

温度勾配のある細管内の熱音響現象の線形および非線形理論

Linear and nonlinear theories for thermoacoustic phenomena in a pore subject to a temperature gradient

関西大学・システム理工学部 杉本 信正

Nobumasa SUGIMOTO

Faculty of Engineering Science, Kansai University

福井工業大学・工学部 清水 大

Dai SHIMIZU

Faculty of Engineering, Fukui University of Technology

1. はじめに

管路内に静止している気体に軸方向に一定の温度勾配を課すと、熱流が管および気体中を定常的に流れる。重力の影響はここでは無視する。熱流は制御できない攪乱に絶えず晒されており揺らいでいる。このため気体の温度や密度、圧力も同様に揺らいでいると考えられる。しかし、気体の粘性や熱伝導性の拡散作用により攪乱は普通減衰し、気体の静止状態が保たれる。

ところが熱流が大きくなり、もし流路を含む系全体に固有振動モードが存在すれば、攪乱がそのモードを共鳴的に励起させ、拡散作用に打ち勝って成長する可能性がある。熱流が外部から定常的に流入出していることから系は熱的に開いているので、攪乱は熱流からエネルギーの供給を受け成長する。この状況は粘性流の不安定性と似ている [1]。

攪乱が不安定化すると指数関数的に成長していくが、振動に伴う様々な非線形現象により攪乱のエネルギーが高次の振動モードにカスケード式に輸送される結果、ある一定の振幅の自励振動が発生する。この現象は熱音響現象と呼ばれている¹。振動のエネルギーは熱（流）から変換されたものであるから、これはまさにプライムムーバ（原動機）作用と見なされる [2, 3, 4]。発生する振動は普通の音に比して遙かに大きく²、エネルギーハーベスティングへの応用が期待されている。なお、温度勾配を課さない気体を外から強制振動させると逆に熱流が発生する。このエネルギー変換はヒートポンプ（冷凍機）作用と見なされ、極低温の冷凍機に応用されている。

熱音響現象の定量化には、約半世紀前にヘリウムのタコニス振動 [5] の解析のために導かれた線形のロット方程式 [6, 7] が現在も利用されている。最近では数値流体力学 (CFD) に基づく高精度なシミュレーション [8, 9] が行われるようになり、特に流れの非線形現象の解明に役立っているが、複雑な流路ではやはり何らかのモデル化が必要になる。CFD は実際の機器を対象とした場合には精密な情報を提供する反面、現象を物理的に理解することには向いておらず、また高度な計算技術と資源も要求する。

著者のグループはロット方程式以降の理論的な進展がなく、また CFD とのギャップがあまりにも広いので、これを埋める理論が非線形振動・波動の立場から構築できないかと考えこの 10 年にわたり研究を行ってきた。ロット方程式は後述する細管近似の下で導出されているが、不安定化させる温度勾配に対する臨界条件の導出には有効であることが、これまでの研究により明ら

¹ 燃焼等の非定常な放熱による音や振動の発生も熱音響現象と呼ばれ、熱流の不安定性による現象と対比される。

² 大気圧下では音圧が³ 170 dB にも達する。

表 1: 理論とそれが目標とする現象

	圧力攪乱の 大きさ $\varepsilon = \Delta p/p_0$	攪乱の タイプ	流路径 R に対する粘性および熱伝導性による拡散層厚さの比 $\delta = \sqrt{\nu/\omega}/R \sim \sqrt{\kappa/\omega}/R$			目標とする現象
			薄い ($\delta \ll 1$)	中間 ($\delta \sim 1$)	厚い ($\delta \gg 1$)	
線形理論	無限小 $\varepsilon \rightarrow 0$	調和振動	ロットの方程式			不安定化の臨界条件 臨界 (中立) 振動
		任意	熱音響波動方程式			初期値問題の設定 初期不安定からの 発展
線形境界層理論	拡散層が薄いまたは 厚い理論の拡張		線形拡散・波動 (移流) 方程式			
弱非線形 理論	微小有限 $0 \ll \varepsilon \ll 1$	任意	非線形 + 線形境界層理論	拡散層が薄いまたは 厚い理論の拡張	非線形拡散・波動 (移流) 方程式	自励振動, 衝撃波 音響流, 熱音響流
非線形 理論	任意		数値計算流体力学 (CFD) (振動流に伴う渦の発生, 剥離, 端面での熱流等)			現象の高精度な シミュレーション

かにされている。しかし、ロットの方程式は不安定化後の攪乱の成長や最終的に出現する自励振動に至るプロセスは記述できない。

表 1 はロットの方程式と CFD との間を埋める理論を、圧力攪乱の大きさと粘性や熱伝導性による拡散層の厚さとにより分類したものである。右端の列は、各行の理論により説明が期待される現象を纏めたものである。ここで、 Δp と p_0 はそれぞれ、圧力攪乱の最大値と静止状態での圧力を表し、 ν および κ は動粘性率と温度拡散率であり、 ω は代表角周波数である。

非線形性を考慮するときに拡散の影響を一般に取り込むことは難しい。そこで非線形理論は、拡散層の厚さと流路径との比が小さいか大きいかの極限の漸近理論である。このため、理論は比が 1 程度の中間の場合は確かにカバーできない。しかし、両理論を中間の場合まで拡張して適用しても、あまり大きな違いは生じないことが分かる。このことから、実質的には両理論だけで十分ではないかと期待される。本報告は既に発表してきた結果を表 1 の観点から見直し概説する。内容は文献 [10] と重複していることを最初にお断りしておきたい。

2. 基礎方程式と仮定のまとめ

2.1 基礎方程式

熱音響現象はニュートン流体の理想気体で記述できるものと仮定する。重力の影響を簡単のため無視する。基礎方程式は連続の式、ナビエ・ストークス方程式、エネルギー式と理想気体の状態方程式により以下のように与えられる：

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{2.1}$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot [2\mu(\mathbf{e} - \frac{1}{3}\mathbf{I}\nabla \cdot \mathbf{v})] + \nabla(\mu_v \nabla \cdot \mathbf{v}), \tag{2.2}$$

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \nabla \cdot (k\nabla T) + \Phi, \tag{2.3}$$

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{T}{T_0}. \tag{2.4}$$

ここで、 ρ , \mathbf{v} , p , T はそれぞれ気体の密度、速度ベクトル、圧力および温度であり、 t を時間として D/Dt はラグランジュ微分 $\partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ を表す。デカルト座標を x_i ($i = 1, 2, 3$), 速度 \mathbf{v} の i

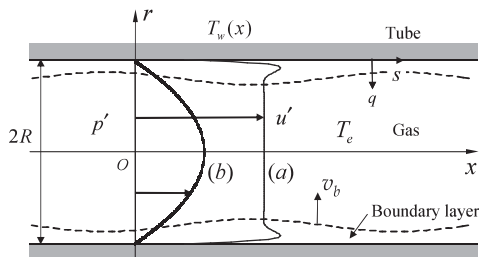


図 1: 温度勾配のある固体壁に囲まれた半径 R の十分に長い管路内の気体. 固体壁の温度 T_w が x 軸方向に緩やかに変化しており, 熱流は固体内のみならず気体中を軸方向に流れる. 静止気体の温度を T_e とすると, 熱流ベクトル \mathbf{q}_e は $-k_e \nabla T_e$ で与えられる. ただし, k_e は温度 T_e での熱伝導率である. 図中の (a), (b) は, 拡散層が流路半径に比べて十分薄い場合 (境界層) と厚い場合の, x 軸方向速度 u' のある瞬間の断面内分布を模式的に表したものである. 境界層外縁での半径方向内向き速度を v_b で表し, s および q は壁面で気体に作用するせん断応力と流入する熱流束密度を表す.

成分を v_i で表すと, e はひずみ速度テンソルであり, その i, j 成分 e_{ij} は $(\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i) / 2$ で与えられる. また \mathbf{I} は単位テンソルである. ひずみ速度テンソル e と粘性応力テンソル σ との間には, $\sigma = 2\mu[e - \text{tr}(e)\mathbf{I}/3] + \mu_v \text{tr}(e)\mathbf{I}$ の関係が成り立ち, Φ は粘性散逸関数 $\text{tr}(\sigma e) [= 2\mu \text{tr}(ee) + (\mu_v - 2\mu/3)[\text{tr}(e)]^2] \geq 0$ を表す. 式 (2.3) の c_p は定圧比熱であり, 添え字 0 はある基準状態での変数の値を示す. 式 (2.2), (2.3) の μ, μ_v, k はそれぞれ, せん断粘性率, 体積粘性率および熱伝導率を表し, 温度の関数として次式で与えられるものとする:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{\mu_v}{\mu_{v0}} = \frac{k}{k_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^\beta. \quad (2.5)$$

ここで, β は実験により決定される定数である. 空気では大体 0.5 から 0.6 程度の値をとる.

図 1 に示すような半径 R の十分に長い流路を考える. その軸に沿って x 軸をとり, 半径方向の座標を r とする. 流路の周りの固体の熱容量は十分大きく, 気体の温度が変動しても固体壁の温度変化は無視できるものとする. 固体壁の温度 $T_w(x)$ は軸対称性を保ちながら軸方向にのみ変化する. 壁面での境界条件として, 速度に対して粘着条件と温度に対して等温条件を課す:

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{and} \quad T = T_w \quad \text{at} \quad r = R. \quad (2.6)$$

流路は x 軸方向には十分長いと仮定し, 両端の境界条件は考慮しない.

2.2 静止状態の温度分布

重力を無視しているので, 静止した気体中の圧力は一様な値 p_0 をとることは (2.2) から明らかである. 静止状態の温度場 T_e を考える. 温度場は (2.3) より次式を満たさなければならない:

$$\nabla \cdot (k \nabla T_e) = 0. \quad (2.7)$$

この式は気体中を定常に流れる熱流ベクトル $\mathbf{q}_e (= -k_e \nabla T_e)$ に対する保存則 $\nabla \cdot \mathbf{q}_e = 0$ である.

壁面温度が軸方向に緩やかに変化し, その代表長さが流路半径に比べて十分長いと仮定すると, 次の不等式が成立する:

$$\frac{R^2}{T_w} \left| \frac{d^2 T_w}{dx^2} \right| \ll \frac{R}{T_w} \left| \frac{dT_w}{dx} \right| \ll 1. \quad (2.8)$$

温度場はこのとき近似的に

$$T_e(x, r) = T_w + \frac{T_w^{-\beta}}{4(1+\beta)} \frac{d^2 T_w^{1+\beta}}{dx^2} (R^2 - r^2) + \dots \quad (2.9)$$

によって与えられる [11, 12].

以下の解析では、 T_w の 2 階以上の高階の微分項が無視できる程度の緩やかな温度勾配を仮定する。言い換えれば、温度勾配の影響は T_w と dT_w/dx を通してのみ考慮するものとする。しかし $(R/T_w)|dT_w/dx|$ の自乗の項は 2 階微分項と同程度に小さいので、(2.9) から

$$T_e = T_w \quad (2.10)$$

となる。よって静止状態の気体温度 T_e は壁面温度に等しく、断面にわたって一様であると見なせる。このとき熱流ベクトル \mathbf{q}_e は x 軸方向にのみ流れる。気体の密度 ρ_e はシャルルの法則 $\rho_e T_e = \rho_0 T_0$ より、 $\rho_e/\rho_0 = T_0/T_e$ と決定される。

2.3 現象を特徴づけるパラメータ

次に振動を特徴づける量について述べる。長さについては、流路の半径 R 、壁面温度が変化する代表長さ L 、音波の波長 a/ω が考えられる。ここで、 a は代表断熱音速、 ω は代表角周波数である。

まず、流路半径が代表長さ L や波長に比べて十分小さいと仮定する、細管近似を導入する：

$$R \ll L \ll a/\omega \quad \text{または} \quad R \ll L \sim a/\omega. \quad (2.11)$$

次に、圧力攪乱の代表的な大きさ（最大値）を Δp とする。この大きさの静止圧力 p_0 に比した量

$$\Delta p/p_0 \equiv \varepsilon \quad (2.12)$$

が非線形性の大きさの程度を表すパラメータである。この値は 1 より十分小さく、大きくても 0.1 程度のオーダーである。

最後に粘性や熱伝導性の拡散の影響を考える。これらは壁面近くで顕著に現れ、その影響が及ぶ距離はそれぞれ $\sqrt{\nu/\omega}$ 、 $\sqrt{\kappa/\omega}$ によって見積もられる。ここで、 ν 、 κ はそれぞれ、動粘性率 μ/ρ および温度拡散率 $k/\rho c_p$ である。両拡散率の比 ν/κ はプラントル数 Pr である。この値は普通の気体では 1 程度であり、空気では約 0.72 である。プラントル数が 1 より小さいと、熱伝導性による拡散のほうが粘性よるものより少し大きくその影響は遠くまで及ぶが、以下では両者の大きさは同程度と見なす。拡散の影響が及ぶ距離と流路半径の比を

$$\frac{\sqrt{\nu/\omega}}{R} \sim \frac{\sqrt{\kappa/\omega}}{R} \equiv \delta \quad (2.13)$$

とする。この値の大きさについては制約を設けない。

流路幅が拡散層の厚さに比して小さくなると、攪乱はもはや断熱音速では伝播できない。流路幅が狭いと気体の温度は熱伝導性により壁面温度に等しくなるので、攪乱は等温音速 $\sqrt{p_0/\rho_e}$ で伝播するように思われるが、後で見るようにそうではない。そこで、伝播の代表速度 $L\omega$ と局所断熱音速 a との比

$$\frac{a}{L\omega} \equiv \chi \quad (2.14)$$

を考える。拡散層が十分薄い間は χ の値は 1 であるが、厚くなると大きくなる。

3. 線形理論

3.1 熱音響波動方程式

温度勾配下で静止している気体中の微小攪乱の振る舞いを考える。各変数を静止状態での値のまわりに展開し、

$$[\rho, u, v, p, T] = [\rho_e(x) + \rho', u', v', p_0 + p', T_e(x) + T'] \quad (3.1)$$

とおく。ここで、 u, v は速度ベクトルのそれぞれ x, r 方向成分であり、 $(\cdot)'$ は攪乱を表す。攪乱は x, r, t の関数である。基礎方程式に細管近似を行い、攪乱について線形化すると

$$\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{u'}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dx} + \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv') = 0, \quad (3.2)$$

$$\rho_e \frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{\mu_e}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u'}{\partial r} \right), \quad (3.3)$$

$$0 = -\frac{\partial p'}{\partial r}, \quad (3.4)$$

$$\rho_e c_p \left(\frac{\partial T'}{\partial t} + u' \frac{dT_e}{dx} \right) = \frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{k_e}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T'}{\partial r} \right), \quad (3.5)$$

$$\frac{p'}{p_0} = \frac{\rho'}{\rho_e} + \frac{T'}{T_e} \quad (3.6)$$

を得る [11]。式 (3.4) より p' は断面にわたって一様であることが分かる。この結果は境界層近似に似ており、以後の解析を大きく単純化するものである。今後 $p'(x, t)$ は x と t だけの関数であることに留意する。

この結果を用いると上式を p' に対する一つの式に纏めることができる。時間に関するフーリエ変換を行い、壁面での境界条件を用いると、(3.3) から u' を p' によって表すことができる。これを (3.5) に用いると、 T' を p' で表すことができる。さらに、(3.6) から ρ' も p' で表せるので、これらを (3.2) に代入し、 v' について解くと境界条件から p' が満たすべき方程式を導くことができる。この式をフーリエ逆変換すれば p' の時空間での方程式が得られる。

この方法は単純であるが計算が面倒であり、見通しもよくない。そこで各方程式を流路の全断面で平均して p' 以外の量を消去すると、次のように纏めることができる [11]：

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a_e^2 \frac{\partial p'}{\partial x} \right) = \frac{2}{R} \left[-\frac{\partial}{\partial x} (a_e^2 s) + \frac{\partial}{\partial t} \left(a_e^2 \frac{q}{c_p T_e} \right) \right]. \quad (3.7)$$

ここで、 $a_e(x)$ は局所的な線形断熱音速であり、 $\sqrt{\gamma p_0 / \rho_e} [= \sqrt{(\gamma - 1) c_p T_e}]$ (ただし、 γ は比熱比) で与えられ、 s と q は壁面で気体に作用するせん断応力と気体に流れこむ熱流束であり、次のように与えられる：

$$s = \mu_e \frac{\partial u'}{\partial r} \Big|_{r=R} \quad \text{および} \quad q = k_e \frac{\partial T'}{\partial r} \Big|_{r=R}. \quad (3.8)$$

方程式 (3.7) の左辺は、温度が一様でない気体中の断熱音波の伝播を表し、右辺はこれに対する拡散の影響を表す。せん断応力が二重極を、熱流束が単極として作用する。

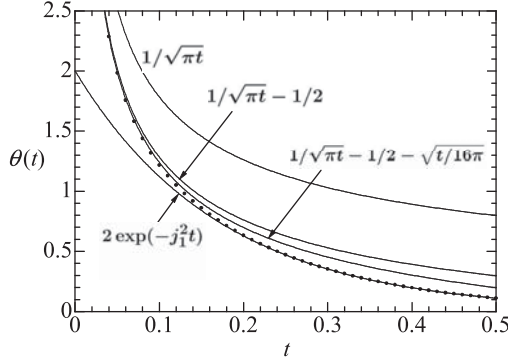


図 2: 無次元化した緩和関数 $\theta(t)$ のグラフ. 関数は $t \rightarrow 0$ において漸近的に $\theta = 1/\sqrt{\pi t} - 1/2 - \sqrt{t/16\pi}$ によって表され, 一方 $t \rightarrow \infty$ では $2\exp(-j_1^2 t)$ に漸近する. ここで, j_1 は $J_1(j_1) = 0$ を満たし $j_1 \approx 2.40$ である.

この s や q は外から与えられるものではなく, p' によって表すことができる. 実際に s を求めると

$$s = \sqrt{\nu_e} \mathcal{N}_\nu \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right) \quad (3.9)$$

となる. ここで \mathcal{N}_ν は $\partial p'/\partial x$ の汎関数を表し,

$$\mathcal{N}_\nu \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right) = \int_{-\infty}^t \Theta \left[\frac{\nu_e(t-\tau)}{R^2} \right] \frac{\partial p'}{\partial x}(x, \tau) d\tau \quad (3.10)$$

によって定義される. 緩和関数 Θ は

$$\Theta \left(\frac{\nu_e t}{R^2} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega)^{-\frac{1}{2}} \frac{I_1(1/\delta_e)}{I_0(1/\delta_e)} e^{-i\omega t} d\omega \quad (3.11)$$

によって与えられる [11]. ここで, I_0, I_1 は変形ベッセル関数であり, $\delta_e = (i\nu_e/\omega)^{\frac{1}{2}}/R$ である. いま $\nu_e t/R^2$ を無次元の t とおき, $\Theta(t) = \sqrt{\nu_e} \theta(t)/R$ とおく. 無次元化した緩和関数 θ のグラフを図 2 にドットで示す. 関数は $t \rightarrow 0$ で $1/\sqrt{\pi t}$ に漸近し発散する一方, $t \rightarrow \infty$ においては指数関数的に減衰する.

同様にして, q は

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} = c_p T_e \sqrt{\nu_e} \left\{ -\frac{\gamma-1}{\sqrt{Pr}} \mathcal{N}_\kappa \left(\frac{1}{a_e^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{(1-Pr)T_e} \frac{dT_e}{dx} \left[\mathcal{N}_\nu \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right) - \frac{1}{\sqrt{Pr}} \mathcal{N}_\kappa \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right) \right] \right\} \quad (3.12) \end{aligned}$$

によって与えられる. ここで, \mathcal{N}_κ は \mathcal{N}_ν の ν_e を $\kappa_e (= \nu_e/Pr)$ で置き換えた汎関数である. 温度勾配が無ければ 2 行目がゼロとなり, $a_e^2 = (\gamma-1)c_p T_e$ の関係を用いると, (3.12) は t に関して積分できて

$$q = -\sqrt{\kappa_e} \mathcal{N}_\kappa \left(\frac{\partial p'}{\partial t} \right) \quad (3.13)$$

となる．これをせん断応力の関係 (3.9) と対比してみると興味深い．せん断応力は (3.8) から速度の空間勾配の瞬時の値によって決定される一方，(3.9) から圧力の空間勾配の履歴積分で与えられる．熱流も (3.8) から温度の空間勾配の瞬時の値によって決定される一方，(3.13) から圧力の時間勾配の履歴積分で表される．せん断応力と熱流は一見両者は独立しているように見える．確かにせん断応力 (3.9) に熱流は関与しない．ところが温度勾配があれば，(3.12) から熱流にせん断応力が影響を与えることになる．温度勾配の正負の違いにより同じせん断応力の下でも，粘性による熱流の流れる向きが反対になる．

関係 (3.9), (3.12) を (3.7) に代入すると， p' に対して次の波動方程式が導出される：

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a_e^2 \frac{\partial p'}{\partial x} \right) + \frac{2}{R} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[a_e^2 \sqrt{\nu_e} \mathcal{N}_\nu \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right) \right] + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{Pr}} \sqrt{\nu_e} \mathcal{N}_\kappa \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} \right) - \frac{\sqrt{\nu_e}}{1 - Pr} \frac{a_e^2}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \left[\mathcal{N}_\nu \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right) - \frac{1}{\sqrt{Pr}} \mathcal{N}_\kappa \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right) \right] \right\} = 0. \quad (3.14)$$

この方程式を熱音響波動方程式と呼ぶことにする [11]．

最後に，(3.2) から (3.6) を用いて音のエネルギー式を導出すると，次式で与えられる [13]：

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_e \bar{u}^2}{2} + \frac{p'^2}{2\rho_e a_e^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (p' \bar{u}) = \frac{2}{R} \left(\bar{u} s + \frac{p' q}{\rho_e c_p T_e} \right). \quad (3.15)$$

ここで， \bar{u} は次の断面平均を表す：

$$\bar{u} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r u'(r, x, t) dr. \quad (3.16)$$

式 (3.15) の左辺の t 微分の下の方量は，断面平均した音の運動エネルギー密度とポテンシャルエネルギー密度の和を表し， x 微分の下の方量は断面平均した音のエネルギー流束密度（音の強度）を表す．右辺はせん断応力と熱流束によるエネルギーの減衰または生成項を表す．

3.2 熱音響波動方程式の近似

熱音響波動方程式は細管近似と線形近似の下，拡散層の厚さについて何ら制約を設けることなく (δ の大きさが任意) 導出されている．この結果，方程式は微積分方程式で与えられる複雑な形をしており，このまま解くことは困難と思える．そこで，拡散層が薄い ($\delta \ll 1$) または厚い ($\delta \gg 1$) 極端な場合を考える [11]．

熱音響波動方程式に周期 $2\pi/\omega$ の時間周期的な解が存在すると仮定しよう．このとき s や q も当然同じく時間周期的である．緩和関数 Θ の引数の中の R^2/ν_e は粘性拡散時間を表し，引数 $\nu_e(t-\tau)/R^2$ は現在の時刻 t と過去のある時刻 τ との時間差 $t-\tau$ と拡散時間との比である．時間差を周期 $2\pi/\omega$ で見積もり，これと拡散時間との大小で緩和関数を近似する．いま周期が緩和時間より小さい， $2\pi/\omega \ll R^2/\nu_e$ とすると， $|\delta_e| \ll 1$ となる．一方，周期が長いと $|\delta_e| \gg 1$ となる．言い換えると，前者では拡散層の厚さ $\sqrt{\nu_e/\omega}$ が R に比べて薄い場合であり，後者は厚い場合に相当する．

3.2.1 拡散層が薄い場合

緩和関数を $|\delta_e| \ll 1$ として近似すると,

$$\Theta\left(\frac{\nu_e t}{R^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + \dots \quad (3.17)$$

となる. これより履歴積分 \mathcal{N}_ν は

$$\mathcal{N}_\nu\left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{\partial p'}{\partial x}(x, \tau) d\tau \equiv \frac{\partial^{-\frac{1}{2}}}{\partial t^{-\frac{1}{2}}}\left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right) \quad (3.18)$$

と近似される. ここで, (3.18) は $\partial p'/\partial x$ の $-1/2$ 階の微分と呼ばれる [14, 15]. 同様に \mathcal{N}_κ も近似され, これらの関係を用いると (3.14) は次式のように近似される:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a_e^2 \frac{\partial p'}{\partial x} \right) \\ & + \frac{2a_e^2 \sqrt{\nu_e}}{R} \left[C \frac{\partial^{-\frac{1}{2}}}{\partial t^{-\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} \right) + \frac{(C + C_T) dT_e}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial^{-\frac{1}{2}}}{\partial t^{-\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

ここで, C, C_T は定数であり, 以下のように与えられる:

$$C = 1 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{Pr}}, \quad C_T = \frac{1}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{\sqrt{Pr} + Pr}. \quad (3.20)$$

3.2.2 拡散層が厚い場合

一方, $|\delta_e| \gg 1$ として (3.14) を近似すると

$$\Theta\left(\frac{\nu_e t}{R^2}\right) \approx \frac{2\sqrt{\nu_e}}{R} \exp\left(-j_1^2 \frac{\nu_e t}{R^2}\right) \quad (3.21)$$

となり, Θ は指数関数的に急激に減衰する. ここで, j_1 はベッセル関数 $J_0(z)$ の最小のゼロ点であり, $j_1 \approx 2.40$ である.

周期が長い変動では $\nu_e t/R^2$ の全てにわたる緩和関数 (3.11) が影響を及ぼす. 詳細は省くが, このとき (3.14) は次の拡散・波動 (移流) 方程式によって近似される:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_e \frac{\partial p'}{\partial x} \right) + \frac{\alpha_e}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial p'}{\partial x} + \left[\frac{8}{6} \gamma - (\gamma - 1) Pr \right] \frac{\alpha_e}{a_e^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} \\ & - \frac{1}{6} (1 + \beta + Pr) \frac{\alpha_e R^2}{\nu_e T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} = 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

ここで, α_e は

$$\alpha_e = \frac{p_0 R^2}{8\mu_e} \quad (3.23)$$

によって与えられ, 圧力波の流路方向への拡散率である. この拡散率は分子粘性による動粘性率 ν_e ($\sim 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$) 等に比べて遙かに大きく, 温度が高くなると μ_e の温度依存性から $T_e^{-\beta}$ に比例して減少する.

方程式 (3.22) の最初の 2 項は, 温度勾配がなければ圧力攪乱は狭い流路の中では拡散していくだけで, 伝播できないことを示している. しかし温度勾配があれば, 第 3 項から攪乱は温度勾配

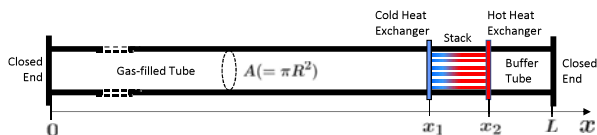


図 3: 両端が閉じた長さ L , 半径 R の直管の中に, 半径 R_s の多くの細孔からなるいわゆるスタックを区間 $x_1 < x < x_2 (= x_1 + L_s)$ の間に設置し温度勾配を与え熱流を発生させる場合.

の正の向きに伝播(移流)することが分かる. これら 3 つの項は最低次の近似 ($\delta \rightarrow \infty$) である. 第 4 項と 2 行目の式は, 拡散層の厚さに対する管の半径の有限効果 ($1 \ll \delta \ll \infty$) を表す.

3.3 ロットの方程式と臨界条件

熱音響波動方程式 (3.14) に時間周期的な解が存在するとして, $p' = P(x) \exp(i\omega t)$ なる形の解を探す. ここで, $P(x)$ は複素振幅を表し, 右辺は実部をとるものとする. 角周波数 ω は未定であり, 周期解が存在するように決定する. 方程式 (3.14) はこのとき

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - f_\nu) a_e^2 \frac{dP}{dx} \right] + \left(\frac{f_\nu - f_\kappa}{1 - Pr} \right) \frac{a_e^2}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{dP}{dx} + \omega^2 [1 + (\gamma - 1) f_\kappa] P = 0 \quad (3.24)$$

となる. ここで, f_ν, f_κ はそれぞれ

$$f_\nu(\eta_e) = \frac{2I_1(\eta_e)}{\eta_e I_0(\eta_e)}, \quad f_\kappa(\eta_e) = f_\nu(\sqrt{Pr} \eta_e) \quad (3.25)$$

で定義され,

$$\eta_e = \left(\frac{i\omega}{\nu_e} \right)^{1/2} R \quad (3.26)$$

である. 方程式 (3.24) はロットの方程式と呼ばれる [6, 7]. これは変数係数をもつ P の 2 階の微分方程式であるが, 断面平均した流速振幅 $U = [i(1 - f_\nu)(\rho_e \omega)^{-1} dP/dx]$ を用いて, P と U の 1 階の連立方程式に表現する方が数値計算では便利である [16]. 方程式の係数は, 与える温度分布 T_e により $a_e^2/a_0^2 = T_e/T_0$, $\nu_e/\nu_0 = \kappa_e/\kappa_0 = (T_e/T_0)^{(1+\beta)}$ と温度比だけで決定される.

方程式 (3.24) を解くには x に関する境界条件が必要になる. 例えば両端が固定壁の場合には, 両端で $dP/dx = 0$, ループ管路の場合には全長 L を一周期とする周期関数, すなわち $P(x) = P(x+L)$, $U(x) = U(x+L)$ の周期条件を要求する. これにより ω に対する固有値問題が構成される. この問題を解くと実数の ω が存在することがある. このときの最高温度 T_H と最低温度 T_0 の比と, $R/\sqrt{\nu_0/\omega}$ との関係が臨界条件(曲線)として得られる.

例として, 図 3 に示す両端が閉じた直管の中に, いわゆるスタックを設置した場合を考える. スタックは半径 R , 長さ L の円筒形状をしており, その断面内には半径 $R_s (\ll R)$ の多くの細孔が軸方向に貫通している. 細孔全ての断面積を管の断面積で除した量を空隙率 ϕ と呼ぶ.

スタックの両端に設置した熱交換器から熱流が流入出する. スタック付近の温度分布を図 4 のように仮定する. このときの臨界条件を図 5 に示す [16]. 実線はロットの方程式を解いて求めた臨界曲線である. 縦軸はスタック両端の温度比であり, 横軸はスタックの細孔半径 R_s の粘性拡散層

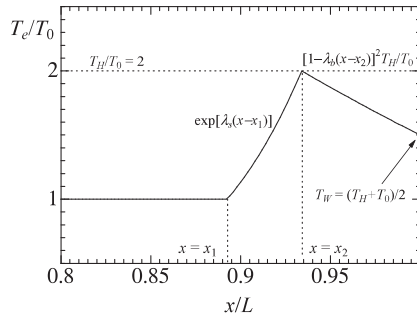


図 4: スタック付近での壁面の温度分布. スタック内の温度 T_e は指数関数 $T_0 \exp[\lambda_s(x - x_1)]$ で増加し, 温度緩衝 (バッファ) 管 ($x_2 < x < L$) 内の温度は放物線 $T_H[1 - \lambda_b(x - x_2)]^2$ で減少し, $T_e(L) = (T_H + T_0)/2$ とする.

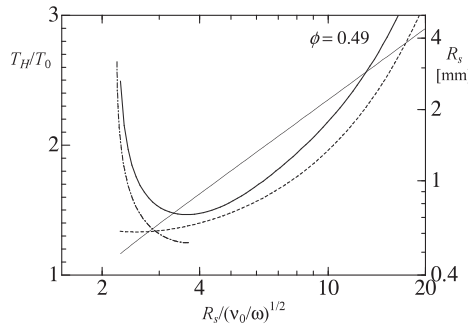


図 5: 臨界 (中立) 振動が発生するスタック両端の温度比 T_H/T_0 とスタックの細孔 R_s との関係 (臨界条件). 曲線より上は不安定領域, 下が安定領域である. ここで, 実線はロットの理論を用いて導出した条件であり, 破線および一点鎖線は, 細孔内でそれぞれ薄い拡散層および厚い拡散層の理論を用いて導出した条件である. スタック外部では薄い拡散層理論を用いている. 直線は無次元の横軸と R_s との関係を示す.

の厚さに対する比を表し, $1/\delta$ に相当する. 曲線上で ω の虚部がゼロであり, その上部は虚部が負の不安定領域, 下部は正の安定領域に対応する.

図中の破線と一点鎖線はそれぞれ, 拡散層が薄いまたは厚い場合の近似方程式をスタック内の気体に対して適用して求めた臨界曲線である. スタックの外部では拡散層が薄い場合の方程式を用いている. 前者は横軸が 1 より十分大きい領域 ($\delta \ll 1$), 後者は 1 より十分小さな領域 ($\delta \gg 1$) のみ成立する近似であるが, 本来の領域を超えて結構広い領域 ($\delta \sim 1$) でもロットの方程式による結果と大きく変わらないことが分かる. 言い換えれば, 二つの近似が本来適用できない $\delta \sim 1$ の領域は実質的に狭いことが分かる. 古くから知られているタコニス振動やソンドハウス管ではスタックは用いられていない. このような場合には拡散層は流路幅より小さいので, (3.19) だけを用いても臨界条件が導出できる [17, 18].

臨界条件をエネルギー方程式 (3.15) から考える. 周期解を仮定しているので, (3.15) を一周期

にわたって積分すると左辺第1項はゼロとなり、次の関係式が得られる：

$$\frac{d}{dx}(\widetilde{p'u'}) = \frac{dI}{dx} = \frac{2}{R} \left(\widetilde{u's} + \frac{\widetilde{p'q}}{\rho_e c_p T_e} \right). \quad (3.27)$$

ここで、 $I = \widetilde{p'u'}$ であり、 $\widetilde{(\cdot)}$ は時間平均

$$\widetilde{(\cdot)} = \frac{\omega}{2\pi} \int_t^{t+2\pi/\omega} (\cdot)(x, t) dt \quad (3.28)$$

を表す。

長さ L の両端が閉じた直管では、両端 $x=0$ と $x=L$ との間で (3.27) を積分すると

$$I \Big|_{x=L} - I \Big|_{x=0} = \frac{2}{R} \int_0^L \left(\widetilde{u's} + \frac{\widetilde{p'q}}{\rho_e c_p T_e} \right) dx = 0 \quad (3.29)$$

となる。両端では $\widetilde{u'} = 0$ であるので $I = 0$ となり、左辺はゼロになる。この条件が満たされるには、中辺の第1項の積分は摩擦のする仕事率であり負と考えられるので、第2項の積分が正になる必要がある。熱流束 q を $\rho_e c_p T_e$ で除した量は速度の次元を有することに注意する。第2項は非定常な放熱 q により音が発生するレイリーの条件 [19, 20] によく似ている。レイリーの条件では単位時間当たりの放熱量 q [J/m³s] を体積積分するのに対し、(3.29) の q は壁面での熱流束密度の違いがあるが本質は同じである。

4. 非線形理論

この節では攪乱の大きさが有限になり、2次の非線形性を考慮する必要が生じた場合の弱非線形理論を紹介する。仮定としては、細管近似 (2.11) に加え、圧力攪乱の大きさを $0 \ll \varepsilon \ll 1$ とする。攪乱による代表速度 U を連続の式より $\varepsilon\omega L$ と見積もると、音響マッハ数 Ma は

$$Ma \equiv \frac{U}{a} = \frac{\varepsilon\omega L}{a} \sim \frac{\varepsilon}{\chi} \quad (4.1)$$

となる。これより χ が1程度の間は Ma は ε と同程度であるが、 χ が大きくなると Ma は小さくなる。

運動方程式の非線形項である慣性項の大きさを見積もる。代表速度を U 、代表長さを流路幅 R にとると、レイノルズ数 Re は

$$Re = \varepsilon\omega LR/\nu \quad (4.2)$$

と定義される。レイノルズ数は普通は1より十分大きい⁵⁾が、流路幅が狭くなると1程度に小さくなる。

次に音響レイノルズ数 Ra を定義する。線形断熱音速を a として、波長 a/ω と a に基づいたレイノルズ数

$$Ra = a^2/\nu\omega \quad (4.3)$$

を音響レイノルズ数と定義する。音響レイノルズ数は $Ra \gg 1$ である。例えば、 $\varepsilon \sim 10^{-1}$ 、 $a \sim 3 \times 10^2$ m/s、 $\omega \sim 10^2$ /s と仮定して、 $L \sim 0.1$ m、 $R \sim 10^{-3}$ m、 $\nu \sim 10^{-5}$ m²/s とすれば、 $Re \sim 10^2$ 、 $Ra \sim 10^8$ となり上の見積りは成り立つ。スタックの細孔の外では R は 10^{-3} m より大きいので、 Re はさらに大きい。

レイノルズ数と音響レイノズル数を (2.12)-(2.14) で定義したパラメータ δ, χ を用いて表すと

$$Re = \frac{\varepsilon L}{\delta^2 R}, \quad Ra = \left(\frac{\chi L}{\delta R} \right)^2 \quad (4.4)$$

の関係があるので、 $Re = (\varepsilon/\delta\chi)\sqrt{Ra}$ となる。これより δ, χ の値によっては、 Re は 1 程度に小さくなる時がある。

拡散層の厚さを制限しない線形の熱音響波動方程式を、非線形の場合に一般に拡張することは難しい。しかし、拡散層の厚さの違いにより現象がそれぞれ異なること、線形理論の結果から δ が 1 程度の中間の場合が拡散層の薄い場合と厚い場合を拡張して取り扱えることから、 $\delta \ll 1$ と $\delta \gg 1$ の二つの場合の非線形理論について考える。

4.1 拡散層が薄い場合

拡散層が流路徑に比べて薄い場合 ($\delta \ll 1$) には、流路内を拡散（境界）層とその外側のコア領域とに分けて取り扱うことができる（図 1 参照）。コアの領域では Re が大きいので拡散の影響は小さい。一方、境界層は薄いのでコア領域に及ぼすその影響は小さく、線形近似で考慮する。

基礎方程式をコア領域で平均する。ある物理変数を $\psi(x, r, t)$ として、コア領域での量を断面平均量 $\psi_m(x, t)$ とそれからの偏差量 $\dot{\psi}(x, r, t)$ との和 ($\psi = \psi_m + \dot{\psi}$) に分けて取り扱う：

$$\psi_m = \frac{1}{A} \int_A \psi \, dA, \quad \int_A \dot{\psi} \, dA = 0. \quad (4.5)$$

ここで、 A はコア領域の断面積であり、 dA はその面積要素である。偏差量は境界層の厚みに応じて変化しており、 A も定数ではなく x と t に依存する。

連続の式、 x 方向の運動方程式、エネルギー式および状態方程式をそれぞれコア断面で積分し、平均量を考えると次のように表せる [21]：

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_m u_m) = \frac{2\rho_m}{R} v_b, \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} + u_m \frac{\partial u_m}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_m} \frac{\partial p_m}{\partial x}, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial S_m}{\partial t} + u_m \frac{\partial S_m}{\partial x} = 0, \quad (4.8)$$

$$\frac{p_m}{p_0} = \left(\frac{\rho_m}{\rho_e} \right)^\gamma \exp \left(\frac{S_m - S_e}{c_v} \right). \quad (4.9)$$

ここで、 S はエントロピーを表し、 S_e は静止状態での値である。式 (4.6) の v_b は境界層外縁での半径方向のコア領域内向きの速度であり、コア領域の u_m を u' とみなすと、次のように与えられる：

$$v_b = \sqrt{\nu_e} \left[C \frac{\partial^{-\frac{1}{2}}}{\partial t^{-\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right) + \frac{C_T}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial^{-\frac{1}{2}} u'}{\partial t^{-\frac{1}{2}}} \right]. \quad (4.10)$$

ちなみに、壁面から境界層に流入する熱流束密度 q は

$$q = \rho_e c_p T_e \sqrt{\nu_e} \left[(C-1) \frac{\partial^{-\frac{1}{2}}}{\partial t^{-\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right) + \left(C_T - \frac{1}{2} - \frac{\beta}{2} \right) \frac{1}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial^{-\frac{1}{2}} u'}{\partial t^{-\frac{1}{2}}} \right] \quad (4.11)$$

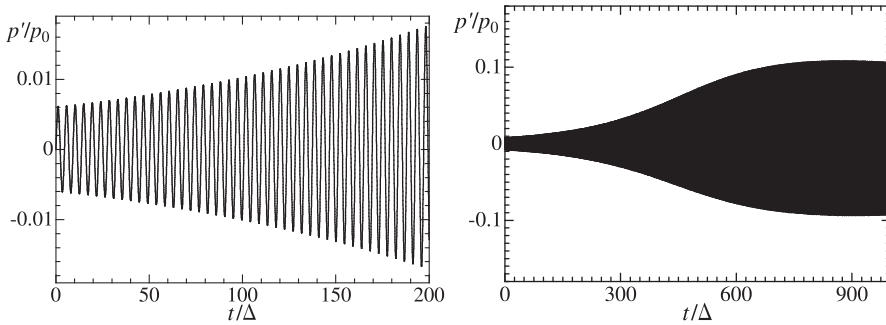


図 6: 低温端が開口し、高温端が閉じた管 (1/4 波長管) でのタコニス振動の初期不安定 (左図) と自励振動の発生 (右図) のシミュレーション。

によって与えられ、 v_b と q とは厳密には比例しないが同じような傾向を示すことは注目に値する。温度勾配がなければ両者は完全に比例する。壁面から熱流が拡散層に流入すると、境界層外縁の速度 v_b もほぼ連動して正となりコア領域を締め付け、境界層がコア領域に仕事をするようになる。逆に熱流が流出すると v_b も負になり、コア領域が境界層に対して仕事をするようになる。コア領域では粘性を無視しているため、波のエネルギーの散逸や生成は境界層を介して行われる。なお、衝撃波が発生する可能性があるときには、(4.7) の右辺に粘性項は小さいけれども残しておく必要がある。

具体的な問題に対して上で導出した方程式を用いて初期境界値問題を解いて、温度勾配の大きさによって攪乱が成長し、その後次第に振幅が飽和し自励振動が発生する過程のシミュレーションをすることができる。開口端を極低温に保ち、固定端が常温の管で発生するヘリウムタコニス振動のシミュレーション結果を図 6 に示す [22, 23]。縦軸は閉端での超過圧 p' を表し、横軸は初期からの時間を表す。ここで Δ は線形の固有振動の一周期である。左図は初期の不安定化する様子を示し、右図は不安定化した振動が次第に飽和し、一定振幅の自励振動の発生を示している。

4.2 拡散層が厚い場合

拡散層が厚い場合には、流路全体に拡散の影響が及ぶので流れは圧力勾配と粘性とが釣り合ったポアズユ流に近いものと予想される。実際、 u' は

$$u' = -\frac{1}{4\mu_e} \frac{\partial p'}{\partial x} (R^2 - r^2) \quad (4.12)$$

によって与えられる (図 1 参照)。これは非圧縮流れのポアズユ流と同じ形をしているが、ここでは圧縮性の影響で半径方向の速度 v' がゼロではなく

$$v' = \frac{1}{2p_0 R^2} \frac{\partial p'}{\partial t} (R^2 - r^2)r \quad (4.13)$$

と最低次の近似では与えられる [11, 24]。レイノルズ数 Re が 1 程度に小さくなると、運動方程式の非線形性である慣性項は高次項となる。

非線形性は慣性項ではなく、むしろ密度変化が大きいことから連続の式の密度変化項 $\rho^{-1} D\rho/Dt$ から生じる。詳細は文献 [24] を参照して頂くとして、最終的に p' を支配する式として次の非線形

拡散・波動（移流）方程式が導かれる：

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_e \frac{\partial p'}{\partial x} \right) + \frac{\alpha_e}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial p'}{\partial x} + \left[\frac{8}{6} \gamma - (\gamma - 1) Pr \right] \frac{\alpha_e}{a_e^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} \\ - \frac{1}{6} (1 + \beta + Pr) \frac{\alpha_e R^2}{\nu_e T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} - \frac{p'}{p_0} \frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{\alpha_e}{p_0} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

最後の二つの項が新たに付け加わる．この方程式により狭い流路内の音響流の解析が可能になることが期待される．

5. おわりに

温度勾配のある細管内の熱音響現象を定量化するために，著者のグループがこれまで展開してきた線形および弱非線形理論を紹介した．またそれらの適用例として，両端が閉じた直管の内で生じる不安定化の臨界条件の導出を示し，非線形理論の例としてはタコニス振動における初期不安定化から自励振動の発生を示した．非線形理論は，ロットの方程式では記述できない現象への適用ができることがメリットである．これにより線形理論とCFDとの間の理解のギャップが少しでも埋まることが期待される．

最後に展開した理論の制約について述べる．理論では流路は十分長く，端の影響は全く考慮していない．スタックの両端では，線形の場合には質量およびエネルギー流束の連続条件を課せば問題はないと思われる．実際，スタックを挿入した場合の臨界条件はこうして求められている [13, 25]．しかし，振動が大きくなると渦や剥離の発生など流れの非線形性の影響をどのように取り込めばよいか次の問題である．

もう一つは固体側の問題である．これまでは流路壁の熱容量が十分大きく，気体の変動しても壁面温度は変化せず一定として取り扱ってきた．実際のスタックや再生器と呼ばれる複雑な流路をもつポーラスな物質では熱容量は必ずしも小さくなく，壁面温度は気体温度により変動する．この影響を取り込むには，固体中の熱伝導を解く必要が起り，壁面上では熱流束密度の連続性が要求されることになる．この解析は線形理論でも極めて複雑になるが，共鳴のような現象が起きる可能性があり今後の研究が必要である [12]．

本研究は日本学術振興会・科学研究費補助金 (KAKENHI No. 26289036, No. 18H01375 および No. 18K03938) の助成により行われたものであることを記し謝意を表す．

参考文献

- [1] 杉本 信正, “熱流の不安定性と熱音響現象 第1回 一導入編一,” 日本流体力学会誌「ながれ」, **33**, 181-194 (2014), ”同 第2回 一線形理論編一,” **33**, 307-322 (2014), ”同 第3回 一非線形現象編一,” **33**, 375-393 (2014).
- [2] Wheatley, J., Hofer, T., Swift, G. W. & Migliori, A., “An intrinsically irreversible thermoacoustic heat engine,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **74**, 153-170 (1983).
- [3] Swift, G. W., “Thermoacoustic engines,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **84**, 1145-1180 (1988).
- [4] Swift, G. W., *Thermoacoustics A Unifying Perspective for Some Engines and Refrigerators* 2nd edn. ASA Press, Springer (2017).

- [5] Taconis, K. W., Beenakker, J. J. M., Nier & A. O. C., Aldrich, L. T., "Measurements concerning the vapour-liquid equilibrium of solutions of He^3 in He^4 below 2.19°K ," *Physica*, **15**, 733–739 (1949).
- [6] Rott, N., "Damped and thermally driven acoustic oscillations in wide and narrow tubes," *Z. Angew. Math. Phys.*, **20**, 230–243 (1969).
- [7] Rott, N., "Thermally driven acoustic oscillations. Part II: stability limit for helium," *Z. Angew. Math. Phys.*, **24**, 54–72 (1973).
- [8] Scalo, C., Lele, S. K. & Hesselink, L., "Linear and nonlinear modelling of a theoretical travelling-wave thermoacoustic heat engine," *J. Fluid Mech.*, **766**, 368–404 (2015).
- [9] Gupta, P., Lodato, G. & Scalo, C., "Spectral energy cascade in thermoacoustic shock waves," *J. Fluid Mech.* **831**, 358–393 (2017).
- [10] Sugimoto, N. & Shimizu, D., "Linear and nonlinear theories for thermoacoustic waves in a gas-filled tube subject to a temperature gradient," in *Applied Wave Mathematics II* (eds. Brezovski, A. & Soomere, T.), Springer-Nature, Chapter 9, 187–204 (2019).
- [11] Sugimoto, N., "Thermoacoustic-wave equations for gas in a channel and a tube subject to temperature gradient," *J. Fluid Mech.*, **658**, 89–116 (2010).
- [12] Sugimoto, N. & Hyodo, H., "Effects of heat conduction in a wall on thermoacoustic-wave propagation," *J. Fluid Mech.*, **697**, 60–91 (2012).
- [13] Hyodo, H. & Sugimoto, N., "Stability analysis for the onset of thermoacoustic oscillations in a gas-filled looped tube," *J. Fluid Mech.*, **741**, 585–618 (2014).
- [14] Sugimoto, N., "Generalized Burgers equations and fractional calculus," in *Nonlinear Wave Motion*, (ed. by Jeffrey, A) Longman Scientific & Technical, 162–179 (1989).
- [15] 杉本 信正, "整数階でない微積分法について," *数学通信*, **21**, 5–22 (2017).
- [16] Sugimoto, N., "Marginal conditions for the onset of thermoacoustic oscillations due to instability of heat flow," *IMA J. Appl. Math.*, **84**, 118–144 (2019).
- [17] Sugimoto, N. & Yoshida, M., "Marginal condition for the onset of thermoacoustic oscillations in a gas in a tube," *Phys. Fluids*, **19**, 074101 1–13 (2007).
- [18] Sugimoto, N. & Takeuchi, T., "Marginal conditions for thermoacoustic oscillations in resonators," *Proc. R. Soc. Lond. A*, **465**, 3531–3552 (2009).
- [19] Lord Rayleigh, *The Theory of Sound Vol.II*, 230–234. Dover, New York (1945).
- [20] Howe, M. S., *Acoustics of Fluid-Structure Interactions*, Cambridge (1998).
- [21] Sugimoto, N. & Shimizu, D., "Boundary-layer theory for Taconis oscillations in a helium-filled tube," *Phys. Fluids* **20**, 104102 1–11 (2008).
- [22] Sugimoto, N., Shimizu, D. & Kimura, Y., "Evaluation of mean energy fluxes in thermoacoustic oscillations of a gas in a tube," *Phys. Fluids* **20**, 024103 1–13 (2008).
- [23] Shimizu, D. & Sugimoto, N., "Numerical study of thermoacoustic Taconis oscillations," *J. Appl. Phys.*, **107**, 034910 1–11 (2010).
- [24] Sugimoto, N., "Nonlinear theory for thermoacoustic waves in a narrow channel and pore subject to a temperature gradient," *J. Fluid Mech.*, **797** 765–801 (2016).
- [25] Shimizu, D., Iwamatsu, T. & Sugimoto, N., "Numerical simulations of thermoacoustic oscillations in a looped tube by asymptotic theories for thickness of diffusion layers," *Proc. Mtgs. Acoust.*, **34**, 045025 1–5 (2018).