Über sternige und konvexe Abbildung, II

Von

Akira Kobori

(Eingegangen am 19. November 1932)

In einer früheren Arbeit mit demselben Titel habe ich den Satz bewiesen:

Satz I. Es sei die Potenzreihe

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots\ldots+a_nz^n+\ldots\ldots$$

regulär im Einheitskreise $|z|<1$, so bilden $f(z)$ und ihre sämtlichen Abschnitte den Kreis $|z|<\rho$ auf den in Bezug auf den Nullpunkt sternigen Bereich ab, wenn ρ die grösste positive Zahl ist, die der Beziehung

$$2|a_2|\rho+3|a_3|\rho^2+\ldots\ldots+n|a_n|\rho^{n-1}+\ldots\ldots\leqq 1$$

genügt.[1,2]

Ich untersuche in der vorliegenden Arbeit einige Anwendungen dieses Satzes und unterteile in drei Teile.

Im ersten Teil untersuche ich die Sternschranken von ungeraden Potenzreihen

$$\varphi(z)=z+a_3z^3+\ldots\ldots+a_{2n+1}z^{2n+1}+\ldots\ldots$$

und ihre sämtlichen Abschnitte

$$\sigma_n(z)=z+a_3z^3+\ldots\ldots+a_{2n+1}z^{2n+1}\qquad n=1,\ 2,\ldots\ldots,$$

die den Bedingungen

(A) $\qquad |a_{2\nu+1}|\leqq m \qquad \nu=1,2,\ldots\ldots$

oder

(B) $\qquad |\varphi'(z)|\leqq N\ (N>1)$ für $|z|<1$

genügen.

---

1. A. Kobori: Diese Memoirs, **15**, 267–278. Diese Arbeit bezeichne ich fortan mit K. Diesen Satz hat inzwischen auch K. Noshiro (Proc. Imp. Aca. 1932, 275–277) unabhängig von meiner Arbeit auf ähnliche Weise bewiesen.

2. Während der Korrektur bin ich auf die folgenden Arbeit aufmerksam geworden, die diesen Satz beweist: J. W. Alexander, Annals of Math. (1915–1916).

G. Szegö[1] hat bewiesen, dass die sämtlichen Abschnitte

$$S_n(z)=z+a_2z^2+\ldots\ldots+a_nz^n \quad n=2,3,\ldots\ldots$$

der im Einheitskreise $|z|<1$ regulären und schlichten Potenzreihe

$$f(z)z=+a_2z^2+\ldots\ldots+a_nz^n+\ldots\ldots$$

den Kreis $|z|<\frac{1}{4}$ schlicht abbilden. Anschliessend an diesen Satz hat L. Bieberbach[2] gezeigt, dass es eine positive Zahl ρ gibt, so dass jede Potenzreihe

$$g(z)=z+b_2z^2+\ldots\ldots+b_nz^n+\ldots\ldots$$

mit

$$|b_n|\leqq|a_n| \quad n=2,\ 3,\ldots\ldots$$

den Kreisbereich $|z|<\rho$ schlicht abbildet. Es ist $0.159<\rho<0.165$.

Beim Nachdenken über diesen Satz möchte ich im zweiten Teil diese Bieberbachsche Idee auf die schlichten sternigen Abbildungen ausdehnen.

Im letzten Teil berichtige ich den Fehler, den ich in der Arbeit K gemacht habe und füge einige Verschärfungen der Ergebnisse hinzu, die ich in derselben Arbeit bewiesen habe.

I. Über ungerade Potenzreihen

1. Erstens beweise ich den Satz, welcher lautet:

Satz II. *Es sei die ungerade Potenzreihe*

$$\varphi(z)=z+a_3z^3+\ldots\ldots+a_{2n+1}z^{2n+1}+\ldots\ldots$$

regulär im Einheitskreise $|z|<1$ *und vom Typus A, d. h.*

$$|a_{2n+1}|\leqq m \quad n=1,2,\ldots\ldots,$$

wo m eine positive Zahl bedeutet, so bilden $\varphi(z)$ *und ihre sämtlichen Abschnitte*

$$\sigma_n(z)=z+a_3z^3+\ldots\ldots+a_{2n+1}z^{2n+1} \quad n=1,\ 2,\ldots\ldots$$

den Kreis $|z|<\sqrt{\dfrac{3m+2-\sqrt{8m+9m^2}}{2(m+1)}}$ *schlicht und in Bezug auf den Nullpunkt sternig ab.*

Die Konstante $\sqrt{\dfrac{3m+2-\sqrt{8m+9m^2}}{2(m+1)}}$ *kann durch keine grössere Zahl ersetzt werden.*

Nach der Voraussetzung ist

1. G. Szegö: Math. Ann. **100** (1928) 188-211.
2. Vgl. L. Bieberbach: Lehrbuch der Funktionentheorie II, 2, Aufl. S. 80.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(2\nu+1)\,|a_{2\nu+1}|\,\rho^{2\nu} \leqq m\sum_{\nu=1}^{\infty}(2\nu+1)\rho^{\nu}$$

$$= \frac{m(3\rho^2-\rho^4)}{(1-\rho^2)^2} \quad \text{für} \quad \rho<1$$

$$= 1 \quad \text{für} \quad \rho_m = \sqrt{\frac{3m+2-\sqrt{8m+9m^2}}{2(m+1)}}.$$

Dass kein Kreis $|z|<\rho$ mit $\rho>\sqrt{\dfrac{3m+2-\sqrt{8m+9m^2}}{2(m+1)}}$ durch alle Potenzreihen vom Typus A schlicht und in Bezug auf den Nullpunkt sternig abgebildet werden kann, sieht man so ein: Für die Potenzreihe

$$\varphi(z) = z - m\sum_{\nu=1}^{\infty} z^{2\nu+1}$$

ist

$$\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)} = 1 - \frac{m\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(2\nu+1)z^{2\nu} - m\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}z^{2\nu}}{1-m\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}z^{2\nu}}.$$

Da aber

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(2\nu+1)z^{2\nu} = \frac{3z^2-z^4}{(1-z^2)^2} \quad \text{für} \quad |z|<1$$

$$= \frac{1}{m} \quad \text{für} \quad z=\rho_m=\sqrt{\frac{3m+2-\sqrt{8m+9m^2}}{2(m+1)}}$$

ist, so ist

$$\frac{\rho_m\varphi'(\rho_m)}{\varphi(\rho_m)} = 0,$$

was zu beweisen war.

2. Nun gehe ich zu ungeraden Potenzreihen vom Typus B über. Da $\varphi(z)$ der Bedingung (B) genügt, so ist nach dem bekannten Satz

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(2\nu+1)^2\,|a_{2\nu+1}|^2 \leqq N^2, \quad a_1=1.$$

Daher mit Rücksicht auf die Schwarzsche Ungleichung hat man

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(2\nu+1)\,|a_{2\nu+1}|\,\rho^{2\nu} \leqq \sqrt{N^2-1}\,\sqrt{\sum_{\nu=1}^{\infty}\rho^{4\nu}}$$

$$= \sqrt{N^2-1}\cdot\frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^4}} \quad \text{für} \quad \rho<1$$

$$= 1 \quad \text{für} \quad \rho=\frac{1}{\sqrt{N}},$$

woraus der Satz folgt:

Satz III. *Es sei die ungerade Potenzreihe*

$$\varphi(z)=z+a_3z^3+\ldots\ldots+a_{2n+1}z^{2n+1}+\ldots\ldots$$

regulär im Einheitskreise $|z|<1$ *und vom Typus B, d. h.*

$$|\varphi'(z)|\leqq N \quad (N>1) \quad \textit{für} \quad |z|<1,$$

so bilden $\varphi(z)$ *und ihre sämtlichen Abschnitte*

$$\sigma_n(z)=z+a_3z^3+\ldots\ldots+a_{2n+1}z^{2n+1} \quad n=1,\ 2,\ldots\ldots$$

den Kreis $|z|<\dfrac{1}{\sqrt{N}}$ *schlicht und in Bezug auf den Nullpunkt sternig ab.*

Die Konstante $\dfrac{1}{\sqrt{N}}$ *kann auch hier durch keine grössere Zahl ersetzt werden.*

Dass diese Schranke erreichbar ist, sieht man bei der Potenzreihe

$$\varphi(z)=\int_0^z \frac{1-Nz^2}{1-\dfrac{z^2}{N}}dz=N^2z-\frac{\sqrt{N}\,(N^2-1)}{2}\log\left(\frac{\sqrt{N}+z}{\sqrt{N}-z}\right),$$

wobei der Logarithmus so gewählt ist, dass die Potenzreihe am Punkte $z=0$ den Wert Null annimmt.

II. Über zwei Sätze, die zum Bieberbachschen Ideenkreis gehören

3. G. Szegö[1] hat gezeigt, dass sämtliche Abschnitte

$$S_n(z)=z+a_2z^2+\ldots\ldots+a_nz^n \quad n=2,\ 3,\ldots\ldots$$

der Potenzreihe

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots\ldots+a_nz^n+\ldots\ldots,$$

die im Einheitskreise $|z|<1$ regulär ist und denselben Kreis schlicht und in Bezug auf den Nullpunkt sternig abbildet, im Kreise $|z|<\frac{1}{4}$ schlicht und sternig sind. Anschliessend an diesen Satz möchte ich einen Satz hinzufügen, welcher lautet:

Satz IV. *Wenn die Potenzreihe*

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots\ldots+a_nz^n+\ldots\ldots$$

den Kreis $|z|<1$ *schlicht und in Bezug auf den Nullpunkt sternig abbildet, so gibt es eine positive Zahl* ρ_s *derart, dass jede Potenzreihe*

$$g(z)=z+b_2z^2+\ldots\ldots+b_nz^n+\ldots\ldots$$

1. G. Szegö loc. cit.

mit

$$|b_n| \leqq |a_n| \quad n=2, 3, \ldots\ldots$$

den Kreisbereich $|z|<\rho_s$ *schlicht und in Bezug auf den Nullpunkt sternig abbildet, wobei* ρ_s *die reelle Wurzel der Gleichung*

$$2x^3-6x^2+7x-1=0$$

bedeutet. Es ist $\rho_s=0.1646\ldots\ldots$

Die Konstante ρ_s *kann durch keine grössere Zahl ersetzt werden.*

Nach der Voraussetzung ist

$$\sum_{\nu=2}^{\infty}\nu|b_\nu|\rho^{\nu-1} \leqq \sum_{\nu=2}^{\infty}\nu|a_\nu|\rho^{\nu-1}.$$

Da aber für die schlichte sternige Potenzreihe die Koeffizientenabschätzung

$$|a_n| \leqq n \quad n=2, 3, \ldots\ldots$$

bekannt ist, so gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=2}^{\infty}\nu|a_\nu|\rho^{\nu-1} &\leqq \sum_{\nu=2}^{\infty}\nu^2\rho^{\nu-1}\\ &= 1+\frac{2\rho^3-6\rho^2+7\rho-1}{(1-\rho)^3} \quad \text{für} \quad \rho<1\\ &= 1,\end{aligned}$$

sobald ρ die reelle Wurzel von

$$2x^3-6x^2+7x-1=0$$

ist, d. h. sobald $\rho_s=0.1646\ldots\ldots$ist. Damit ist

$$\sum_{\nu=2}^{\infty}\nu|b_\nu|\rho_s^{\nu-1} \leqq 1.$$

Somit, nach Satz I, folgt die Behauptung.

Dass kein Kreis $|z|<\rho$ mit $\rho>\rho_s$ durch alle $g(z)$ schlicht und in Bezug auf den Nullpunkt sternig abbildet werden kann, sieht man bei der Potenzreihe

$$g(z)=z-\sum_{\nu=2}^{\infty}\nu z^\nu.$$

Denn, da für $|z|<1$

$$\frac{zg'(z)}{g(z)}=1-\frac{\sum_{\nu=2}^{\infty}\nu^2 z^{\nu-1}-\sum_{\nu=2}^{\infty}\nu z^{\nu-1}}{1-\sum_{\nu=2}^{\infty}\nu z^{\nu-1}}$$

und

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \nu^2 z^\nu = 1 \quad \text{für} \quad z = \rho_s$$

ist, so ist

$$\Re \frac{\rho_s g'(\rho_s)}{g(\rho_s)} = 0.$$

4. Bekanntlich ist das Bild des Kreises $|z| < \rho$ bei der Abbildung $f(z)$ dann und nur dann schlicht und konvex, wenn das Bild desselben Kreises bei der Abbildung $zf'(z)$ schlicht und in Bezug auf den Nullpunkt sternig ist. Daher folgt aus dem vorgenannten Satz der

Satz V. *Wenn die Potenzreihe*

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots\ldots + a_n z^n + \ldots\ldots$$

den Einheitskreis $|z| < 1$ *schlicht und konvex abbildet, so gibt es eine positive Zahl* ρ_s *derart, dass jede Potenzreihe*

$$g(z) = z + b_2 z^2 + \ldots\ldots + b_n z^n + \ldots\ldots$$

mit

$$|b_n| \leqq |a_n| \quad n = 2, 3, \ldots\ldots$$

den Kreis $|z| < \rho_s$ *schlicht und konvex abbildet, wobei* ρ_s *die reelle Wurzel der Gleichung*

$$2x^3 - 6x^2 + 7x - 1 = 0$$

bedeutet. Es ist $\rho_s = 0.1646\ldots\ldots$.

Die Konstante ρ_s *kann auch hier durch keine grössere Zahl ersetzt werden.*

Dass ρ_s durch keinen grösseren Wert ersetzt werden kann, sieht man bei der Potenzreihe

$$g(z) = z - \sum_{\nu=2}^{\infty} z^\nu,$$

denn für $|z| < 1$ ist

$$\frac{zg''(z)}{g'(z)} = -\frac{\sum_{\nu=2}^{\infty} \nu^2 z^{\nu-1} - \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu z^{\nu-1}}{1 - \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu z^{\nu-1}}$$

und

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 z^{\nu-1} = 1 \quad \text{für} \quad z = \rho_s,$$

d. h.

$$1 + \Re \frac{\rho_s g''(\rho_s)}{g'(\rho_s)} = 0,$$

damit ist der Satz bewiesen, der dem Szegöschen Satz entspricht. Er lautet:

Die Potenzreihe

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots\ldots+a_nz^n+\ldots\ldots$$

sei regulär und schlicht im Kreise $|z|<1$ und bilde denselben auf ein konvexes Gebiet ab. Dann sind sämtliche Abschnitte

$$S_n(z)=z+a_2z^2+\ldots\ldots+a_nz^n \quad n=2,\ 3,\ldots\ldots$$

schlicht und konvex im Kreise $|z|<\frac{1}{4}$.

III. Bemerkungen

5. Ich habe in der Arbeit K den Marxschen Satz falsch erklärt[1]. Somit ziehe ich die Sätze in den Paragraphen 3 und 4 zurück. Ich glaube aber, dass diese Sätze richtig sind.

Nun gehe ich zur Verschärfung über.

Ich habe gezeigt, dass die Potenzreihe

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots\ldots+a_nz^n+\ldots\ldots,$$

die im Kreise $|z|<1+N+\sqrt{N(1+N)}$ regulär ist, sowie ihre sämtlichen Abschnitte den Kreis $|z|<1$ auf den konvexen Bereich abbilden, wenn

$$|f'(z)|\leqq N\ (N>1) \quad \text{für} \quad |z|<1+N+\sqrt{N(N+1)}$$

ist. Diesen Satz kann m n folgendermassen verschärfen:

Satz VI. *Es sei*

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots\ldots a_nz^n+\ldots\ldots$$

regulär im Kreise $|z|<\rho$ *und genüge der Bedingung*

$$|f'(z)|\leqq N \quad (N>1) \quad \textit{für} \quad |z|<\rho,$$

so bilden $f(z)$ *und ihre sämtlichen Abschnitte*

$$S_n(z)=z+a_2z^2+\ldots\ldots a_nz^n \quad n=2,\ 3,\ldots\ldots$$

den Kreis $|z|<1$ *auf den schlichten und konvexen Bereich ab, wobei* ρ *die kleinste positive Wurzel der Gleichung*

$$\frac{N^2}{N^2-1}(\rho^2-1)^3-(1+\rho^2)\rho^4=0$$

bedeutet.

Diesen Satz kann man sehr leicht mit Hilfe des folgenden Satzes beweisen:

---

1. Für diese Bemerkung bin ich Herrn Shin-ichi Takahashi dankbar.

Es sei die Potenzreihe

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots\ldots+a_nz^n+\ldots\ldots$$

regulär im Einheitskreise $|z|<1$ und ρ die grösste positive Zahl, die der Beziehung

$$2^2|a_2|\rho+3^2|a_3|\rho^2+\ldots\ldots+n^2|a_n|\rho^{n-1}+\ldots\ldots\leqq 1$$

genügt, so bilden $f(z)$ und ihre sämtlichen Abschnitte den Kreis $|z|<\rho$ auf den schlichten und konvexen Bereich ab[1].

6. Ich habe mit Hilfe des Satzes I den anderen Beweis des Takahashi-Kakeyaschen Satzes gegeben, welcher lautet:

Es sei

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots\ldots+a_nz^n+\ldots\ldots$$

regulär im Kreise $|z|<2N$ $(N\geqq 1)$ und genüge der Bedingung

$$|f'(z)|\leqq N \quad \text{für} \quad |z|<2N,$$

so sind $f(z)$ und ihre sämtlichen Abschnitte schlicht und in Bezug auf den Nullpunkt sternig im Kreise $|z|<1$.

Man kann aber mit Hilfe des Satzes I den Satz folgendermassen verschärfen:

Satz VII. *Es sei die Potenzreihe*

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots\ldots+a_nz^n+\ldots\ldots$$

regulär im Kreise $|z|<N$ $(N\geqq 1)$ *und*

$$|f'(z)|\leqq N \quad \textit{für} \quad |z|<N,$$

dann bilden $f(z)$ *und ihre sämtlichen Abschnitte den Einheitskreis* $|z|<1$ *schlicht und in Bezug auf den Nullpunkt sternig ab.*

Die hiermit gewonnene Konstante Eins kann durch keinen grösseren Wert ersetzt werden.

Für $N=1$, nach dem Prinzip vom Maximum, ist

$$f'(z)\equiv 1,$$

damit ist

$$f(z)\equiv z.$$

Daher beweise ich den Satz für $N>1$.

Nach der Voraussetzung ist

$$\sum_{\nu=2}^{\infty}\nu^2|a_\nu|^2N^{2(\nu-1)}\leqq N^2-1$$

und

1. A. Kobori loc. cit. Diesen Satz auch hat K. Noshiro unabhäggig von meiner Arbeit aufgestellt.

$$\sum_{\nu=2}^{\infty}\nu|a_\nu| = \sum_{\nu=2}^{\infty}\nu|a_\nu|N^{\nu-1}\cdot\frac{1}{N^{\nu-1}}$$

Daher hat man, mit Rücksicht auf die Schwarzsche Ungleichung, die Ungleichung

$$\sum_{\nu=2}^{\infty}\nu|a_\nu| \leqq 1.$$

Wenn man die Potenzreihe

$$f(z) = \int_0^z \frac{N^2(1-z)}{N^2-z}dz = N^2z + N^2(N^2-1)\log\left(1-\frac{z}{N^2}\right)$$

in Betracht zieht, wobei der Logarithmus so gewählt ist, dass

$$\log\left(1-\frac{z}{N^2}\right) = 0 \quad \text{für} \quad z=0,$$

so kann man sehr leicht sehen, dass die Schranke erreichbar ist.

8. Den Takahashi-Kakeyaschen Satz kann man auch folgendermassen erklären, wenn man die Voraussetzung des originalen Satzes benutzt:

Satz VIII. *Es sei die Potenzreihe*

$$f(z) = z + a_2z^2 + \dots\dots + a_nz^n + \dots\dots$$

regulär im Kreise $|z| < 2N$ $(N \geqq 1)$ *und*

$$|f'(z)| \leqq N \quad \textit{für} \quad |z| < 2N,$$

dann bilden $f(z)$ *und ihre sämtlichen Abschnitte den Kreis* $|z| < 2$ *auf den schlichten in Bezug auf den Nullpunkt sternigen Bereich ab. Die Schranke ist bei der Potenzreihe*

$$f(z) = \int_0^z \frac{N^2(2-z)}{2N^2-z}dz = N^2z + 2N^2(N^2-1)\log\left(1-\frac{z}{2N^2}\right)$$

erreichbar.

Zum Schlusse möchte ich Herrn Professor Toshizô Matsumoto für seine Ratschläge und Anregungen meinen Dank aussprechen.