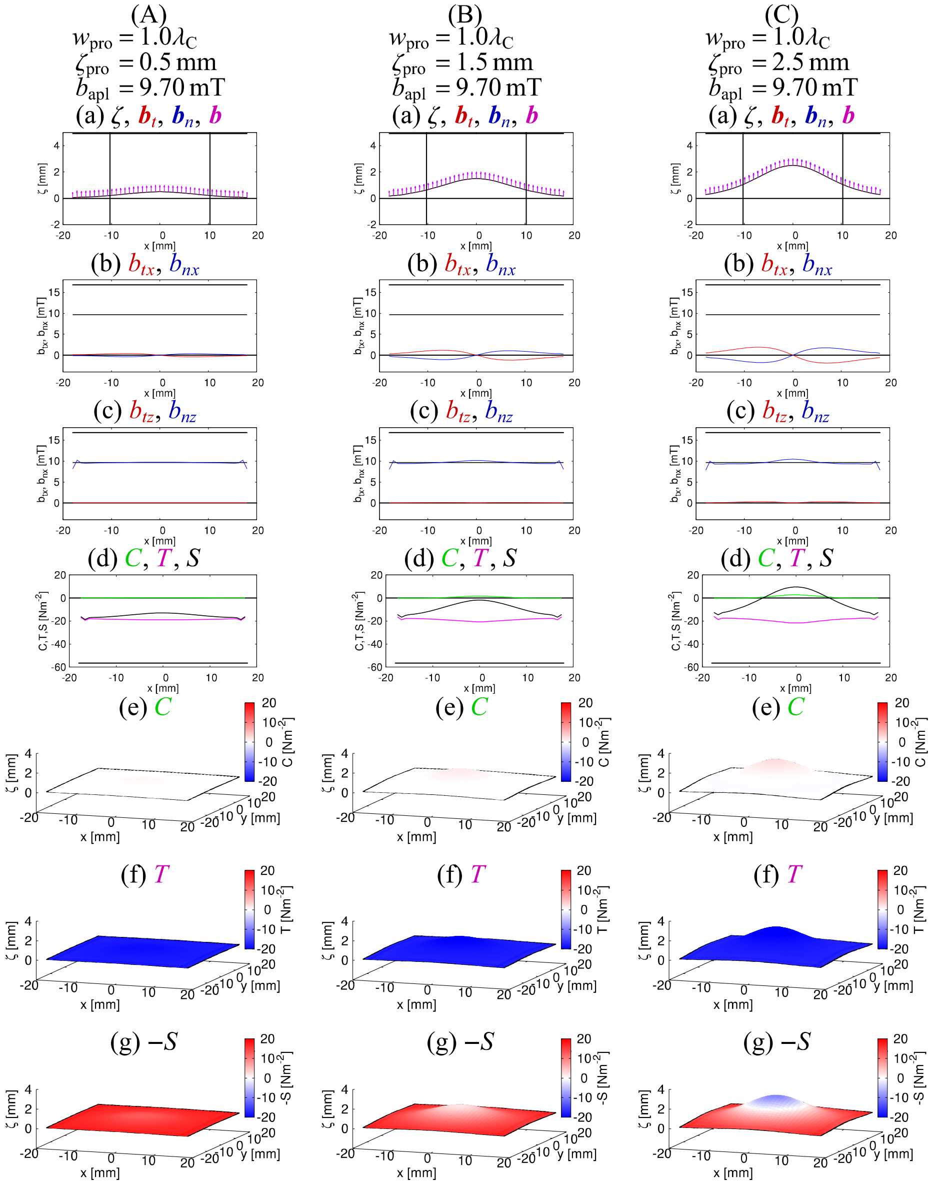

Fig. 6: (a)–(c) 接線磁束密度ベクトルとその成分 $\boldsymbol{b}_t=b_{tx}\boldsymbol{x}+b_{tz}\boldsymbol{z}$, 法線磁束密度ベクトルとその成分 $\boldsymbol{b}_n=b_{nx}\boldsymbol{x}+b_{nz}\boldsymbol{z}$, 合成磁束密度ベクトル $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}_t+\boldsymbol{b}_n$, (d) 表面張力 C, 磁気応力差 T, 重力ポテンシャル G を含む界面応力和 S, の y=0 断面内分布．(e) 表面張力 C, (f) 磁気応力差 T, (g) 界面応力和の符号反転 $-S$, の界面上分布．細い黒線は (a) 波長 $\lambda_{\rm C}$ と波高 $h_{\rm C}$, (b),(c) 法線磁束密度 $b_{\rm C}$, (d) 磁気応力差 $T_{\rm C}$, それぞれの臨界値. 太い黒線は (a) 界面形状 ζ, (b),(c) 印加磁束密度強度 $b_{\rm apl}$.

(A),(B),(C) では，w_{pro}, b_{apl} は共通で，ζ_{pro} だけが 0.5, 1.5, 2.5 mm と増える．これに伴い，波形の中心付近の S は 負 $\to 0 \to$ 正 と増加する (Fig. 6(d),(g)). G, T に較べて C は小さく (Fig. 6(d),(e))，S は主に正の G と負の T ((d),(f)) の釣り合いから成り立つ．T は界面磁場によって変化するが全体的にはそれほど変わらないので，S の増加は主に $G \propto \zeta_{\mathrm{pro}}$ の増加によるものとなる．界面力学方程式(1) より，もし $\partial v_z/\partial t \simeq 0$ であれば $\partial\zeta/\partial t \propto \partial\varphi/\partial t = -S/\rho$ なので，界面には，ζ_{pro} が低ければ磁場による引き上げ，高ければ重力による引き落としが働くことになる．

7　まとめ

磁性流体の界面解析に必要な界面磁場を求めるため，安定性解析や動的解析などで汎用磁場解析 (MAGU) を利用してきたが，結果の比較や方法の改良ため，間接境界要素法 (IBEM) に基づく界面磁場解析を開発した．境界上の磁気ポテンシャル ϕ と法線磁束密度 b_Z は，単極子密度 σ を導入することにより，分離して求められる．界面磁場などの界面量は，波数空間で求めていた MAGU とは対照的に，実空間で直接求められる．磁気応力差の検証に用いる領域内部の磁束密度成分は，境界上の ϕ, b_Z を求めた後，直接境界要素法で求める．IBEM と MAGU を非線形磁化へ拡張するとともに，両方法の関係を調べた．

界面現象の理解に本質的な役割を果たす表面張力や磁気応力差が正しく求められていることは，界面エネルギー密度を界面応力とは独立に求められるようにし,「界面応力と界面エネルギー密度の関係」を用いて検証する.「表面張力と表面張力界面エネルギー密度の関係」を確認することはできたが,「Maxwell 応力と磁気界面エネルギー密度の関係」については，接線応力に基づく磁気エネルギー漏洩の効果を考慮する必要がある．

「一様鉛直磁場中の２層系」で，軸対称に変形した界面に一様鉛直磁場を印加して，界面磁場や界面応力 (磁気応力差・表面張力) 分布の波高依存性を調べた．これらは，界面形状の時間変化を調べる際に，体積保存則と合わせて利用される，

参考文献

[1] Lavrova,O., Polevikov,V. and Tobiska,L., *Mathematical Modelling and Analysis*, **15**-2 (2010), pp.223–233.

[2] Cao,Y. and Ding,Z.J., *J. Magn. Magn. Mater.*, **355** (2014), pp.93–99.

[3] Spyropoulos,A.N., Papathanasiou,A.G. and Boudouvis,A.G., *J. Fluid Mech.*, **870** (2019), pp.389–404.

[4] Trbušić,M., Beković,M., Trlep,M. and Hamler,A., *J. Magn. Magn. Mater.*, **482** (2019), pp.364–369.

[5] Mizuta,Y., *Magnetohydrodynamics*, **44**-2 (2008), pp.155–165.

[6] Mizuta,Y., *J. Magn. Magn. Mater.*, **323**-10 (2011), pp.1354–1359.

[7] 水田　洋, 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動研究の数理,モデリングおよび応用」, **1847** (2013), pp.96–106.

[8] Mizuta,Y., *Magnetohydrodynamics*, **49**-2–4 (2013), pp.191–195.

[9] 水田　洋, 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理と応用」, **1890** (2014), pp.113–123.

[10] Mizuta,Y., *J. Magn. Magn. Mater.*, **431** (2017), pp.209–213.

[11] 水田　洋, 磁性流体連合講演会講演論文集, **26** (2013), pp.50–52.

[12] 水田　洋, 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理とその応用」, **2128** (2019), pp.182–194.

[13] 水田　洋, 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理とその応用」, **2076** (2018), pp.20–31.

[14] 水田　洋, 日本流体力学会年会 2017 講演論文集 (2017) (CD-ROM).

[15] 水田　洋, 磁性流体連合講演会講演論文集, **30** (2017), pp.21–25.

[16] Brebbia,C.A. and Butterfield,R., *Appl. Math. Modelling*, **2** (1978), pp.132–134.

[17] ウォーカー,C.A. ブレビア, S., 境界要素法の基礎と応用 *(*神谷紀生他訳*)*, 培風館, 東京 (1981), 第 2 章.

[18] Rosensweig,R.E., *Ferrohydrodynamics*, Cambridge University Press, Cambridge (1985), Chap.4, Chap.5.

[19] エリ・ランダウ, イェ・リフシッツ, 流体力学 1 (竹内 均 訳), 東京図書, 東京 (1977), 第 7 章.

[20] 小林昭七, 曲線と曲面の微分幾何, 裳華房, 東京 (1995), 第 2 章.

[21] Lloyd,D.J.B., Gollwitzer,C., Rehberg,I. and Richter,R., *J. Fluid Mech.*, **783** (2015), pp.283–305.

[22] Rosensweig,R.E., *Ferrohydrodynamics*, Cambridge University Press, Cambridge (1985), Chap.7.