Über sternige und konvexe Abbildung

Von

Akira Kobori

(Eingegangen am 5. Juli, 1932)

In der vorliegenden Arbeit beschäftigte ich mich mit der Potenzreihe $f(z)$, die die Eigenschaft

$$f(0)=0, \qquad f'(0)=1$$

besitzt, d. h. die von der Form

$$(1) \qquad f(z)=z+a_2z^2+\ldots\ldots+a_nz^n+\ldots\ldots$$

ist.

Es sei die Potenzreihe (1) regulär im Kreise $|z|<r$. Wenn der Bildbereich vom Kreise $|z|<r$, der von der Potenzreihe (1) abgebildet wird, schlicht und von jeder Geraden durch der Nullpunkt in nur einer Strecke geschnitten wird, heisst diese Abbildung *sternige Abbildung* und die obere Grenze von r die *Sternschranke.* Ist die Höhlung der Randkurve des Bildbereiches von $|z|<r$, der von der im Kreise $|z|<r$ regulären und schlichten Potenzreihe von der Form (1) abgebildet wird, stets gegen den Nullpunkt kehrt, heisst die Abbildung *konxexe Abbildung* und die obere Grenze von r die *Rundungsschranke.*

Es ist schon bekannt, dass die schlichte Potenzreihe (1) den Kreis $|z|<r$ auf den in Bezug auf den Nullpunkt sternigen, bezw. konvexen Bereich abbildet, wenn

$$\Re\frac{zf'(z)}{f(z)}>0 \quad [1] \qquad \text{für} \qquad |z|<r$$

bezw.

$$1+\Re\frac{zf''(z)}{f'(z)}>0 \qquad \text{für} \qquad |z|<r.$$

Im folgenden aber möchte ich mit Hilfe dieser Ausdrücke einige Bedingungen für Sternigkeit und Konvexität unter Benutzung der

1. Unter $\Re\zeta$ versteht man den Realteil von ζ.

Koeffizienten der Potenzreihe (1) ausdrücken und als Anwendung die Sternschranken und die Rundungsschranken der Potenzreihen und ihre Abschnitte finden, die mit der Eigenschaft

(2) $$|f(z)|<M \quad (M>1) \quad \text{für} \quad |z|<1$$

oder

(3) $$|f'(z)|<N \quad (N>1) \quad \text{für} \quad |z|<1$$

charakterisiert sind.

I. Konvexe Abbildung

1. Zuerst beschäftige ich mich mit der konvexen Abbildung. Es sei ρ die grösste positive Zahl, die der Beziehung

$$2^2|a_2|\rho+3^2|a_3|\rho^2+\ldots\ldots+n^2|a_n|\rho^{n-1}+\ldots\ldots\leqq 1$$

genügt, so ist

$$2|a_2|\rho+3|a_3|\rho^2+\ldots\ldots+n|a_n|\rho^{n-1}+\ldots\ldots$$
$$<2^2|a_2|\rho+3^2|a_3|\rho^2+\ldots+n^2|a_n|\rho^{n-1}+\ldots\ldots\leqq 1$$

Damit bilden $f(z)$ und ihre sämtlichen Abschnitte den Kreis $|z|<\rho$ auf den schlichten Bereich ab; denn für $|z_1|<\rho$, $|z_2|<\rho$ ist

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right|>1-\{2|a_2|\rho+3|a_3|\rho^2+\ldots\ldots+n|a_n|\rho^{n-1}+\ldots\ldots\}$$

und

$$\left|\frac{S_n(z_1)-S_n(z_2)}{z_1-z_2}\right|>1-\{2|a_2|\rho+3|a_3|\rho^2+\ldots\ldots+n|a_n|\rho^{n-1}\}.$$

Folglich ist

$$f'(z)\neq 0 \quad \text{für} \quad |z|<\rho;$$

daher ist

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

regulär im Kreise $|z|<\rho$. Ferner ist für $|z|<\rho$

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|<\frac{2|a_2|\rho+3.2|a_3|\rho^2+\ldots+n(n-1)|a_n|\rho^{n-1}+\ldots}{1-\{2|a_2|\rho+\ldots+n|a_n|\rho^{n-1}+\ldots\}}$$

$$=\frac{\sum\limits_{\nu=2}^{\infty}\nu^2\,|a_\nu|\,\rho^{\nu-1}-\sum\limits_{\nu=2}^{\infty}\nu\,|a_\nu|\,\rho^{\nu-1}}{1-\sum\limits_{\nu=2}^{\infty}\nu\,|a|\,\rho^{\nu-1}}\leqq 1$$

Dann ist

$$1+\Re\frac{zf''(z)}{f'(z)}>0 \quad \text{für} \quad |z|<\rho.$$

Damit erhält man den Satz:

Es sei die Potenzreihe (1) regulär im Einheitskreise $|z|<1$ *und* ρ *die grösste positive Zahl, die die Eigenschaft*

$$2^2|a_2|\rho+3^2|a_3|\rho^2+\ldots\ldots+n^2|a_n|\rho^{n-1}+\ldots\ldots\leqq 1$$

besitzt, so bilden $f(z)$ *und ihre sämtlichen Abschnitte den Kreis* $|z|<\rho$ *auf den konvexen Bereich ab.*

Als Beispiel dieses Satzes betrachte ich die Potenzreihe

$$\begin{aligned} f(z)&=\frac{2}{3}\{1-(1-z)\sqrt{1-z}\}\\ &=z-\frac{1}{2^2}z^2-\frac{1}{2^2\cdot 3!}z^3-\frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 4!}z^4-\ldots-\frac{1\cdot 3\ldots(2n-5)}{2^{n-1}\cdot n!}z^n-\ldots\ldots \end{aligned}$$

Hier ist

$$\begin{aligned} 2^2|a_2|\cdot\frac{2}{3}+3^2|a_3|\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\ldots\ldots+n^2|a_n|\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\ldots\ldots\\ =\left\{1-(1-\rho)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho}}\right\}_{\rho=\frac{2}{3}}\\ =1, \end{aligned}$$

daher bildet nach dem obigen Satze $f(z)$ den Kreis $|z|<\frac{2}{3}$ auf den konvexen Bereich ab. Hinsichtlich dieser Rundungsschranke aber zeigt E. Study[1] auf anderem Wege, dass sie gleich $\frac{2}{3}$ ist.

2. Hier möchte ich zur Anwendung dieses Satzes übergehen. Erstens leite ich einen dem Takahashi[2]-Kakeyaschen[3] analongen Satz ab, welcher lautet:

Es sei $f(z)$ *regulär im Kreise* $|z|<1+N+\sqrt{N(1+N)}$, *so bilden* $f(z)$ *und ihre sämtlichen Abschnitte den Kreis* $|z|<1$ *auf den konvexen Bereich ab, wenn*

$$|f'(z)|\leqq N \quad \textit{für} \quad |z|<1+N+\sqrt{N(1+N)} \quad (N\geqq 1).$$

1. E. Study: Vorlesung über ausgewählte Gegenstände der Geometrie II, S. 135.
2. S. Takahashi: Tôhoku Math. Journ, 33 (1930).
3. S. Kakeya: Science Reports, Tokyo Univ. Sci. & Lit., A (1932).

Um diesen Satz zu beweisen, benutze ich den Koeffizientensatz. Nach diesem Satze ist

$$n\,|a_n| \leqq \frac{N}{r^{n-1}}, \quad \text{wo} \quad r = 1 + N + \sqrt{N(1+N)} \quad \text{bedeutet.}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} & 2^2\,|a_2| + 3^2\,|a_3| + \ldots\ldots + n^2\,|a_n| + \ldots\ldots \\ & \leqq N\left(\frac{2}{r} + \frac{3}{r^2} + \ldots\ldots + \frac{n}{r^{n-1}} + \ldots\ldots\right) \\ & = \frac{N(2r-1)}{(r-1)^2} \\ & = 1, \end{aligned}$$

weil $r = 1 + N + \sqrt{N(1+N)}$ ist, w. z. b. w.

Zweitens untersuche ich die Rundungsschranke der Potenzreihe, die im Einheitskreise $|z| < 1$ regulär ist und die Eigenschaft (2) besitzt.

Es ist

$$\begin{aligned} & 2^2\,|a_2|\,\rho + 3^2\,|a_3|\,\rho^2 + \ldots\ldots + n^2\,|a_n|\,\rho^{n-1} + \ldots\ldots \\ & \leqq \sqrt{|a_2|^2 + |a_3|^2 + \ldots\ldots + |a_n|^2 + \ldots\ldots} \\ & \qquad \times \sqrt{2^4\rho^2 + 3^4\rho^4 + \ldots\ldots + n^4\rho^{2(n-1)} + \ldots\ldots} \\ & \leqq \sqrt{M^2 - 1}\,\sqrt{\frac{1 + 11\rho^2 + 11\rho^4 + \rho^6}{(1-\rho^2)^5} - 1} \\ & \leqq 1, \end{aligned}$$

wenn ρ die kleinste positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{M^2}{M^2-1}(r^2-1)^5 + r^6 + 11r^4 + 11r^2 + 1 = 0$$

bedeutet, die, wie man leicht nachprüft, kleiner als Eins ist. Damit erhält man den Satz:

Die im Einheitskreise $|z| < 1$ reguläre Potenzreihe und ihre sämtlichen Abschnitte bilden den Kreis $|z| < \rho$ auf den konvexen Bereich ab, wenn die Potenzreihe der Bedingung (2) genügt, wo ρ die kleinste positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{M^2}{M^2-1}(r^2-1)^5 + r^6 + 11r^4 + 11r^2 + 1 = 0$$

bedeutet.

Schliesslich betrachte ich die Potenzreihe, die der Bedingung (3) genügt. In diesem Falle ist nach dem bekannten Satz und mit Rücksicht auf die Schwarzsche Ungleichung

$$\begin{aligned}
&2^2|a_2|\rho+3^2|a_3|\rho^2+\ldots\ldots+n^2|a_n|\rho^{n-1}+\ldots\ldots \\
&\leqq\sqrt{2^2|a_2|^2+3^2|a_3|^2+\ldots\ldots+n^2|a_n|^2+\ldots\ldots} \\
&\qquad\times\sqrt{2^2\rho^2+3^2\rho^4+\ldots\ldots+n^2\rho^{2(n-1)}+\ldots\ldots} \\
&\leqq\sqrt{N^2-1}\sqrt{\frac{1+\rho^2}{(1-\rho^2)^3}-1} \\
&=1,
\end{aligned}$$

wenn ρ die kleinste positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{N^2}{N^2-1}(r^2-1)^3+r^2+1=0$$

bedeutet, die natürlich kleiner als Eins ist.

Hiermit ist bewiesen:

Die Potenzreihe, die im Einheitskreise $|z|<1$ regulär ist und der Bedingung (3) *genügt, sowie ihre sämtlichen Abschnitte bilden den Kreis $|z|<\rho$ auf den konvexen Bereich ab, wenn die Potenzreihe die Eigenschaft* (3) *besitzt, wobei ρ die kleinste positive Wurzel der Gleichung*

$$\frac{N^2}{N^2-1}(r^2-1)^3+r^2+1=0$$

bedeutet.

II. Sternige Abbildung

3. Nun gehe ich zur sternigen Abbildung über und betrachte am Anfang die Potenzreihe der Klasse $\mathfrak{S}$, d. h. Potenzreihen, die im Einheitskreise $|z|<1$ regulär und schlicht sind.

A. Mark[1] hat in seiner interessanten Arbeit bewiesen, dass an der Stelle z, wo

$$\Re\frac{f(z)}{z}>0$$

gültig ist, auch die Beziehung

1. A. Marx: Sitzungsberichte preussischer Akademie, Berlin (1929).

$$\Re \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0$$

gilt. Da aber

$$\frac{f(z)}{z} = 1 + a_2 z + \ldots\ldots + a_n z^{n-1} + \ldots\ldots$$

ist, so ist *a fortiori* für die grösste positive Zahl ρ, die der Beziehung

$$|a_2|\rho + |a_3|\rho^2 + \ldots\ldots + |a_n|\rho^{n-1} + \ldots\ldots \leqq 1$$

genügt,

$$\Re \frac{f(z)}{z} > 0.$$

Daher ist nach dem Marxschen Satz

$$\Re \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0 \quad \text{für} \quad |z| < \rho.$$

Hiermit ist bewiesen:

Wenn die Potenzreihe (1) zur Klasse $\mathfrak{S}$ gehört, so bildet sie den Kreis $|z| < \rho$ auf den in Bezug auf den Nullpunkt sternigen Bereich ab, falls ρ die grösste positive Zahl derart ist, dass

$$(4) \qquad |a_2|\rho + |a_3|\rho^2 + \ldots\ldots + |a_n|\rho^{n-1} + \ldots\ldots \leqq 1$$

ist.

Als Beispiel betrachte ich wieder die Potenzreihe

$$f(z) = \frac{2}{3}\{1 - (1-z)\sqrt{1-z}\}$$

$$= z - \frac{1}{2^2}z^2 - \frac{1}{2^2 \cdot 3!}z^3 - \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 4!}z^4 - \ldots - \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-5)}{2^{n-1} n!}z^n \ldots\ldots,$$

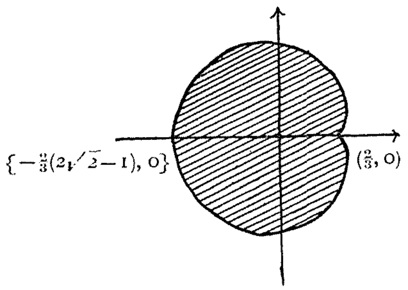
die, wie man leicht nachprüft, zur Klasse $\mathfrak{S}$ gehört. Ferner ist

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 4!} + \ldots\ldots + \frac{1 \cdot 3 \ldots\ldots (2n-5)}{2^{n-1} n!} + \ldots\ldots$$

$$< \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n(n-1)} + \ldots\ldots\right)$$

$$= \frac{1}{2}.$$

Daher muss nach dem obigen Satze $f(z)$ den Kreis $|z| < 1$ auf den



Bereich abbilden, der in Bezug auf den Nullpunkt sternig ist, und in der Tat ist der Bildbereich vom Kreise $|z|<1$ sternig in Bezug auf den Nullpunkt, wie die Illustration deutlich zeigt.

4. Nun gehe ich zur Anwendung dieses Satzes über. Erstens erhält man den verschärften Takahashischen[1] Satz, welcher lautet:

Der Kreis $|z|<1$ wird durch die Potenzreihe von der Klasse $\mathfrak{S}$ sternig in Bezug auf den Nullpunkt abgebildet, wenn

$$|f'(z)|\leqq N \quad \text{für} \quad |z|<\tau \quad (N\geqq 1),$$

wo τ die kleinste positive Wurzel der Gleichung

$$r\log\frac{r}{r-1}=\frac{1+N}{N}$$

bedeutet.

Um diesen Satz zu beweisen, benutze ich den Koeffizientensatz. Es gilt

$$|a_n|\leqq\frac{N}{n\tau^{n-1}} \qquad n=2, 3, \ldots\ldots .$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
&|a_2|+|a_3|+\ldots\ldots+|a_n|+\ldots\ldots\\
&\leqq N\left(\frac{1}{2\tau}+\frac{1}{3\tau^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{n\tau^{n-1}}+\ldots\ldots\right)\\
&=N\tau\left(\frac{1}{2\tau^2}+\frac{1}{3\tau^3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n\tau^n}+\ldots\ldots\right)\\
&=N\tau\left\{\log\frac{\tau}{\tau-1}-\frac{1}{\tau}\right\} \qquad (\tau>1)\\
&=1,
\end{aligned}$$

weil τ die kleinste positive Wurzel der transzendenten Gleichung

1. S. Takahashi: Tôhoku Math. Journ., 33 (1930). Der originale Satz sagt: Der Bereich $|z|<1$ wird durch die im Einheitskreise reguläre und schlichte Funktion mit beliebigen reellen Koeffizienten $f(z)=z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$ sternig in bezug auf den Nullpunkt abgebildet, wenn $|f'(z)|\leqq M$ für $|z|<2M$ $(M\geqq 1)$.

$$r \log \frac{r}{r-1} = \frac{1+N}{N}$$

bedeutet, w. z. b. w.
Wie man leicht nachrechnet, ist $\tau < 1+N$.

Wenn die Potenzreihe der Klasse $\mathfrak{S}$ der Bedingung (2) genügt, so ist der Flächeninhalt ihres Bildbereiches nicht grösser als $M^2\pi$. Daher erhält man die Beziehung

$$\pi(1^2 + 2\,|a_2|^2 + \ldots\ldots + n\,|a_n^2| + \ldots\ldots) \leqq M^2\pi$$

d. h.

$$2\,|a_2|^2 + 3\,|a_3|^2 + \ldots\ldots + n\,|a_n|^2 + \ldots\ldots \leqq M^2 - 1.$$

Dann hat man mit Rücksicht auf die Schwarzsche Ungleichung

$$\begin{aligned}
&|a_2|\rho + |a_3|\rho^2 + \ldots\ldots + |a_n|\rho^{n-1} + \ldots\ldots \\
&= \sqrt{2}\,|a_2| \cdot \frac{\rho}{\sqrt{2}} + \sqrt{3}\,|a_3| \cdot \frac{\rho^2}{\sqrt{3}} + \ldots + \sqrt{n}\,|a_n|\,\frac{\rho^{n-1}}{\sqrt{n}} + \ldots \\
&\leqq \sqrt{2\,|a_2|^2 + 3\,|a_3|^2 + \ldots\ldots + n\,|a_n|^2 + \ldots\ldots} \\
&\qquad\qquad \times \sqrt{\frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^4}{3} + \ldots\ldots + \frac{\rho^{2(n-1)}}{n} + \ldots\ldots} \\
&\leqq \frac{\sqrt{M^2-1}}{\rho} \sqrt{\log \frac{1}{1-\rho^2} - \rho^2} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

wenn ρ die kleinste positive Wurzel—man sieht sehr leicht, dass diese Wurzel kleiner als Eins ist—der transzendenten Gleichung

$$\frac{1}{r^2} \log \frac{1}{1-r^2} = \frac{M^2}{M^2-1}$$

bedeutet.
Folglich kann man behaupten:

Genügt die Potenzreihe der Klasse $\mathfrak{S}$ der Bedingung (2), *so ist ihre Sternschranke bei der kleinsten positiven Wurzel der Gleichung*

$$\frac{1}{r^2} \log \frac{1}{1-r^2} = \frac{M^2}{M^2-1}$$

gegeben.

Ferner betrachte ich die Potenzreihe der Klasse $\mathfrak{S}$, die der Bedingung (3) genügt. Nach dem bekannten Satz ist

$$1^2+2^2|a_2|^2+\ldots\ldots+n^2|a_n|^2+\ldots\ldots\leqq N^2.$$

Daher ist mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned}
&|a_2|\rho+|a_3|\rho^2+\ldots\ldots+|a_n|\rho^{n-1}+\ldots\ldots\\
&\quad=2|a_2|\cdot\frac{\rho}{2}+3|a_3|\cdot\frac{\rho^2}{3}+\ldots\ldots+n|a_n|\cdot\frac{\rho^{n-1}}{n}+\ldots\ldots\\
&\quad\leqq\sqrt{2^2|a_2|^2+3^2|a_3|^2+\ldots\ldots+n^2|a_n|^2+\ldots\ldots}\\
&\qquad\qquad\times\sqrt{\frac{\rho^2}{2^2}+\frac{\rho^4}{3^2}+\ldots\ldots+\frac{\rho^{2(n-1)}}{n^2}+\ldots\ldots}\\
&\quad\leqq\rho\sqrt{N^2-1}\sqrt{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots\ldots}\\
&\quad\leqq\rho\sqrt{N^2-1}\sqrt{\frac{\pi^2}{6}-1}\\
&\quad=1,\quad\text{für}\quad\rho=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(\pi^2-6)\,(N^2-1)}},
\end{aligned}$$

man hat also den Satz bewiesen:

Genügt die Potenzreihe der Klasse $\mathfrak{S}$ *der Bedingung* (3), *so ist ihre Sternschranke nicht kleiner als* $\sqrt{6}\,/\sqrt{(\pi^2-6)(N^2-1)}$.

5. Nun ziehe ich die Potenzreihe

$$z+2z^2+\ldots\ldots+nz^n+\ldots\ldots=\frac{z}{(1-z)^2}$$

in Betracht, die zur Klasse $\mathfrak{S}$ gehört und wo

$$\begin{aligned}
&|a_2|\rho+|a_3|\rho^2+\ldots\ldots+|a_n|\rho^{n-1}+\ldots\ldots\\
&\quad\leqq 2\rho+3\rho^2+\ldots\ldots+n\rho^{n-1}+\ldots\ldots\\
&\quad=\frac{1}{(1-\rho)^2}-1
\end{aligned}$$

ist. Daher ist

$$=1\quad\text{für}\quad\rho=1-\frac{1}{\sqrt{2}}=0.29\ldots\ldots$$

Aber ihr zweiter Abschnitt

$$z+2z^2$$

ist schlicht nicht im Kreise $|z|<1-\frac{1}{\sqrt{2}}$, sondern im Kreise $|z|<\frac{1}{4}$.

Daraus kann man schliessen, dass die Bedingung (4) für die Schlichtheit der Abschnitte nicht hinreichend ist.

Wenn man aber für die Potenzreihe, die regulär im Einheitskreise $|z|<1$ ist, die grösste positive Zahl ρ finden kann, die der Bedingung

$$2|a_2|\rho+3|a_3|\rho^2+\ldots\ldots+n|a_n|\rho^{n-1}+\ldots\ldots\leqq 1$$

genügt, so sind $f(z)$ und ihre sämtlichen Abschnitte

$$S_n(z)=z+a_2z^2+\ldots\ldots+a_nz^n \qquad n=2,\ 3,\ldots\ldots$$

schlicht im Kreise $|z|<\rho$.

Es sei dieses ρ bestimmt. Hier benutze ich den Satz[1], welcher lautet:

Der Kreis $|z|<\rho$ wird durch $f(z)$ dann und nur dann auf einen Stern abgebildet, wenn das durch

$$f(z)=zF'(z)$$

erklärte $F(z)$ den $|z|<\rho$ konvex abbildet.

Nun ist aber

$$f(z)=z(1+a_2z+\ldots\ldots+a_nz^{n-1}+\ldots\ldots).$$

Man nimmt als $F(z)$ die Potenzreihe

$$F(z)=z+\frac{a_2}{2}z^2+\ldots\ldots+\frac{a_n}{n}z^n+\ldots\ldots$$

Nun bildet aber nach dem Satze, den ich im ersten Teil gezeigt habe, $F(z)$ den Kreis $|z|<\rho$ auf den konvexen Bereich ab, wenn ρ die grösste Zahl ist, die der Beziehung

$$2^2\left|\frac{a_2}{2}\right|\rho+3^2\left|\frac{a_3}{3}\right|\rho^2+\ldots\ldots+n^2\left|\frac{a_n}{n}\right|\rho^{n-1}+\ldots\ldots\leqq 1$$

d. h.

$$2|a_2|\rho+3|a_3|\rho+\ldots\ldots+n|a_n|\rho^{n-1}+\ldots\ldots\leqq 1$$

genügt. Ferner ist dies auch richtig für die Abschnitte der Potenzreihe, so hat man den Satz:

Es sei die Potenzreihe (1) regulär im Einheitskreise $|z|<1$, so bilden $f(z)$ und ihre sämtlichen Abschnitte den Kreis $|z|<\rho$ auf den in Bezug auf den Nullpunkt sternigen Bereich ab, wenn ρ die grösste positive Zahl ist, die der Beziehung

1. Vgl. L. Bieberbach: Lehrbuch der Funktionentheorie, II 2. Aufl. S. 82.

$$2|a_2|\rho+3|a_3|\rho^2+\ldots\ldots+n|a_n|\rho^{n-1}+\ldots\ldots\leqq 1$$

genügt.

6. Mit Hilfe dieses Satzes kann man leicht den Takahashi[1]-Kakeyaschen[2] Satz ableiten:

Es sei die Potenzreihe (1) regulär im Kreise $|z|<2N$ $(N\geqq 1)$, so bilden $f(z)$ und ihre sämtlichen Abschnitte den Einheitskreis $|z|<1$ auf den in Bezug auf den Nullpunkt sternigen Bereich ab, falls

$$|f'(z)|\leqq N \quad \text{für } |z|<2N.$$

Nach dem bekannten Koeffizientensatz ist

$$n|a_n|\leqq \frac{N}{2^{n-1}N^{n-1}}$$

$$\leqq \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \text{da} \quad N\geqq 1.$$

Daher ist

$$2|a_2|+3|a_3|+\ldots\ldots+n|a_n|+\ldots\ldots$$

$$\leqq \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots\ldots$$

$$=1,$$

was zu beweisen war.

Im Falle die im Einheitskreise reguläre Potenzreihe die Eigenschaft (2) besitzt, so ist

$$|a_2|^2+|a_3|^2+\ldots\ldots+|a_n|^2+\ldots\ldots\leqq M^2-1.$$

Daher ist

$$2|a_2|\rho+3|a_3|\rho^2+\ldots\ldots+n|a_n|\rho^{n-1}+\ldots\ldots$$

$$\leqq\sqrt{|a_2|^2+|a_3|^2+\ldots\ldots+|a_n|^2+\ldots\ldots}$$

$$\times\sqrt{2^2\rho^2+3^2\rho^4+\ldots\ldots+n^2\rho^{2(n-1)}+\ldots\ldots}$$

$$\leqq\sqrt{M^2-1}\sqrt{\frac{1+\rho^2}{(1-\rho^2)^3}-1}=1,$$

wenn ρ die kleinste positive Wurel, $(\rho<1)$, der Gleichung

$$\frac{M^2}{M^2-1}(r^2-1)^3+r^2+1=0$$

1. S. Takahashi loc. cit.
2. S. Kakeya loc. cit.

ist. Hiermit ist bewiesen:

Wenn die Potenzreihe, die im Einheitskreise regulär ist, der Bedingung (2) *genügt, so ist die Sternschranke von $f(z)$ und ihre sämtlichen Abschnitte durch die kleinste positive Wurzel der Gleichung*

$$\frac{M^2}{M^2-1}(r^2-1)^3+r^2+1=0$$

gegeben.

Ist die Potenzreihe durch die Bedingung (3) charakterisiert, so erhält man nach der bekannten Ungleichung die Beziehung

$$2^2|a_2|^2+3^2|a_3|^2+\ldots\ldots+n^2|a_n|^2+\ldots\ldots\leqq N^2-1,$$

daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}
&2|a_2|\rho+3|a_3|\rho^2+\ldots\ldots+n|a_n|\rho^{n-1}+\ldots\ldots \\
&\quad\leqq\sqrt{2^2|a_2|^2+3^2|a_3|^2+\ldots\ldots+n^2|a_n|^2+\ldots\ldots} \\
&\qquad\qquad\times\sqrt{\rho^2+\rho^4+\ldots\ldots+\rho^{2(n-1)}+\ldots\ldots} \\
&\quad\leqq\sqrt{N^2-1}\,\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \\
&\quad=1,\quad \text{für}\quad \rho=\frac{1}{N}
\end{aligned}$$

ist. Damit ist bewiesen:

Ist die Potenzreihe (1) *regulär im Einheitskreise* $|z|<1$, *so bilden* $f(z)$ *und ihre sämtlichen Abschnitte den Kreis* $|z|<1/N$ *auf den in Bezug auf den Nullpunkt sternigen Bereich ab, falls* $f(z)$ *die Eigenschaft* (3) *besitzt.*

Zum Schlusse möchte ich Herrn Professor Toshizô Matsumoto für seine wertvollen Bemerkungen zu meiner Arbeit meinen herzlichen Dank ausdrücken.

Bemerkung bei der Korrektur: In der Arbeit vom Herrn K. Noshiro (Journ. Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ. Ser. I, 1932), die er mir freundlich gegeben hat, fand ich, dass er und Herr J. Dieudonné das verwandte Problem für die Potenzreihen (2) und (3) betrachtet haben.