数理解析研究所講究録 1376 巻 2004 年 6-12

非可換岩澤理論における岩澤 main conjecture

加藤和也 (Kazuya Kato)

京都大学 (Kyoto University)

§1. 前置き

本稿は、J. Coates, T. Fukaya, R. Sujatha, O. Venjakob 氏と共同研究でおこなった、「非可換岩澤理論において岩澤 main conjecture をどう formulate するか」、という研究の報告である。正確なこと、くわしいことは、共著論文「The GL_2 main conjecture for elliptic curves without complex multiplication」に、(源氏物語などの文学を愛する Coates 氏がお書きになった美しい英文で) 記述されているので、そちらをご一読いただきたく、ここでは、簡単に考え方を述べたい。

まず、

(1) 通常の岩澤理論

(2) 楕円曲線の通常の岩澤理論

(3) 楕円曲線の非可換岩澤理論

の3つについて、それぞれ、どんなものが登場するかを見て、非可換岩澤理論 (3) を、「可換岩澤理論」(1) (2) と比較したい。

1．1． 登場するガロワ群は次のとおり。

(1) 通常の岩澤理論では、可換群

$$\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_{p^\infty})/\mathbf{Q}) \simeq \mathbf{Z}_p^\times \simeq GL_1(\mathbf{Z}_p).$$

(ここに $\mathbf{Q}(\zeta_{p^\infty}) = \cup_n \mathbf{Q}(\zeta_{p^n})$, ζ_{p^n} は1の原始p^n 乗根)。

(2) 楕円曲線の通常の岩澤理論では、可換群

$$\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_{p^\infty})/\mathbf{Q}) \simeq \mathbf{Z}_p^\times \simeq GL_1(\mathbf{Z}_p) \quad ((1) と同じ).$$

(3) 楕円曲線の非可換岩澤理論では、非可換群

$$\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(E[p^\infty])/\mathbf{Q}) \quad \simeq \quad (ふつうは)\ GL_2(\mathbf{Z}_p)$$

(ここに E は、$\mathbf{Q}$ 上の楕円曲線、$\mathbf{Q}(E[p^\infty]) = \cup_n \mathbf{Q}(E[p^n])$、$\mathbf{Q}(E[p^n])$ は $\mathbf{Q}$ に E の p^n 分点たち $E[p^n]$ の座標を添加した体)

1．2．登場する岩澤 algbebra

これは、登場するガロワ群の p 進完備群環である。すなわち

(1) 通常の岩澤理論、と、(2) 楕円曲線の通常の岩澤理論では、可換環

$$\mathbf{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_{p^\infty})/\mathbf{Q})]] = \varprojlim_n \mathbf{Z}_p[\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_{p^n})/\mathbf{Q})].$$

(3) 楕円曲線の非可換岩澤理論では、非可換環

$$\mathbf{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(E[p^\infty])/\mathbf{Q})]] = \varprojlim_n \mathbf{Z}_p[\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(E[p^n])/\mathbf{Q})].$$

１．３．登場人物；代数側

岩澤理論は、代数側に現れる、岩澤 algebra 上の加群と、p 進解析側に現れる p 進ゼータ関数が、ふしぎな深い関係を有していることを解明しようとする。まず代数側の登場人物は、

(1) 通常の岩澤理論では、$\mathbf{Q}(\zeta_{p^n})$ のイデアル類群の p べき部分 C_n の、逆極限

$$C = \varprojlim_n C_n.$$

(2) 楕円曲線の通常の岩澤理論では、

$$\mathfrak{X}_{\mathrm{cyc}} = \mathrm{Hom}(\mathrm{Sel}(E/\mathbf{Q}(\zeta_{p^\infty})), \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p).$$

(Sel は Selmer 群)

(3) 楕円曲線の非可換岩澤理論では、

$$\mathfrak{X} = \mathrm{Hom}(\mathrm{Sel}(E/\mathbf{Q}(E[p^\infty]), \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p).$$

１．４．登場人物；p 進解析側

(1) 通常の岩澤理論、と、(2) 楕円曲線の通常の岩澤理論では、p 進ゼータ関数は、登場する岩澤 algebra の元である。（正確にいうと、(1) では、岩澤 algebra を少し分母をつけて局所化したものの元である。）

それでは、(3) 楕円曲線の非可換岩沢理論でも、p 進ゼータ関数は、登場する岩澤 algebra の元であると考えていいだろうか。

それは、無理なことであると思われる。というのが、p 進と複素の類似をたどって、p 進でなく、通常の複素ゼータ関数が、非可換環の中に住めるだろうか、と考えると、住めないはずだと思えるからである。複素ゼータ関数にできないことは、p 進ゼータ関数にもできないであろう。その困難を次に説明する。

§2. 非可換版ゼータ関数の考え方

2．1．非可換ゼータ関数の困難

非可換な状況でのゼータ関数というものを考えることの難しさは、単純にいうと、次のものである。たとえば、リーマンゼータ関数は、

$$\zeta(s) = \prod_p (1-p^{-s})^{-1}$$

というふうに、オイラー積で定義される。この積は、$Re(s) > 1$ で定義された正則関数全体のなす、可換環における無限積である。では、こういう可換環でなく、非可換環が現れるとき、ゼータ関数が定義できるものかどうか考えてみると、たちまち困難が生まれる。非可換環においてこのようなオイラー積を考えるなら、積の順番が変われば積が変わるのであるから、どの順番にかけていく無限積であるのか、決めかねてしまうであろう。

あとで、もう少しくわしく述べるように、岩澤 algebra $\mathbf{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_{p^\infty})/\mathbf{Q})]]$ は、複素平面上の正則関数全体の環の類似物であり、(1) の通常の岩澤理論における p 進ゼータ関数が、$\mathbf{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_{p^\infty})/\mathbf{Q})]]$ を少し分母をつけて局所化したものの元であることは、リーマンゼータ関数が、正則関数に分母をつけた有理型関数であることの類似であり、(2)の楕円曲線の通常の岩澤理論では、p 進ゼータ関数が、$\mathbf{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_{p^\infty})/\mathbf{Q})]]$ の元であることは、E の複素L 関数 $L(E,s)$ が正則関数であることの類似である。

(3) の楕円曲線の非可換岩沢理論でも、p 進ゼータ関数が、登場する岩澤 algebra の元であると考えていいなら、複素ゼータ関数の方にも、非可換環の元であるゼータ関数が存在してよいことになろう。しかし、たとえば $Re(s) > 1$ で定義された正則関数のなす可換環の非可換版である非可換環 A を見つけ、A の元として非可換版複素ゼータ関数を見つけたいと願ったとしても（そう願う人はいまだかつていないと思うが）この願いがかなえられることは、A において、無限積が積の順序によるから、無理であろう。

2．2．Coates 氏の困難な道

Coates 氏は、楕円曲線 E の通常の岩沢理論に飽きたらず、E には、せっかく非可換ガロワ群 $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(E[p^\infty])/\mathbf{Q})$ が伴うのだから、非可換環 $\mathbf{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(E[p^\infty])/\mathbf{Q})]]$ を用いたE の非可換岩沢理論というものがあるはずで、それをやるのがよいはずだ、と考えた。そして、この１０年近く、その道に邁進してきた。

最初は、私などは、「あんなことをやみくもに始めても、何も得られないのではないか。非可換環に p 進 L が定義できるはずもなし、Coates さんも、とうとう、まちがった方向に突き進んで、残りの数学人生を棒に振ることになったようだ。お気の毒に。」とひそかに考えていたのである。ところが、邁進するということはおそろしいもので、Coates さんは、着実に前進し、まわりの人も巻き込んで、非可換岩沢理論という大きな研究分野を開くに至った。今回私も巻き込まれさせていただいた。

2．3．非可換版ゼータ関数はどこにいる

では、非可換環 A には、複素ゼータ関数やp 進ゼータ関数が住めないなら、彼らはどこに住めばよいのだろう。それは、次のように考える。

A の可逆元の群 $A^\times$ をその交換子群 $[A^\times, A^\times]$ でわった群 $A^\times/[A^\times, A^\times]$ は可換群であるから、オイラー積をこの商群に定義することは、可能だと期待することはできる。

K 理論において、非可換かもしれない環 Aに対し、その K_1 群 $K_1(A)$ が、

$$K_1(A) = \varinjlim_n GL_n(A)/[GL_n(A), GL_n(A)]$$

と定義される。$A^\times/[A^\times, A^\times] = GL_1(A)/[GL_1(A), GL_1(A)]$ から $K_1(A)$ への自然な写像は、同型になることが多い。$Re(s) > 1$ で定義された正則関数のなす可換環の非可換版である非可換環 A を見つけ、$K_1(A)$ の元として非可換版ゼータ関数を見つけることは、可能かもしれないのである。

複素ゼータ関数について実際にこういうことをやった人はまだいないと思う。

けれども、p 進の方では、これが可能なはずだ、というのが、上記共著論文の主張であり、そしてその非可換版 p 進ゼータが、代数側登場人物である $\mathfrak{X}$ と深く関係するはずだ、というのが、非可換岩澤理論における岩澤 main conjecture である。

ただし、ふつうのp 進ゼータ関数も、非可換版 p 進ゼータ関数も、無限積として定義されるものではない。以下、それがどのようなものであるかを簡単に説明する。

§3. 通常の p 進ゼータ関数と、通常の岩澤 main conjecture の復習

まず、通常の岩沢理論における、p 進ゼータ関数と、岩澤 main conjecture を簡単に紹介する。

3．1．岩澤 algebra と複素正則関数環の類似。

$G = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_{p^\infty})/\mathbf{Q})$ とする。$\kappa : G \to \mathbf{Z}_p^\times$ を円分指標とする。すなわち、$\sigma \in G$ に対し、$\kappa(\sigma)$ は、$\sigma(\zeta_{p^n}) = \zeta_{p^n}^{\kappa(\sigma)}$ がすべての $n \geq 1$ について成立する唯一の $\mathbf{Z}_p^\times$ の元である。

$\mathbf{Z}_p[[G]]$ は、複素平面上の正則関数の環の、p 進類似物である。整数 r にたいし、群準同型

$$\kappa^r : G \to \mathbf{Z}_p^\times \quad ; \quad \sigma \mapsto \kappa(\sigma)^r$$

は、環準同型

$$\mathbf{Z}_p[[G]] \to \mathbf{Z}_p \quad ; \quad \sigma \mapsto \kappa(\sigma)^r \quad (\sigma \in G)$$

を導くが、この環準同型における $f \in \mathbf{Z}_p[[G]]$ の行き先を $f(r) \in \mathbf{Z}_p$ と書くと、この環準同型 $f \mapsto f(r)$ は、複素平面上の正則関数の環から、複素数体への環準同型 $f \mapsto f(r)$ の p 進類似物である。整数における値以外の値の類似物も存在する。$\mathbf{Q}_p$ の有限次拡大体 Kと、連続な群準同型 $\chi : G \to K^\times$ は、環準同型

$$\mathbf{Z}_p[[G]] \to K \quad ; \quad \sigma \mapsto \chi(\sigma) \quad (\sigma \in G)$$

を導くが、この環準同型における $f \in \mathbf{Z}_p[[G]]$ の行き先を $f(\chi) \in K$ と書くと、この環準同型 $f \mapsto f(\chi)$ たちは、さまざまの複素数 α に伴う、複素平面上の正則関数の環から複素数体への環準同型 $f \mapsto f(\alpha)$ の p 進類似物である。

3．2．複素および p 進ゼータ関数

リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ は、複素平面上の有理型関数である。$\zeta(s)$ は $s=1$ で正則でないが、正の実数 c をとると、$(c^{1-s}-1)\zeta(s)$ は、複素平面上の正則関数になり、複素平面上の正則関数全体のなす可換環を A と書くと、$\zeta(s) \in A[\frac{1}{c^{1-s}-1}]$ となる。

一方、p 進ゼータ関数 $\zeta_{p\text{進}}$ は、G を位相的に生成する元 σ をとると、環 $\mathbf{Z}_p[[G]]$ の拡大環（局所化）$\mathbf{Z}_p[[G]][\frac{1}{\kappa(\sigma)\sigma^{-1}-1}]$ の元であり、次の性質で特徴づけられる。r を 0 以下の整数とすると、環準同型 $\mathbf{Z}_p[[G]] \to \mathbf{Z}_p; f \mapsto f(r)$ は、環準同型 $\mathbf{Z}_p[[G]][\frac{1}{\kappa(\sigma)\sigma^{-1}-1}] \to \mathbf{Q}_p$ を導くが、この準同型も $f \mapsto f(r)$ と書くことにすると、

$$\zeta_{p\text{進}}(r) = (1-p^{-r})\zeta(r)$$

が成り立つ。ここに、0 以下の整数 r について、$\zeta(r)$ は有理数であるので、それを $\mathbf{Q}_p$ の元とみることができ、上の等式は意味を持つ。

上のように特徴づけられるこの $\zeta_{p\text{進}}$ は、また、さまざまの χ について、$\zeta_{p\text{進}}(\chi)$ がディリクレ L 関数の値と関係する、という性質も持つ（詳細略）。

$\mathbf{Z}_p[[G]]$ は複素平面上の正則関数全体の環の p 進類似物であるが、複素平面上の有理型関数全体の環の p 進類似物は

$$Q(\mathbf{Z}_p[[G]]) = \mathbf{Z}_p[[G]] \text{ の全商環} = \{\frac{f}{g} \mid f \in \mathbf{Z}_p[[G]], g \text{ は } \mathbf{Z}_p[[G]] \text{ の非零因子}\}$$

であり、$\zeta_{p\text{進}} \in Q(\mathbf{Z}_p[[G]])$ である。

簡単のため、$p \neq 2$ とする。$\iota \in G$ を複素共役写像とする。すると、

$$\mathbf{Z}_p[[G]] \xrightarrow{\cong} \mathbf{Z}_p[[G]]_+ \times \mathbf{Z}_p[[G]]_- \quad \text{ここに} \quad \mathbf{Z}_p[[G]]_\pm = \mathbf{Z}_p[[G]]/(1 \mp \iota)\mathbf{Z}_p[[G]],$$

$$Q(\mathbf{Z}_p[[G]]) \xrightarrow{\cong} Q(\mathbf{Z}_p[[G]]_+) \times Q(\mathbf{Z}_p[[G]]_-).$$

$\zeta_{p\text{進}}$ の、$Q(\mathbf{Z}_p[[G]]_+)$ への像は 0 であり、$Q(\mathbf{Z}_p[[G]]_-)$ への像は可逆元であり、

$$\zeta_{p\text{進}} \in Q(\mathbf{Z}_p[[G]]_-)^\times = K_1(Q(\mathbf{Z}_p[[G]]_-))$$

と考えることができる。

3．3．岩澤 main conjecture.

Mazur と Wiles によって証明された岩澤 main conjecture は、先に定義したイデアル類群の逆極限 C の、複素共役写像 $\iota \in G$ の作用によるマイナス部分 $C^- = \{x \in C \mid \iota(x) = -x\}$ と、p 進ゼータ関数 $\zeta_{p\text{進}}$ が、

$$(\zeta_{p\text{進}}) = \frac{\mathbf{Z}_p[[G]]_-\text{加群}C^-\text{の characteristic ideal}}{\mathbf{Z}_p[[G]]_-\text{加群}\mathbf{Z}_p(1)\text{の characteristic ideal}}$$

という関係によって結ばれる、というものである。(characteristic ideal の定義は省略する。)

§4. 非可換岩澤理論における p 進ゼータ関数と岩澤 main conjecture

正確なことを書こうとすると、ややこしくなるため、基本的な考え方を述べる。くわしいことについては、上記論文をご覧いただきたい。

E を$\mathbf{Q}$ 上の楕円曲線する。まず上の 2 で考えた可換ガロワ群 $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_{p^\infty})/\mathbf{Q})$ を今回は G_{cyc} と書き、非可換ガロワ群 $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(E[p^\infty])/\mathbf{Q})$ の方を今回は G と書くことにする。E は、p において、good ordinary reduction であるとする。

4．1．楕円曲線の通常の岩澤理論における岩澤 main conjecture.

Mazur らが始めた E の通常の岩澤理論 (Inventiones math. 1972 参照) では、$\mathfrak{X}_{\mathrm{cyc}} = \mathrm{Hom}(\mathrm{Sel}(E/\mathbf{Q}(\zeta_{p^\infty})), \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)$ と、E の通常の p 進L 関数 ($L_{p進,\ \mathrm{cyc}}(E)$ と書くことにする) を比較する。

$\mathfrak{X}_{\mathrm{cyc}}$ は、可換環 $\mathbf{Z}_p[[G_{\mathrm{cyc}}]]$ 上の加群であり、$L_{p進,\ \mathrm{cyc}}(E) \in \mathbf{Z}_p[[G_{\mathrm{cyc}}]]$ である。

なお、$L_{p進,\ \mathrm{cyc}}(E)$ は $\mathbf{Z}_p[[G_{\mathrm{cyc}}]]$ の非零因子であり、$L_{p進,\ \mathrm{cyc}}(E) \in Q(\mathbf{Z}_p[[G_{\mathrm{cyc}}]])^\times = K_1(Q(\mathbf{Z}_p[[G_{\mathrm{cyc}}]]))$ と見なせる。

E の通常の岩澤理論における、Mazur による岩澤 main conjectue の類似は、

$$(L_{p進,\ \mathrm{cyc}}(E)) = \mathbf{Z}_p[[G]]\text{ 加群 }\mathfrak{X}_{\mathrm{cyc}}\text{の characteristic ideal}$$

というものである。

4．2．楕円曲線の非可換岩澤理論におけるp 進 L 関数。

E の「非可換版 p 進L 関数」($L_{p進}(E)$ と書くことにする) が、

(あ)　どこの元であるべきか、

(い)　どういうものであるべきか

について述べる。

(あ) については、上記共著論文では、$L_{p進}(E)$ は、$\mathbf{Z}_p[[G]]$ の適切な局所化 ($\mathbf{Z}_p[[G]]$ の一部の元の逆元を $\mathbf{Z}_p[[G]]$ に付け加えて得られる環) のK_1 の元であるべきだと考えている。(実際に $L_{p進}(E)$ を構成することは、まだできていない。)

実はこの、非可換環の適切な局所化をとる、ということが大変で、共著論文の大きな部分がこの適切な局所化をとる努力に費やされているのである。可換環の局所化の理論は、代数学の基本事項のひとつであり、可換環 A の乗法的部分集合 S に対し、局所化 $A_S = \{\frac{a}{s} \,|\, a \in A, s \in S\}$ が作られる。ところが、$\mathbf{Z}_p[[GL_2(\mathbf{Z}_p)]]$ のような非可換環を局所化することは簡単なことではなく、非可換環 A の乗法的部分集合 S についていつでも局所化 A_S がつくれるわけではなく、環 A_S ができるためには、S は Ore 条件という条件をみたさなければならない。共著論文では Ore 条件をみたす $S \subset \mathbf{Z}_p[[G]]$ でうまいものを見つけたのであるが、S の定義はややこしいので、省略する。

(い) については、$L_{p進}(E)$ は次のように特徴づけられるものだと考えている。

§3 においては、$\mathbf{Q}_p$ の有限次拡大体と連続な群準同型 $G_{cyc} \to K^\times$ に対して得られる環準同型 $\mathbf{Z}_p[[G_{\mathrm{cyc}}]] \to K$ を、$\mathbf{Z}_p[[G_{\mathrm{cyc}}]]$ の元 f の χ での値 $f(\chi)$ をとること $f \mapsto f(\chi)$ だと考えた。今回

は、$\mathbf{Q}_p$ の有限次拡大体 K と連続な群準同型 $\rho: G \to GL_n(K)$ （すなわち G の有限次表現）に対して、$K_1(\mathbf{Z}_p[[G]])$ の元 f の ρ での値 $f(\rho)$ や、$\mathbf{Z}_p[[G]]$ の適当な局所化の K_1 の元 f のρ での値 $f(\rho)$ を考える。ρ は環準同型 $\mathbf{Z}_p[[G]] \to M_n(K)$ を導き、$K_1(\mathbf{Z}_p[[G]]) \to K_1(M_n(K))$ を導き、$K_1(M_n(K)) \simeq K_1(K) = K^\times$ なので、$K_1(\mathbf{Z}_p[[G]]) \to K^\times$ を導く。これが $f \in K_1(\mathbf{Z}_p[[G]])$ の ρ での値 $f(\rho)$ をとること $f \mapsto f(\rho)$ である。合成 $\mathbf{Z}_p[[G]]^\times/[\mathbf{Z}_p[[G]]^\times, \mathbf{Z}_p[[G]]^\times] \to K_1(\mathbf{Z}_p[[G]]) \to K^\times$ は、$f \in \mathbf{Z}_p[[G]]^\times$ に ρ が導く環準同型 $\mathbf{Z}_p[[G]] \to M_n(K)$ による f の像の行列式を対応させる写像に他ならない。$K_1(\mathbf{Z}_p[[G]])$ の元の ρ での値はこのように定義されるが、$\mathbf{Z}_p[[G]]$ の適当な局所化の K_1 の元の ρ での値も、すこし議論を加えると定義できる。

$\mathbf{Z}_p[[G]]$ の局所化の K_1 の元である $L_{p進}(E)$ は、その様々な ρ での値が、複素 L 関数 $L(E, \rho, s)$ の値 $L(E, \rho, 1)$ と関係することで特徴付けられる、と予想している。（詳細は略。なお、複素 L 関数 $L(E, \rho, s)$ は $\rho: G \to GL_n(K)$ の像が有限のとき定義される。）

4．3．楕円曲線の非可換岩澤理論における岩澤 main conjecture

E の非可換岩澤理論における岩澤 main conjecture とは、$\mathbf{Z}_p[[G]]$ 加群 $\mathfrak{X}$ と非可換版 p 進 L 関数 $L_{p進}(E)$ が関係する、というものである。もう少し正確には、K 理論の完全系列

$$K_1(\mathbf{Z}_p[[G]]) \to K_1(\mathbf{Z}_p[[G]]\text{の局所化}) \to K_0(C) \to K_0(\mathbf{Z}_p[[G]])$$

（ここに C はねじれ $\mathbf{Z}_p[[G]]$ 加群のなす、ある圏）において、$\zeta_{p進} \in K_1(\mathbf{Z}_p[[G]]\text{の局所化})$ の $K_0(C)$ での像が、$\mathfrak{X}$ の $K_0(C)$ での class に一致する、という形に定式化される予想である。（なお、通常の岩澤理論や楕円曲線の通常の岩澤理論における、岩澤 main conjecture も、この形に定式化しなおすことができる。）詳しくは共著論文をご覧いただきたい。

ここでは楕円曲線の非可換岩澤理論について述べたが、もっと一般にモチーフの非可換岩澤理論というものも考えられる。

非可換版 p 進 L 関数について、それがどこの元で、どういうものであるべきか、は、ordinary at p という条件をみたすモチーフについては、上の話と同じようにして予想することができる。しかし、楕円曲線でも、ordinary でなくて、super-singular な場合は、まだ予想ができていない。

また、非可換版岩澤 main conjecture も、解決の糸口は得られていない。

今わかっているのは、この main conjecture が、モチーフの非可換玉河数予想 (Burns, Flach, Huber, Kings) と compatible であるということである。