ループソリトンの相互作用

富山大院　小林　泰之，富山大・工　角畠　浩
Hiroshi Kakuhata and Yasuyuki Kobayashi
Faculty of Engineering, University of Toyama

1　はじめに

我々は最近，ループソリトン解を持つ２成分の連立非分散方程式 (CIDE) [1]

$$\begin{aligned} &\partial_\tau^2 X - \partial_\sigma^2 X = -(\partial_\tau Z + \partial_\sigma Z)X, \\ &\partial_\tau^2 Z - \partial_\sigma^2 Z = (\partial_\tau X + \partial_\sigma X)X \end{aligned} \tag{1}$$

の正の振幅同士の相互作用を調べた。ここで，(X, Z) はストリングの位置ベクトルの成分，τ は時間 σ で「弧長 」（ストリングに沿うパラメータ）である。従来，ループソリトンの相互作用は小さな速度 v の衝突では二つのループが弾くように相互作用し，より大きな v では小さいループが大きなループの中をまわるものと考えられてきた。しかし，さらに大きな v では小さなループが消えるが，ソリトンの個々の成分の挙動を調べると，それらのピークはオーバーラップせず，よりいっそう大きな v で個々の成分のオーバラップが始まることを発見した [2]。

本稿では Konno-Ichikawa-Wadati (KIW) 方程式 [3, 4] で同様の現象が発生するのかを調べる。

2　連立非分散方程式（CIDE）のソリトン解

CIDE (1) は双線形変換

$$\begin{aligned} &X = \frac{G}{F}, \\ &F = \sigma + 2(\partial_\tau - \partial_\sigma)\ln F, \end{aligned} \tag{2}$$

により，双線形方程式

$$\begin{aligned} &(D_\tau^2 - D_\sigma^2 + 1)F \cdot G = 0, \\ &(D_\tau - D_\sigma)^2 - \frac{1}{2}G^2 = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

に変換される。これから 1 ソリトン解,

$$\begin{aligned} &G = e^{\eta}, \\ &F = 1 + Ae^{2\eta}, \end{aligned} \tag{4}$$

を得る。ここで，波数を p，周波数を ω，初期位相を δ ，位相速度を v とすれば，位相 η，係数 A，および分散関係はそれぞれ

$$\begin{aligned} &\eta = \omega\tau + p\sigma + \delta, \\ &A = \frac{1}{16(\omega - p)^2}, \\ &\omega^2 - p^2 = -1, \end{aligned} \tag{5}$$

で与えられる。1 ソリトン解は実空間では，波数を $p = \gamma$，周波数を $\omega = -\gamma v$，初期位相を $\delta = 0$ として,

$$\begin{aligned} &X = A\ \mathrm{sech}\gamma(\sigma - v\tau), \\ &Z = Z_0 + \sigma - A\tanh\gamma(\sigma - v\tau), \\ &\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \\ &A = 2\gamma(1 + v), \end{aligned} \tag{6}$$

で与えられ，Z は tanh のキンク型である。ここで Z_0 は任意定数である。

同じスピード v $(0 < v < 1)$ での 2 ソリトン解は正の振幅のソリトンの正面衝突のとき

$$\begin{aligned} &G = \gamma v\left[(1 - v)\cosh\gamma(\sigma - v\tau) + (1 + v)\cosh\gamma(\sigma + v\tau)\right], \\ &F = \cosh 2\gamma v\tau + (1 - v^2) + v^2\cosh 2\gamma\sigma, \end{aligned} \tag{7}$$

になる。このとき，初期位相は X と Z が $\tau = 0$ で左右対称になるように選んだ。以下では，この解を用いて，ソリトンのピークの挙動から，２ソリトンの相互作用を見る。

3　ソリトンの位置とソリトンの相互作用

ソリトンのをソリトン解の極大（極小）と考え，それらのピークは X 成分に関しては $\partial_\sigma X = 0$ で，Z 成分はキンク型であるから，$\partial_\sigma^2 Z = 0$ で与えられる。$x = e^{2\gamma v\tau}$，$y = e^{2\gamma\sigma}$ とすれば，X に対しては，３次方程式

$$f_X(x, y) = b_{X3}y^3 + b_{X2}y^2 + b_{X1}y + b_{X0} = 0, \tag{8}$$

Z に対しては４次方程式

$$f_Z(x, y) = b_{Z4}y^4 + b_{Z3}y^3 + b_{Z2}y^2 + b_{Z1}y + b_{Z0} = 0, \tag{9}$$

を得る。ここで，それぞれの方程式の係数は

$$
\begin{aligned}
b_{X3} &= -v^2\left[(1+v)x^2+(1-v)x\right], \\
b_{X2} &= (1+v)x^3+(1-v)(3+4v-v^2)x^2+(1+v)(3-4v-v^2)x+1-v, \\
b_{X1} &= -(1-v)x^3-(1+v)(3-4v-v^2)x^2-(1-v)(3+4v-v^2)x-1-v, \\
b_{X0} &= v^2\left[(1-v)x^2+(1+v)x\right],
\end{aligned}
\tag{10}
$$

および

$$
\begin{aligned}
b_{Z4} &= v^2x\left[(1+v)x^2+2(1-v^2)x+1-v\right], \\
b_{Z3} &= -\left\{(1+v)x^4+2(2+v)(1-v^2)x^3\right. \\
&\qquad \left.+2\left[1-4v^4+2(1-v^2)^2\right]x^2+2(2-v)(1-v^2)x+1-v\right\}, \\
b_{Z2} &= -6v^3x(x^2-1), \\
b_{Z1} &= (1-v)x^4+2(2-v)(1-v^2)x^3 \\
&\qquad +2\left[1-4v^4+2(1-v^2)^2\right]x^2+2(2+v)(1-v^2)x+1+v, \\
b_{Z0} &= -v^2x\left[(1-v)x^2+2(1-v^2)x+1+v\right],
\end{aligned}
\tag{11}
$$

で与えられる。$\tau=0$ $(x=1)$ のときには，$\sigma=0$ $(y=1)$ はソリトン間の谷間が厳密解となり，Z では非物理的な解 $y=-1$ も解となる。このとき，方程式 $f_X=0$ と $f_Z=0$ はそれぞれ２次方程式

$$
\begin{aligned}
&v^2y^2-2(2-3v^2)y+v^2=0 \ (\text{for } f_X=0), \\
&v^2(2-v^2)y^2-2(4-4v^2-v^4)y+v^2(2-v^2)=0 \ (\text{for } f_Z=0),
\end{aligned}
\tag{12}
$$

に帰着し，$\tau=0$ $(x=1)$ のとき，X のピークの位置と Z のピークの位置は異なることがわかる。それぞれの２次方程式の解は

$$
\begin{aligned}
y_{X\pm} &= \frac{2-3v^2\pm 2\sqrt{(1-v^2)(1-2v^2)}}{v^2} \ (\text{for } f_X=0), \\
y_{Z\pm} &= \frac{4-4v^2-v^4\pm 2\sqrt{(1-v^2)(2+v^2)(2-3v^2)}}{v^2(2-v^2)} \ (\text{for } f_Z=0),
\end{aligned}
\tag{13}
$$

である。２次方程式が二つの実数解を持つためには，v の範囲が

$$
\begin{aligned}
0<v<\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0.70710 \ (\text{for } f_X=0), \\
0<v<\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 0.81649 \ (\text{for } f_Z=0),
\end{aligned}
\tag{14}
$$

でなければならない。このとき X のピーク $(y_{X-}=y_1, y_{X+}=y_2)$ は $v\geq\dfrac{1}{\sqrt{2}}\approx 0.70710$ で，Z のピークは $v\geq\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 0.81649$ でオーバーラップし，後者では両成分の二つのピークがオーバーラップしている。以下で，これらをいくつかの特徴的な場合に図示する。なお，以下の図では左から順に (X,Z)，X，$\partial_\sigma Z$ であり，(X,Z) では横軸は Z，縦軸は X， X

と $\partial_\sigma Z$ では横軸は σ，縦軸はそれぞれ，X，$\partial_\sigma Z$ であり，時間発展は上から下に向かい，上から 5 行目が $\tau = 0$ である。$v = 0.1$ での相互作用ではどのピークもオーバラップせず，ループソリトン同士が弾くように相互作用しているのが見える（図 1）。$v = 0.4$ での相互作

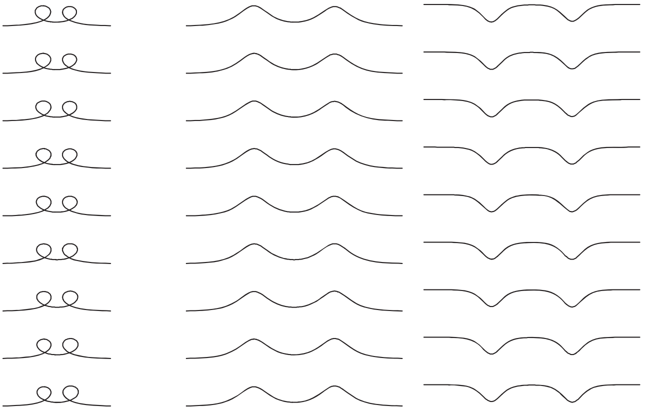

図 1　$v = 0.1$

用では小さいループが，大きなループの中を回っているのが明瞭に見えるが，それぞれの成分はオーバラップしていない（図 2）。$v = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.44721$ での相互作用では小さなループが

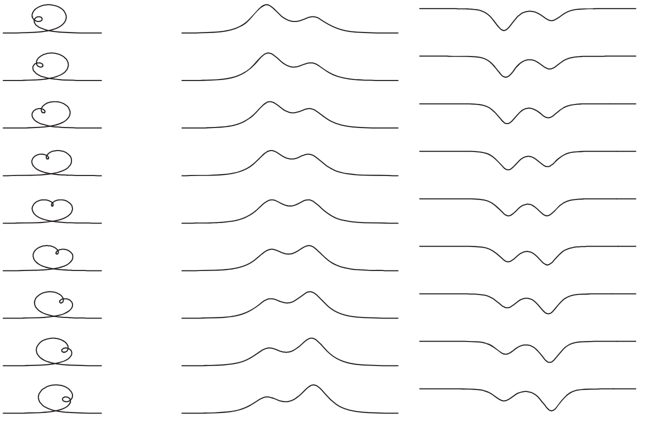

図 2　$v = 0.4$

$\tau = 0$ でカスプ状に，すなわちループではなくなる（図 3）。このときにも依然として，個々

の成分のピークはオーバラップしていない。これは個々のピークのずれが大きくなったためと思われる。$v = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707106$ での相互作用では，$\tau = 0$ ではもはや小さなループは存在

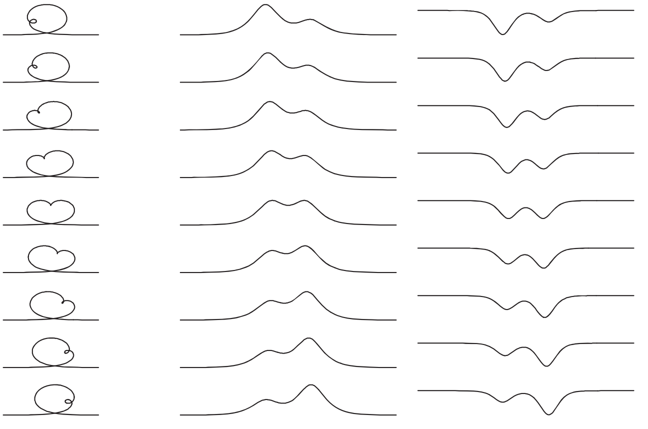

図 3　$v = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.44721$

せず，X 成分のピークがオーバラップし，そのピークは平坦になる。しかし，Z 成分はオーバラップしていない（図 4）。

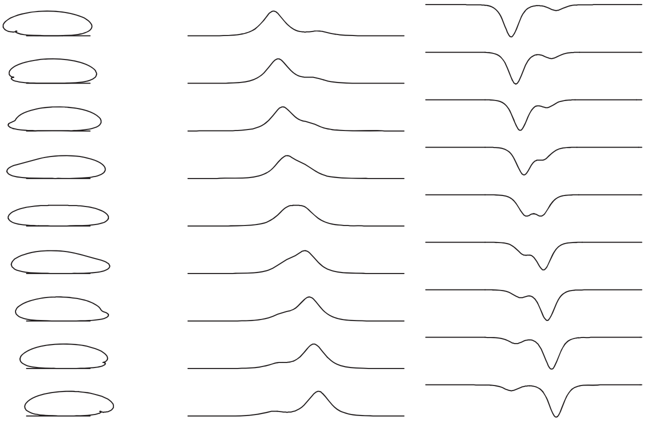

図 4　$v = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707106$

$v = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.81649$ での相互作用では X 成分とともに Z 成分もオーバーラップし，そのピークは平坦になる（図 5)。

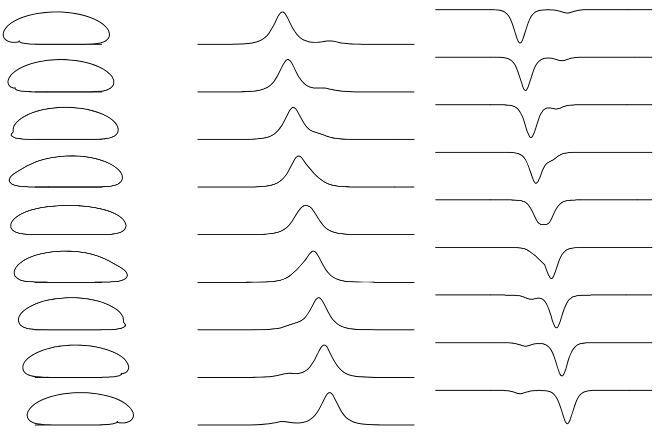

図 5　$v = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.81649$

結局，CIDE での正の振幅のループソリトン相互作用は，従来考えられていた弾く相互作用とループの中をループが回る相互作用だけではなく，大きな v でこれまでに知られていない相互作用を含むものであった。

4　KIW 方程式と mKdV 方程式

では，CIDE でのループソリトン相互作用のようなことは KIW でも起きるのだろうか？ WKI は平面曲線を記述するソリトン方程式で，

$$q_t + \left(\frac{q_X}{(1+q^2)^{3/2}} \right)_{XX} = 0 \tag{15}$$

で与えられる。ここで，t は時間，X は空間座標であり，添字 X は X に関する偏微分を表す（以下同様)。この方程式は Ishimori によりポテンシャル mKdV 方程式

$$\theta_t + \frac{1}{2}\theta_s^3 + \theta_{sss} = 0 \tag{16}$$

あるいは曲線の曲率 κ に対する mKdV 方程式（$\kappa = \theta_s$）

$$\kappa_t + \frac{3}{2} + \kappa^2 \kappa_s + \kappa_{sss} = 0 \tag{17}$$

との関係が指摘された [5]。

曲線の接ベクトル $\boldsymbol{T}$ は

$$\boldsymbol{T}(s) = \frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds} \tag{18}$$

で定義される（図 6)。ここで，$\boldsymbol{r} = (X, Y)$ は曲線の位置ベクトル，s は弧長である。$\boldsymbol{T}$ の

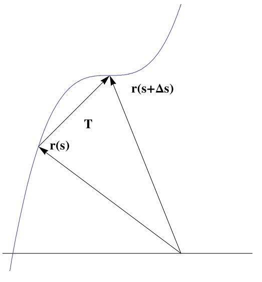

図 6　接ベクトル $\boldsymbol{T}$

X-成分

$$T_X = X_s = \cos\theta \tag{19}$$

と $\boldsymbol{T}$ の Y-成分は

$$T_Y = Y_s = \sin\theta \tag{20}$$

で与えられる。ここで θ はポテンシャル mKdV 方程式 (16) を満足する。従って， X，Y は以下の関係式

$$\begin{aligned} X &= \int^s \cos\theta ds, \\ Y &= \int^s \sin\theta ds, \end{aligned} \tag{21}$$

で結ばれる。曲線 $Y = \phi(X)$ を X の関数として

$$\boldsymbol{r} = (X, \phi(X)) \tag{22}$$

とすれば，微分幾何により

$$\kappa(X) = \frac{\phi_{XX}}{(1+\phi_X^2)^{3/2}}, \phi_t = -\kappa_s\sqrt{1+\phi_X^2} = -\kappa_X \tag{23}$$

なので，$q = \phi_X$ として，KIW 方程式 (15) が得られる [6]。

ポテンシャル mKdV 方程式 (16) は双線形変換

$$\theta = 2i \log \frac{F^*}{F} \tag{24}$$

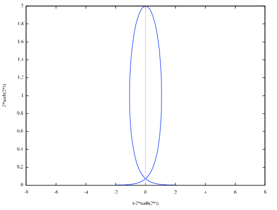

図 7　$t=0,\ k=1$

により，双線形方程式

$$\begin{aligned}&(D_t+D_s^3)F^*\cdot F=0,\\&D_s^2F^*\cdot F=0,\end{aligned}\tag{25}$$

に変換される。この双線形方程式から 1 ソリトン解に対応する τ 関数

$$F=1+ie^{2k(s-4k^2t)}\tag{26}$$

を得る。ここで，k は波数である。変換 (21) により，曲線の位置ベクトルの成分は

$$\begin{aligned}X&=\int^s\cos\theta ds=s-\frac{2}{k}\tanh 2k(s-4k^2t),\\Y&=\int^s\sin\theta ds=\frac{2}{k}\mathrm{sech}\,2k(s-4k^2t),\end{aligned}\tag{27}$$

で与えられる。これはループになっている（図 7)。更に，2 ソリトン解は波数 k_1 と k_2 が，$k_1>k_2>0$ で，位相が $\eta_n=2k_n(s-4k_n^2t)$ $(n=1,2)$ の正の振幅の場合のみを考える。$t=0$ のとき 2 ソリトン解が対称になるように初期位相を選ぶと，2 ソリトンの τ 関数は

$$F=(k_1-k_2)\sinh(\eta_1+\eta_2)-i(k_1+k_2)\cosh(\eta_1-\eta_2)\tag{28}$$

になる。これを用いて，$X_s=\cos\theta$ であるから，X の極値 $X_{ss}=0$ は

$$\partial_s\cos\theta=-\sin\theta\partial_s\left(\frac{F^*}{F}\right)\tag{29}$$

により決定される。しかし，因子

$$\partial_s\left(\frac{F^*}{F}\right)=\frac{4(k_1^2-k_2^2)(k_1\cosh 2\eta_2+k_2\cosh 2\eta_1)}{(k_1-k_2)^2\sinh^2(\eta_1+\eta_2)+(k_1+k_2)^2\cosh^2(\eta_1-\eta_2)}\tag{30}$$

は零点を持たないので，零点は $\sin\theta=\frac{i}{2}\left(\frac{F^{*2}}{F^2}-\frac{F^2}{F^{*2}}\right)=0$ からくる。また，Y の極値も (20) により，$\sin\theta=0$ からくる。このとき，超越方程式

$$\begin{aligned}&\sinh(\eta_1+\eta_2)=0,\\&(k_1-k_2)\sinh(\eta_1+\eta_2)=\pm(k_1+k_2)\cosh(\eta_1-\eta_2)\end{aligned}\tag{31}$$

を満足する s がソリトンの谷間とピークである。$t=0$ のときには，

$$\sinh(\eta_1+\eta_2)=\sinh(k_1+k_2)s=0 \tag{32}$$

がソリトンの谷間に対応し，$s=0$ が厳密解である。$t=0$ での二つのピークに対応する方程式は

$$\begin{aligned}&(k_1-k_2)\sinh(\eta_1+\eta_2)\pm(k_1+k_2)\cosh(\eta_1-\eta_2)\\&=(k_1-k_2)\sinh(k_1+k_2)s\pm(k_1+k_2)\cosh(k_1-k_2)s=0\end{aligned} \tag{33}$$

である。厳密解の導出は困難であるが，

$$k_1+k_2>k_1-k_2 \tag{34}$$

であるから，$\sinh(k_1+k_2)s$ は $\cosh(k_1-k_2)s$ よりも速く大きくなるので，$(k_1-k_2)\sinh(k_1+k_2)s$ と $(k_1+k_2)\cosh(k_1-k_2)s$ は有限の s で $\pm$ に対応して，必ず二つの交点を持つ。また，X と Z のピークはどちらも，$\sin\theta=0$ から決定されるので，ピークの位置は同じであり，ループが消失することはない。

これらを図示（図左は (X,Y) で横軸は X 縦軸は Y，図中央と図右はともに横軸は s，縦軸はそれぞれ $\sin\theta$ と κ である）すると，$k_1=1.5, k_2=2$ のとき，$t=0$ でループは弾くように相互作用しており，KdV ソリトンのピークはオーバラップしていない（図 8)。 CIDE

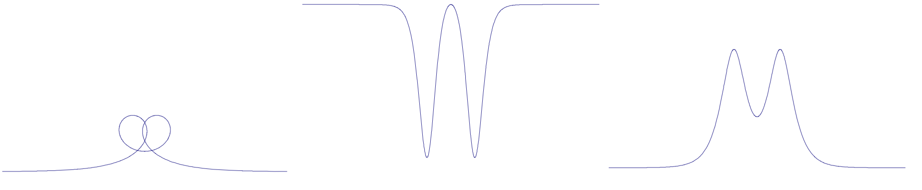

図 8　$t=0,\ k_1=1.5,\ k_2=1$

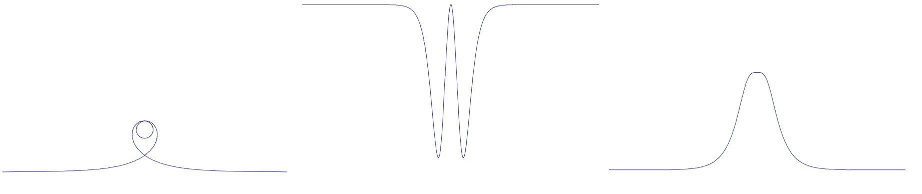

図 9　$t=0,\ k_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2},\ k_2=1$

でピークがオーバーラップするときにはピークが平坦になることから， $\kappa_{ss}(0,0)=0$ から，

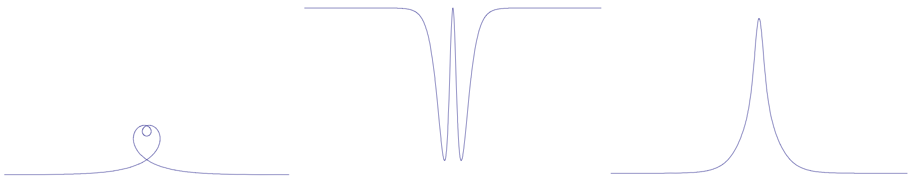

図 10　$t=0,\ k_1=4,\ k_2=1$

$k_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2},\ k_2=1$ で mkdV 方程式の二つのソリトンがオーバーラップすると予想される。実際，mKdV の二つのソリトンがオーバーラップする（図 9)。

mKdV のソリトンが完全にオーバーラップしても大きなループの中に小さなループが回っている（図 10）ので小さなループはソリトンと解釈可能であろう。

5　Discussion

CIDE と KIW のループソリトン相互作用を調べた CIDE では大きな位相速度で各成分のピークがオーバラップするが，KIW では各成分のピークがオーバーラップすることはない。従って，ループが消失することもない。CIDE では時間 0 でのピークの位置を厳密に決定できたが，KIW では超越方程式になり決定できない。CIDE では時間 0 で，各成分 のピークの位置は異なるが，KIW では一致している。この意味では小さいループはソリトンの谷間と見ることもできるが， KIW では mKdV 方程式の小さいソリトンが大きなソリトンとオーバラップして大きなソリトンの中を通過するときにも，小さいループは消失せず，小さいループが大きいループの中を回っているので小さいループはソリトンと解釈可能であった。CIDE ではソリトンが双方向に運動する座標系 σ-τ を用いたが，KIW ではこのような座標系をとることはできず，ソリトンは一方向にのみ運動し分散関係の形も異なる。また，KIW は伸縮性がないとされるが，CIDE ではループをなしているストリングに伸縮性がある [1, 7]。仮説としては，これが大きな違いになっている可能性がある。

参考文献

[1] H. Kakuhata and K.Konno, J. Phys. Soc. Jpn. **68** (1999) 757.

[2] 角畠浩，小林 泰之「ループソリトンの近距離相互作用」，数理解析研究所講究録 2128「非線形波動現象の数理とその応用」，京都大学，2019 年

[3] M. Wadati, K. Konno and Y. H. Ichikawa, J. Phys. Soc. Jpn **47** (1979) 1698. b

[4] K. Konno, Y. Ichikawa, and M. Wadati, J. Phys. Soc. Jpn **50** (1980) 1025.

[5] Y. Ishimori, J. Phys. Soc. Jpn. **50** (1981) 2471.
[6] 井ノ口順一,「開かれた数学 4　曲線とソリトン」, 朝倉書店, 2010 年
[7] K. Konno and H. Kakuhata, Theor. Math. Phys., **134** (2003) No.2. 1527.