Über die Wellenbewegungen in der Photosphäre eines rotierenden Sternes

Von

Michinori Kurihara

(Eingegangen am 26, Dezember 1932)

Auszug

Wir haben in dieser Abhandlung eine theoretische Untersuchung über die Wellenbewegungen in der Photosphäre eines rotierenden Sternes gemacht und die Ausdrücke für die Schwingungsperiode und für die Amplituden der Geschwindigkeit und der Dichteänderung berechnet.

Als Ergebnis der Untersuchung haben wir gefunden, dass bei der Sonnenphotosphäre die Perioden der Schwingungen von derselben Ordnung sind wie die der Sonnenrotation. Als eine Anwendung haben wir versuchsweise die Häufigkeitsverteilung in Breite der Protuberanzen betrachtet.

Sowohl über die Rotations- und die Pulsationsbewegung eines Sternes als auch über die Generalzirkulationen in der äusseren Schicht eines Sternes sind viele theoretische Untersuchungen—mit verschiedenen Zwecken—gemacht worden. Ausser solchen Bewegungen kann man auch die Wellenbewegungen in der äusseren Schicht als mögliche Bewegung aufzählen, deren Theorie jedoch bis jetzt noch nicht veröffentlicht ist, davon abgesehen, dass Gezeitenerzeugungskräfte der Planeten von manchen Astronomen vermutet worden sind, um die Periodizität der Sonnenaktivität zu erklären.

Ob die Wellenbewegungen z. B. in der Sonnenoberfläche wirklich existieren oder nicht, ist heute ganz fraglich. Alle Beobachter neigen zur Verneinung der Sonnenaktivität von kurzer Periode, die sich unter Umständen auf die Wellenbewegungen zurückführen lassen könnte—vom Beobachtungsergebnisse in 1915 von H. H. Plaskett[1] abgesehen, das auf eine kurze Periodizität der Änderung der Sonnenrotation hingedeutet hat. Es scheint mir doch interessant zu sein, eine mathematische Untersuchung über solche Wellenbewegungen durchzuführen,

1. Ap. J. **43** (1916) 145.

damit man von ihren Eigenschaften etwas genauere Begriffe hat.

Es soll in dieser Abhandlung untersucht werden, was für Wellenbewegungen in der äusseren Schicht des Sternes theoretisch möglich sind.

Fundamentale Gleichungen der Bewegung

§ 1. Wir können die Niveauflächen im Gleichgewichtszustande als symmetrisch um die Rotationsachse ansehen. Man nehme eine beliebige Niveaufläche als Bezugsfläche, und es seien θ, φ die Kolatitude bzw. die Länge eines Punktes auf dieser Niveaufläche; hier soll unter Kolatitude der Winkel zwischen der Normalen zur Niveaufläche und der Rotationsachse verstanden werden. Nun fassen wir einen beliebigen Punkt ins Auge und ζ sei die der Trajectorie der Niveaufläche entlang gemessene Entfernung dieses Punktes von der Bezugsniveaufläche—oben mit positiver Einheit.

Wir betrachten zwei Koodinatensysteme—das eine bezieht sich auf das ruhende (X, Y, Z) und das andere auf das rotierende (x, y, z), dessen Winkelgeschwindigkeit ω wir als konstant annehmen wollen—mit demselben Anfangspunkt O, der der Schnittpunkt der Rotationsachse und der Normale des betrachteten Punktes ist, und mit derselben Z-Achse, die mit der Rotationsachse übereinstimmt.

Bezeichnet man nach der Vektorschreibweise mit $\boldsymbol{v}$ die Geschwindigkeit eines Punktes $\boldsymbol{r}$ relativ zum Rotationssysteme, so wird die im Ruhesysteme gemessene Beschleunigung durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+2[\omega \boldsymbol{v}]+[\omega[\omega \boldsymbol{r}]] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1 \cdot 1)$$

wobei das Symbol $\dfrac{\partial}{\partial t}$ die Differentiation nach der Zeit im Rotationssysteme bedeutet.

Der Strahlungsdruck in der Photosphäre ist nicht vollkommen isotrop, aber wir wollen ihn der Einfachheit halber als isotrop annehmen. P sei der Gesamtdruck—nämlich der Strahlungsdruck plus Gasdruck—ρ sei die Dichte und V die Potentialfunktion der Gravitation. Man erhält dann aus (1.1) als Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+2[\omega \boldsymbol{v}]=-\frac{1}{\rho}\nabla P-\nabla\left(V-\frac{1}{2}\omega^2\varpi^2\right) \ldots\ldots\ldots (1 \cdot 2)$$

wobei ϖ den Abstand des betrachteten Teilchens von der Z-Achse bedeutet.

Setze $\rho=\rho_0+\rho', P=P_0+P'$; hier bezieht sich das Suffix „o" auf den Gleichgewichtszustand.

Da die Bedingung für das Gleichgewicht durch

$$-\frac{1}{\rho_0}\nabla P_0=\nabla\left(V-\frac{1}{2}\omega^2\varpi^2\right) \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1\cdot3)$$

gegeben wird, so ergibt sich aus $(1\cdot2)$ sofort

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+2[\omega\boldsymbol{v}]=-\frac{1}{\rho_0}\nabla P'-\frac{\rho'}{\rho_0}\nabla\left(V-\frac{1}{2}\omega^2\varpi^2\right) \quad (1\cdot4)$$

indem man kleine Quantitäten von der zweiten Ordnung vernachlässigt, weil in folgenden nur die kleine Bewegung betrachtet werden soll.

Hierzu kommt noch die Kontinuitätsbedingung:

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\rho_0\nabla\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\rho_0=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1\cdot5)$$

Nun wollen wir zwischen P' und ρ' eine Beziehung

$$\frac{dP_0}{d\rho_0}=\frac{P'}{\rho'} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1\cdot6)$$

annehmen[1].

Dann ergibt sich aus $(1\cdot3)$, $(1\cdot5)$, $(1\cdot6)$

$$\frac{\partial P'}{\partial t}-\rho_0(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\left(V-\frac{1}{2}\omega^2\varpi^2\right)=-\frac{dP_0}{d\rho_0}\rho_0\nabla\boldsymbol{v}\ \ldots\ldots(1\cdot7)$$

und die Bewegungsgleichung $(1\cdot4)$ lässt sich folgendermassen umschreiben:

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{v}}{\partial t^2}+2\left[\omega\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}\right]=\nabla\left\{\frac{dP_0}{d\rho_0}\nabla\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\left(V-\frac{1}{2}\omega^2\varpi^2\right)\right\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1\cdot8)$$

Bezeichnet man die θ-, φ-, ζ-Komponenten der relativen Geschwindigkeit des am Punkte (θ, φ, o) sich befindenden Teilchens mit u, v, w, nämlich:

$$u=r\dot{\theta}, \qquad v=\varpi\dot{\varphi}, \qquad w=\dot{\zeta},$$

so erhält man schliesslich aus $(1\cdot7)$, $(1\cdot8)$, als die fundamentalen Gleichungen, bis auf der zweiter Ordnung[2]

1. Es wird von der Richtigkeit dieser Annahme in § 3 Rede sein.
2. Vgl. Lamb, Hydrodynamics, Cambridge (1916) 553.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2\omega\frac{\partial v}{\partial t}\cos\theta=\frac{\partial\Psi}{r\partial\theta},\\&\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+2\omega\frac{\partial u}{\partial t}\cos\theta+2\omega\frac{\partial w}{\partial t}\sin\theta=\frac{\partial\Psi}{\varpi\partial\varphi},\\&\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-2\omega\frac{\partial v}{\partial t}\sin\theta=\frac{\partial\Psi}{\partial\zeta},\end{aligned}\right\}\quad\cdots(1\cdot 9)$$

$$\frac{\partial P'}{\partial t}=-\rho_0\Psi,\quad\cdots\cdots(1\cdot 10)$$

wo

$$\Psi=\frac{dP_0}{d\rho_0}\nabla\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\left(V-\frac{1}{2}\omega^2\varpi^2\right)\quad\cdots\cdots(1\cdot 11)$$

In folgenden betrachten wir nur den Fall, dass die Winkelgeschwindigkeit nicht gross ist, so dass man die Gestalt des Sternes in der ersten Annäherung für eine Kugel halten kann, und zwar solche Wellenbewegungen, welche nur in der Photosphäre stattfinden, deren Dicke im Vergleich mit dem Halbmesser des Sternes vernachlässigbar klein ist. Man kann dann in den fundamentalen Gleichungen $r=R$, $\varpi=R\sin\theta$ und $\frac{\partial}{\partial\zeta}=\frac{\partial}{\partial r}$ setzen, wo R der Radius des Sternes ist.

§ 2. Betrachten wir als einen besonderen Fall die wirbelfreie Bewegung in der Photosphäre eines nicht-rotierenden Sternes, so werden die fundamentalen Gleichungen ganz einfach und man kann aus ihnen die Differentialgleichung für das Geschwindigkeitspotential Φ herleiten, die man aber auch einfacher in folgender Weise erhalten kann. Aus (1·3), (1·4), (1·6) ergibt sich

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}=-\nabla\frac{P'}{\rho_0}$$

oder

$$P'=\rho_0\frac{\partial\Phi}{\partial t}\quad\cdots\cdots(2\cdot 1)$$

Die Kontinuitätsbedingung ergibt demnach

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=\frac{dP_0}{d\rho_0}\nabla^2\Phi-(\nabla\Phi\cdot\nabla)V\quad\cdots\cdots(2\cdot 2)$$

§ 3. Wir haben in § 1 eine Beziehung zwischen P' und ρ'—nämlich (1·6)—angenommen. In diesem Paragraphen wollen wir sehen, ob sie wirklich als eine richtige Annahme gilt.

Wir beschäftigen uns mit den Wellenbewegungen von kleiner Schwingungsamplitude. Wenn ihre vertikalen Komponenten im Vergleich mit ihren horizontalen von viel kleinerer Ordnung sind, so kann man leicht sehen, wie die ζ-Komponente von der Vektorgleichung (1·2) oder (1·4) zeigt, dass die Photosphäre in jeder Epoche der Schwingung hinsichtlich der Richtung des Radiusvektors im Gleichgewichte steht. Andererseits können wir annehmen, dass die Nettoströmung der Strahlungsenergie während der Bewegung immer konstant bleibt; denn wir betrachten nur diejenigen Wellenbewegungen, die nur in der Photosphäre stattfinden.

Die Photosphäre steht also in erster Annäherung nicht nur in mechanischem, sondern auch in Strahlungsgleichgewichte, so dass man imstande ist, von der Eddingtonschen oder der Milneschen Theorie[1] über die Photosphäre in unserer folgenden Betrachtung Gebrauch zu machen.

Nimmt man den Absorptionskoeffizienten k als konstant an, so muss der Gasdruck p_g mit dem Strahlungsdruck p_r nach der Theorie des Strahlungsgleichgewichtes in folgendem Zusammenhange stehen:

$$\frac{dp_g}{dp_g+dp_r}=1-\frac{kH}{cg}=\text{eine Konstante } (=\beta) \qquad (3\cdot1)$$

wobei H die Nettoströmung der Strahlungsenergie und g die Gravitationsbeschleunigung und c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet.

Ferner seien T, μ, τ die Temperatur, das Molekulargewicht und die optische Tiefe. Dann haben wir folgende Relationen:

$$\left.\begin{aligned} p_g&=\frac{\Re}{\mu}\rho T=\frac{\beta}{1-\beta}\,\frac{H}{c}\tau \\ acT^4&=H(2+3\tau) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3\cdot2)$$

wobei $\Re$, a die Gaskonstante und die Stefansche Konstante bedeuten. Diese drei Gleichungen geben p_g, ρ und T als Funktionen von τ.

Setzt man der in § 1 erwähnten Vorschrift gemäss $\tau=\tau_0+\tau'$, so erhält man nach der Taylorschen Entwicklung

$$P=P_0+P'=P_0+\left(\frac{dP}{d\tau}\right)_0\tau'+\ldots\ldots,\quad \rho=\rho_0+\rho'=\rho_0+\left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)_0\tau'+\ \ldots\ldots\ldots$$

Hieraus folgt bis auf kleine Quantitäten von zweiten Ordnung

$$\frac{P'}{\rho'}=\left(\frac{dP}{d\rho}\right)_0=\frac{dP_0}{d\rho_0} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3\cdot3)$$

1. Z. B. Vgl. A. S. Eddington, The Internal Constitution of the Stars, Chap. XII, Cambridge (1926).

was nichts anders als die in § 1 gemachte Voraussetzung ist.

Für den Wert von $\frac{dP_0}{d\rho_0}$ erhält man aus Gleichungen (3·2) nach einer Reihe von Berechnungen

$$\frac{dP_0}{d\rho_0}=\frac{\Re}{\mu}\,\frac{T_0}{\beta}\left\{1+\frac{\tau_0}{{}^8/_3+3\tau_0}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3\cdot4)$$

Da die Quantität im Krammer in der rechten Seite von (3·4), während τ_0 sich von 0 zu ∞ ändert, nur um $\frac{1}{3}$ ändert, d. h. von 1 bis $1\frac{1}{3}$ zunimmt, so erhalten wir annäherungsweise

$$\frac{dP_0}{d\rho_0}=\frac{P'}{\rho'}=\frac{\Re}{\mu}\cdot\frac{T_0}{\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3\cdot5)$$

wovon wir später Gebrauch machen werden.

Annäherungslösungen der Gleichungen

§ 4. *Eine nicht-rotierende Photosphäre.* Wir wollen uns zunächst mit einer nicht-rotierenden Photosphäre beschäftigen und die Annäherungsausdrücke für die Schwingungsperiode, die Geschwindigkeit und die Dichteänderung herleiten.

Gleichung (2·2) lautet mittels Polarkoordinaten geschrieben

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=\frac{dP_0}{d\rho_0}\left\{\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{2}{R}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{R^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right\}-g\frac{\partial\Phi}{\partial r} \quad \ldots\ldots(4\cdot1)$$

Hier kann das Glied $\frac{dP_0}{d\rho_0}\,\frac{2}{R}\,\frac{\partial\Phi}{\partial r}$ im Vergleich mit $g\frac{\partial\Phi}{\partial r}$ vernachlässigt werden.

Wenn man nun Φ den Kugelfunktionen gemäss entwickelt und den Zeitfaktor mit $e^{i\sigma t}$ bezeichnet, so erhält man für die Kugelfunktion n-ter Ordnung

$$\frac{d^2\Phi_n}{dr^2}-g\frac{d\rho_0}{dP_0}\cdot\frac{d\Phi_n}{dr}+\left[\sigma_n^2\frac{d\rho_0}{dP_0}-\frac{n(n+1)}{R^2}\right]\Phi_n=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4\cdot2)$$

Oder anstatt r die optische Tiefe τ einführend und (3·2), (3·5) berücksichtigend,

$$\frac{d}{d\tau}\left(\tau^2\frac{d\Phi_n}{d\tau}\right)+\frac{\tau^2}{k^2\rho^2}\left[\sigma_n^2\frac{d\rho_0}{dP_0}-\frac{n(n+1)}{R^2}\right]\Phi_n=0 \quad \ldots(4\cdot3)$$

Wir betrachten, wie wir in § 3 gesagt haben, nur den Fall, wo die vertikale Bewegung überall in der Photosphäre sehr klein sind. Nehmen wir infolgedessen an, dass solche Bewegung für eine gewisse optische Tiefe τ_1 vollkommen verschwindet, so können wir, indem wir Gleichung (4·3) über τ von $\tau=0$ bis τ_1 integrieren und dann $\left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial \tau}\right)_{\tau_1}$ Null setzen, für σ_n den folgenden Ausdruck erhalten:

$$\sigma_n^2 = \frac{n(n+1)}{R^2} \cdot \overline{\frac{dP_0}{d\rho_0}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4\cdot4)$$

wo

$$\overline{\frac{dP_0}{d\rho_0}} = \int_0^{\tau_1} \frac{\tau^2}{k^2\rho^2} d\tau \Big/ \int_0^{\tau_1} \frac{\tau^2}{k^2\rho^2} \cdot \frac{d\rho_0}{dP_0} d\tau \qquad \ldots\ldots\ldots(4\cdot5)$$

ist; dabei haben wir Φ_n als konstant angesehen.

Oder die Periode P_n der Schwingung n-ter Ordnung ist gegeben durch

$$P_n = 2\pi R \sqrt{\frac{1}{n(n+1)} \cdot \frac{\beta\mu}{\Re \overline{T}}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4\cdot6)$$

wo

$$\overline{T} = \frac{5}{6} \cdot \frac{\sum_{i=0}^{5} T_1^i T_0^{5-i}}{\sum_{i=0}^{4} T_1^i T_0^{4-i}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4\cdot7)$$

Die Geschwindigkeit lässt sich dann mittels der Gleichung $\boldsymbol{v} = -\Gamma \Phi$ berechnen und die Druckänderung mittels (2·1). Bezeichnet man mit ε das Verhältnis der Schwingungsamplitude der Dichteänderung in Polen zur Dichte im Gleichgewichte, so erhält man schliesslich

$$\left.\begin{aligned} \frac{\rho_n'}{\rho_0} &= \varepsilon P_n(\theta) e^{i\left(\sigma_n t + \frac{\pi}{2}\right)} \\ u_n &= -\frac{\varepsilon \sigma_n R}{n(n+1)} \cdot \frac{dP_n(\theta)}{d\theta} e^{i\sigma_n t} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4\cdot8)$$

wo mit $P_n(\theta)$ die Kugelfunktion n-ter Ordnung bezeichnet ist.

§ 5. *Eine rotierende Photosphäre.* Auf ganz ähnliche Weise können wir auch im allgemeinen den Fall einer rotierenden Photosphäre untersuchen.

Aus den fundamentalen Gleichungen (1·9), (1·10), (1·11) folgen sogleich

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\omega\frac{\partial v}{\partial t}\cos\theta = \frac{\partial \Psi}{R\partial\theta} \qquad \text{.....................}(5\cdot 1)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\omega\frac{\partial u}{\partial t}\cos\theta = 0 \qquad \text{.............................}(5\cdot 2)$$

$$\frac{\partial P'}{\partial t} = -\rho_0 \Psi \qquad \text{...}(5\cdot 3)$$

$$\Psi = \frac{\overline{dP_0}}{d\rho_0}\cdot\frac{1}{R\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(u\sin\theta) \qquad \text{.................}(5\cdot 4)$$

wo

$$\frac{\overline{dP_0}}{d\rho_0} = \frac{1}{\tau_1}\int_0^{\tau_1}\frac{dP_0}{d\rho_0}d\tau \qquad \text{..............................}(5\cdot 5)$$

Diese Gleichungen geben in ähnlicher Weise wie im vorhergehenden Paragraphen

$$-\sigma^2 u - 2i\sigma\omega v\cos\theta = \frac{\overline{dP_0}}{d\rho_0}\cdot\frac{1}{R^2}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}(u\sin\theta)\right)$$
$$\text{...}(5\cdot 6)$$

$$-\sigma v + 2i\omega u\cos\theta = 0 \qquad \text{...}(5\cdot 7)$$

Indem man aus diesen Gleichungen v eliminiert und

$$\left.\begin{array}{ll} u\sin\theta = \xi, & \cos\theta = \mu, \\ \dfrac{R^2}{\dfrac{\overline{dP_0}}{d\rho_0}}\sigma^2 = c, & \dfrac{R^2}{\dfrac{\overline{dP_0}}{d\rho_0}}4\omega^2 = f \end{array}\right\} \qquad \text{.................}(5\cdot 8)$$

setzt, erhält man

$$(1-\mu^2)\frac{d^2\xi}{d\mu^2} + (c - f\mu^2)\xi = 0 \qquad \text{.......................}(5\cdot 9)$$

Für eine nicht-rotierende Photosphäre ist $f=0$. Wenn man dann $\xi = \frac{(1-\mu^2)}{R}\cdot\frac{d\Phi}{d\mu}$ setzt, so bedeutet Φ ganz ähnlicherweise wie in § 4 das Geschwindigkeitspotential. Die Azimutalgeschwindigkeit v ist durch Gleichung (5·7) gegeben.

§ 6. Besonders interessant ist der Fall, wo $c=f$, nämlich die Schwingungsperiode einer halben Periode der Rotation gleich ist.

In diesem Falle folgt aus (5·9) sofort

$$\frac{d^2\xi}{d\mu^2} + c\xi = 0 \qquad \text{...}(6\cdot 1)$$

oder integriert

$$\xi = A\sin(\sqrt{c}\,\cos\theta + B),$$

wo A, B Integrationskonstanten sind. Damit die Geschwindigkeit in den beiden Polen verschwindet, müssen c und die Konstante B der folgenden Bedingungen genügen:

$$\left.\begin{aligned} B &= \sqrt{c} + m\pi \\ \sqrt{c} &= m'\frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6{\cdot}2)$$

wobei m und m' beliebige ganze Zahlen bedeuten.

Es ergibt sich demgemäss:

$$\xi = A\sin\{\sqrt{c}\,(1+\cos\theta)\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6{\cdot}3)$$

Dies ist also eine Lösung unseres Problems, falls die Eigenschaften der Photosphäre gerade den obigen Bedingungen genügen.

§ 7. Wir betrachten nun den allgemeineren Fall, $c \neq f$.

Es ist selbstverständlich, dass Gleichung (5·9) eine gerade oder ungerade Funktion von μ als ihre Lösung besitzt. Wir werden in folgenden beispielsweise die letztere genau untersuchen.

Setze, in ähnlicher Weise wie im Texte von Lamb,[1]

$$\frac{d^2\xi}{d\mu^2} = A_1\mu + A_3\mu^3 + \ldots\ldots + A_{2i+1}\,\mu^{2i+1} + \;\ldots\ldots (7{\cdot}1)$$

Dann ergibt sich:

$$\frac{d\xi}{d\mu} = A_{-1} + \frac{A_1}{2}\mu^2 + \ldots\ldots + \frac{A_{2i+1}}{2i+2}\mu^{2i+2} + \ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7{\cdot}2)$$

$$\xi = A_{-1}\mu + \frac{A_1}{2\cdot 3}\mu^3 + \ldots\ldots + \frac{A_{2i+1}}{(2i+2)(2i+3)}\mu^{2i+3} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7{\cdot}3)$$

Indem man diese Gleichungen in (5·9) einführt und den Koeffizienten jeder Potenz von μ gleich Null setzt, erhält man die folgenden Rekursionsformeln:

$$A_1 + cA_{-1} = 0, \quad A_3 - A_1 + c\frac{A_1}{2\cdot 3} - fA_{-1} = 0 \quad \ldots\ldots (7{\cdot}4)$$

$$A_{2i+1} - A_{2i-1} + c\frac{A_{2i-1}}{2i(2i+1)} - f\frac{A_{2i-3}}{(2i-2)(2i-1)} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7{\cdot}5)$$

1. loc. cit. p. 323—325.

Oder $M_i = \dfrac{A_{2i-1}}{A_{2i-3}}$ setzend,

$$M_{i+1} - \left(1 - \frac{e}{2i(2i+1)}\right) - \frac{f}{(2i-2)(2i-1)} \cdot \frac{1}{M_i} = 0 \qquad \ldots\ldots(7 \cdot 6)$$

Hieraus kann man leicht sehen, dass M_i entweder nach Null oder Eins konvergiert, wenn i unendlich wird, nämlich für hinreichend grossen Wert von i;

$$M_{i+1} \sim 1 - \frac{e}{2i(2i+1)} + \frac{f}{(2i-2)(2i-1)} \to 1 \ldots\ldots (7 \cdot 7)$$

oder

$$M_i \sim -\frac{f}{(2i-2)(2i-1)} \to 0 \qquad \ldots\ldots(7 \cdot 8)$$

Aber die erste Beziehung passt nicht zu unserem Probleme, weil sie einer divergierenden Reihe von $(7 \cdot 1)$ für $\mu = \pm 1$ entspricht,[1] während die letzte eine absolut konvergierende Reihe von $(7 \cdot 1)$ für alle Werte von $\mu(-1 \leqslant \mu \leqslant 1)$ gibt.

Man kann also $(7 \cdot 6)$ folgendermassen umschreiben:

$$M_i = -\cfrac{\cfrac{f}{(2i-2)(2i-1)}}{1 - \cfrac{e}{2i(2i+1)} + \cfrac{\cfrac{f}{2i(2i+1)}}{1 - \cfrac{e}{(2i+2)(2i+3)} + \ldots\ldots}} \qquad \ldots\ldots(7 \cdot 9)$$

Dann folgt aus $(7 \cdot 4)$ und $(7 \cdot 9)$

$$1 - \frac{e}{2 \cdot 3} - \frac{f}{e} + \cfrac{\cfrac{f}{2 \cdot 3}}{1 - \cfrac{e}{4 \cdot 5} + \cfrac{\cfrac{f}{4 \cdot 5}}{1 - \cfrac{e}{6 \cdot 7} + \cfrac{\cfrac{f}{6 \cdot 7}}{1 - \cfrac{e}{8 \cdot 9} + \ldots\ldots}}} = 0 \qquad \ldots\ldots(7 \cdot 10)$$

woraus man für einen gegebenen Wert von f den Wert $e\left(= \sigma^2 \dfrac{R^2}{\frac{dP_0}{d\rho_0}}\right)$ berechnen kann. Die Koeffizienten in der Reihe $(7 \cdot 1)$ lassen sich dann bestimmen durch die Formeln:

$$A_3 = M_2 A_1, \quad A_5 = M_2 M_3 A_1, \ldots\ldots$$

---

1. In der Tat ist die Geschwindigkeit $u = \xi \operatorname{cosec}\theta$ unendlich für $\mu = \pm 1$.

Jetzt ist man imstande, den Ausdruck für die Geschwindigkeit zu erhalten; d. h. aus (5·7), (5·8), (5·9), (7·1) erhält man:

$$u = -\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{c-f\mu^2}\left\{A_1\mu + A_3\mu^3 + \ldots\ldots\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(7\cdot 11)$$

$$v = i\sqrt{\frac{f}{c}}\,u\mu \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7\cdot 12)$$

Ganz ähnlicherweise erhält man für die Dichteänderung

$$\frac{\rho'}{\rho} \doteqdot -\frac{i}{\sigma R}\left\{-\frac{A_1}{e} + \frac{A_1}{2}\mu^2 + \frac{A_3}{4}\mu^4 + \ldots\ldots\right\}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7\cdot 13)$$

Numerische Berechnungen

§ 8. *Schwingungsperioden.* In den vorhergehenden Paragraphen haben wir die Theorie der Wellenbewegungen in der Photosphäre entwickelt. Nun wollen wir unsere Theorie auf die Sonnenphotosphäre anwenden, um zu sehen, was für Wellenbewegungen in der Natur stattfinden können.

In diesem Paragraphen wollen wir zuerst die Grössenordnung ihrer Perioden berechnen. Die Angaben in bezug auf die Sonne nehmen wir folgendermassen an:

$R = 6.95 \times 10^{10}$cm., $\mu = 20$, $\beta = 0.9$, $\overline{T} = 6000°K$,
Rotationsperiode $= 25^d$.

Dann erhält man: $\omega = 2.9 \times 10^{-6}$, $\overline{\frac{dP_0}{d\rho_0}} = 2.75 \times 10^{9}$ (aus (3·7)), $f = 5.95$ (aus (5·8)). Nimmt man der Einfachheit halber $f = 6.0$ an, so sind die Wurzeln von Gleichung (7·10) annäherungsweise $c = 8$, 23, u.s.w.. Die ersten beiden dieser Wurzeln entsprechen jede für sich der Ordnung $n = 2$ bzw. 4 der Kugelfunktionen im Falle der nicht-rotierenden Photosphäre.

Die Ergebnisse der Berechnungen sind folgendermassen.
Wenn die Rotation Null ist, so erhält man,

für	$n=1$,	$n=2$,	$n=3$,	$n=4$
σ_n,	3.38×10^{-6},	5.84×10^{-6},	8.27×10^{-6},	10.7×10^{-6},
P_n,	21.6^d,	12.5^d,	8.8^d,	6.8^d,

und wenn man die Rotation berücksichtigt, deren Periode wir als 25 Tage angenommen haben, so erhält man als die Werte von Periode,

$$\overset{d}{12.5} \quad \text{falls} \quad c=f, \qquad \text{wobei } \sqrt{c}=\frac{m'\pi}{2},$$

$$\overset{d}{10.8} \quad \text{für} \quad c=8,$$

$$\overset{d}{6.4} \quad \text{für} \quad c=23.$$

Hier ist es wohl interessant zu bemerken, dass im Falle $c=f$ die mittlere Temperatur $\overline{T}$ der Photosphäre durch $\overline{T}=\frac{\mu\beta}{\Re}\cdot\frac{(2\omega R)^2}{c}$ gegeben wird—z. B. $\overline{T}\doteqdot 14000^\circ K$, für $\sqrt{c}=\frac{\pi}{2}$, $\overline{T}\doteqdot 3500^\circ K$, für $\sqrt{c}=\pi$.

Die oben gegebenen Ergebnisse der Berechnungen führen uns zu einem sehr bemerkenswerten Schluss, dass die Schwingungsperioden hinsichtlich ihrer Grössenordnung dieselben sind wie die Sonnenrotationsperiode. Dieser Schluss ist besonders interessant, wenn man daran denkt, dass die Schwingungsperiode hauptsächlich von den Zuständen der Photosphäre abhängig sein muss und dass die Rotationsperiode ganz unabhängig von solchen Zuständen von Anfang an der Sonne gegeben worden ist.

Die Übereinstimmung der Grössenordnungen dieser beiden Perioden von wesentlich verschiedener Natur mag natürlich auf einen blossen Zufall zurückgeführt werden können. Aber es ist auch nicht unmöglich zu vermuten, dass die Sonnenrotation nur eine scheinbare Erscheinung sei und dass sie sich in irgendeiner Weise als eine nur in der Sonnenatmosphäre herrschende Erscheinung erklären lasse. Durch diese Vermutung würde man unter Umständen imstande sein, insbesondere die Erscheinung der Äquatorialbeschleunigung auf der Sonnenoberfläche zu erklären.

§ 9. Die jeder Sonnenlatitude entsprechenden Amplituden der Schwingungsgeschwindigkeit und der Dichteänderung lassen sich mittels der im vorhergehenden Paragraphen gegebenen Werte von σ_n und c aus Gleichungen (4·8), (7·11), (7·12) und (7·13) berechnen.

Die Ergebnisse der Berechnungen sind graphisch dargestellt: Fig. 1 entspricht dem Falle der nicht-rotierenden Photosphäre, und Fig. 2 bzw. 3 beziehen sich auf die Fälle $c=f$ bzw. $c\neq f$ bei der rotierenden Photosphäre. Dabei haben wir in Fig. 1 und 2 $\varepsilon=\frac{1}{10}$ für $\mu=1$ angenommen, während wir in Fig. 3 für $\mu=0$ dieselbe Annahme gemacht haben.

Wenn man diese drei Abbildungen miteinander vergleicht, so ist es selbstverständlich, dass die Rotation der Sonne auf die Eigenschaften der Wellenbewegungen keinen wesentlichen Einfluss ausübt. Die Maximalgeschwindigkeit ist beinahe von Ordnung $\frac{1}{10}$ km./sec. in unserem Falle.

Fig. 1.

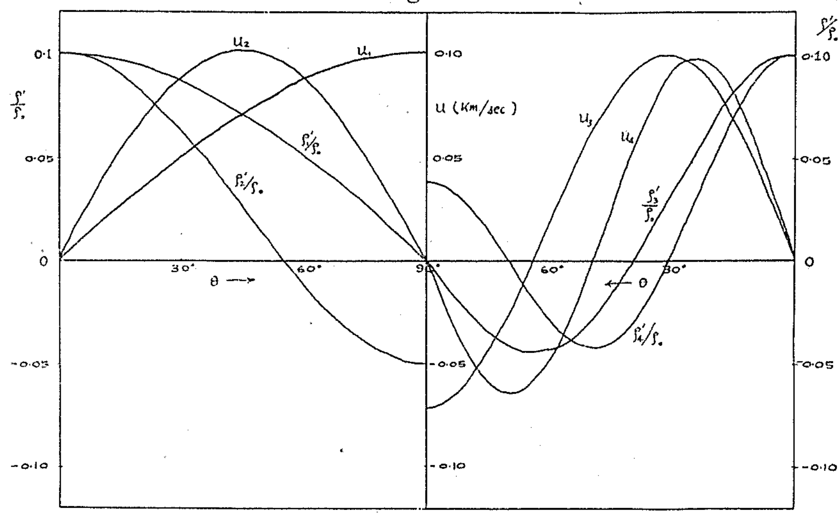


Fig. 2.

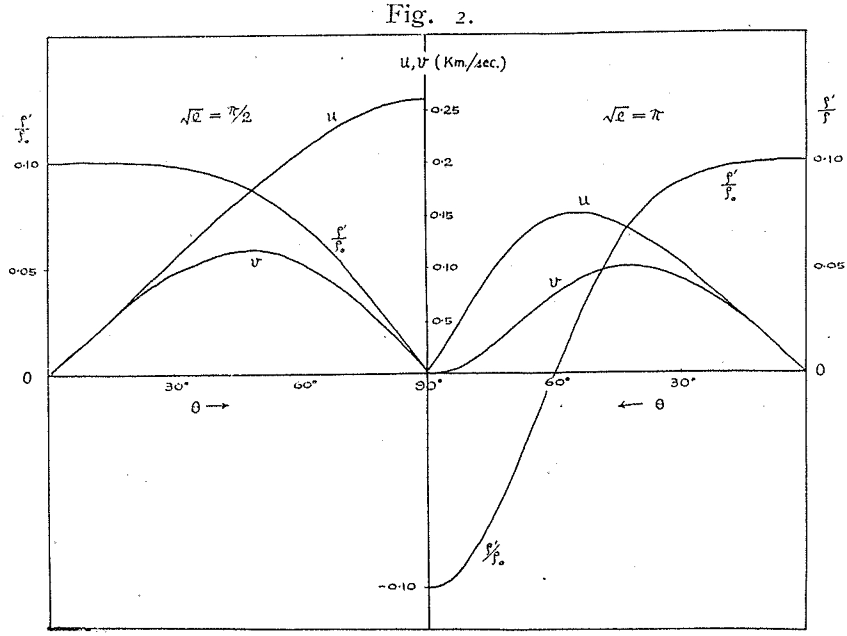
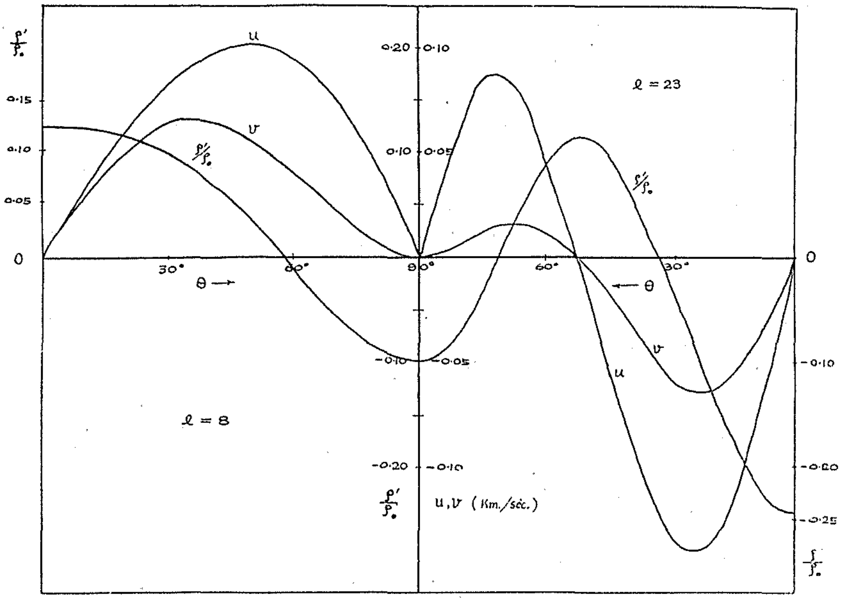


Fig. 3.



§ 10. Es handelt sich bis jetzt um die Eigenschaften der theoretisch möglichen Wellenbewegungen in der Sonnenphotosphäre. Es ist fraglich, ob solche Bewegungen wirklich in der Sonnenoberfläche dauernd stattfinden können, aber es ist wohl zu vermuten, dass solche Wellenbewegungen wenigstens von kurzer Dauer durch irgendwelche Störungen können verursacht werden. Wenn solche Störungen in der Sonnenoberfläche dauernd tätig wären, so müsste ihre Wirkung als irgendeine den Wellenbewegungen parallel gehende Erscheinung beobachtet werden.

Wir wollen nun versuchsweise die Erscheinung von „ Protuberanzen " betrachten. Wenn wir vorläufig annehmen, dass die Häufigkeit der Protuberanzen zu der Druckänderung proportional ist, so können wir ihre Häufigkeitsverteilung in der Breite nach unserer Theorie berechnen.

Wir wollen uns der Einfachheit halber mit der nicht-rotierenden Photosphäre beschäftigen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Protuberanz im Gebiete von Breite θ und $\theta+d\theta$ durch die Wellenbewegung n-ter Ordnung verursacht wird, ist dann :

$$F_n(\theta)=\frac{|P_n(\mu)|}{\int_0^1 |P_n(\mu)|\,d\mu}\sin\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10\cdot1)$$

Die Wellenbewegungen werden vielleicht in der Zone der Maximalhäufigkeit der Sonnenflecken am stärksten gestört werden, so dass nur diejenigen Oscillationen verhältnismässig lange Zeit dauern können, deren Knoten in der Nähe dieser Zone liegen und zwar deren Ordnungszahl klein ist. Solchen Bedingungen genügen die Wellenbewegungen von Ordnung $n=3$ und 4.

Fig. 4.

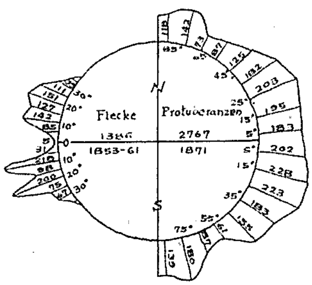
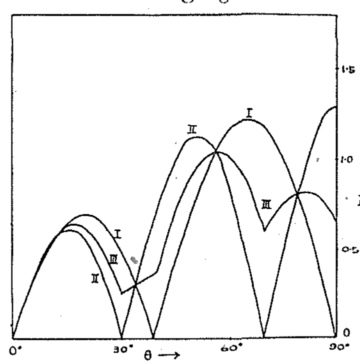


Fig. 5.



Die Kurven I und II in Fig. 5 stellen $F_3(\theta)$ bzw. $F_4(\theta)$ dar, und die Kurve III zeigt die Kombination dieser beiden Quantitäten.

Wenn man die Erscheinung der Protuberanzen auf diese beiden Wellenbewegungen zurückführen könnte, so würde ihre Häufigkeitsverteilung zu der Kurve III parallel gehen. Fig. 4 veranschaulicht die Beobachtungsangaben.[1]

Zum Schluss ist es mir eine angenehme Pflicht, Herrn Prof. Dr. Toshima Araki für seine ständige Leitung bei der Ausführung dieser Arbeit und Herrn Prof. Dr. Shin-ichiro Takeda für seine wertvollen Bemerkungen meinen herzlichen Dank auszusprechen.

Institut für Astrophysik
Universität zu Kyoto,
Dezember, 1932.

1. Handbuch d. Astrophysik. Bd. IV. S. 93.