Über die Turbulenz in der Sonnenatmosphäre.

Von **Michinori Kurihara.**

(Eingegangen am 20. August 1935)

Zusammenfassung.

Unter der Annahme, dass sich das Turbulenzelement während seiner Bewegung adiabatisch ändert, hat der Verfasser die Turbulenz in der Sonnenatmosphäre untersucht. Erstens wird die Gültigkeit des *Richardson*schen Ausdruckes für die Produktivität der Wirbel, der für die Erdatmosphäre aufgestellt ist, für die Sonnenatmosphäre verifiziert. Zweitens sind die numerischen Betrachtungen über die wirbelerzeugende und die wirbelkonsumierende Zone gemacht, und unter der Annahme der Proportionalität des Austausches zu einer Potenz der Turbulenzenergie ist die *Rossby*sche Differentialgleichung gelöst worden. Als Ergebnisse der Berechnungen ist es gefunden worden, dass sich eine turbulente Zone in der Sonnenatmosphäre befindet, deren Dicke ungefähr 7000 km beträgt, deren obere Grenze in der Chromosphäre liegt, und dass die mittlere Geschwindigkeit der turbulenten Bewegungen von der Grössenordnung von 10 km/sec ist.

Neuerdings ist von manchen Astronomen die Ansicht geäussert, dass die turbulenten Bewegungen nicht nur in der Atmosphäre, sondern auch im Innern der Sterne stattfinden. Wenn das der Fall ist, so spielt die Turbulenz astrophysikalisch eine grössere Rolle als die Molekularbewegung, sodass man ihre Einwirkung in bezug auf den inneren Aufbau und den Atmosphären-Aufbau berücksichtigen muss[1]. Nach den theoretischen Untersuchungen in den letzten Jahren ist es einerseits bekannt, dass das Strahlungsgleichgewicht nicht der einzig mögliche Zustand im Sterninnern ist, dass unter Umständen, z. B. bei der starken Zentralkonzentration der Energieerzeugung, das Strahlungsgleichgewicht labil ist und die Konvektionsströme von dauerndem Bestand sind. In der Tat wird in diesem Falle der Energietransport durch Turbulenz viel grösser als der durch Lichtquanten, infolgedessen besteht hier das konvektive Gleichgewicht an Stelle des Strahlungsgleichgewichtes. Über die Möglichkeit des Auftritts der Konvektionsströme hat H. Siedentopf[2] eingehende Untersuchungen gemacht, und L. Biermann[3] hat einige rechnerische Beispiele hierfür gegeben. Andererseits sind die Erscheinungen von Granulationen und Protuberanzen usw. in

1. Vgl. S. Rosseland. M. N. **89** (1929) 49. 2. H. Siedentopf, A. N. **244** (1932) 273; **249** (1933) 33. 3. L. Biermann, Z. f. Ap. **5** (1932) 117.

der Sonnenoberfläche eine Beobachtungstatsache, welche darauf hindeutet, dass die Turbulenz in Wirklichkeit dort stattfindet. Ausserdem sind die turbulenten Bewegungen in der Chromosphäre nach den spektroskopischen Untersuchungen[1] bestätigt worden. Insgesamt ist es heute keineswegs zu bezweifeln, dass die Turbulenz mehr oder weniger in den Himmelskörpern in Erscheinung tritt.

In 1930 zeigte A. Unsöld[2], dass der Ionisationsvorgang auf einem etwa von $\tau=2$ bis $\tau=30$ in optischen Tiefen liegenden Gebiete eine sogenannte „Konvektionszone" zur Folge hat, und er schlug vor, die in der Sonnenatmosphäre zu beobachtenden turbulenten Bewegungen auf eine solche Zone zurückzuführen. Es scheint also für die Untersuchungen der Sonnenatmosphäre interessant zu sein, den Betrag und die Verteilung der in solcher Zone erzeugten Turbulenzen etwas eingehend zu betrachten[3]. Da man aber im gegenwärtigen Stande unseres Wissens keine sichere Kunde über die Eigenschaften der Turbulenz in Himmelskörpern hat, ist es sehr schwer, eine genaue Lösung dieses Problemes zu erhalten. Es soll in dieser Abhandlung nach der Methode von C. G. Rossby[4] näherungsweise gelöst werden.

§ 1. Der Wirbel lässt sich als eine Wärmemaschine ansehen, welche nützliche Wärme in kinetische Energie verwandelt. L. F. Richardson[5] hat bei trockener Luft einen Ausdruck für diese Verwandlung pro Volumeneinheit pro Zeiteinheit abgeleitet, nämlich;

$$C_H \frac{g}{T}\left\{\left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad} - \frac{dT}{dz}\right\}, \qquad \text{..............(1)}$$

worin g die Gravitationsbeschleunigung, T die Temperatur, C_H der Austausch (die sogenannte Wirbelkonvektivität), und $\left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad}$ der adiabatische Temperaturgradient ist. Er hat dabei von einer als „potentielle Temperatur" zu bezeichnenden Grösse, θ, Gebrauch gemacht, deren Gesamtmenge in einem bestimmten Teil der Luft immer erhalten wird, ganz unabhängig von jeder Massenvertauschung innerhalb desselben. Unter θ kann man diejenige Temperatur verstehen, die die

1. W. H. McCrea, M. N. **89** (1929) 718.
2. A. Unsöld, Z. f. Ap. **1** (1930) 139; **2** (1931) 209.
   Vgl. auch, H. Siedentopf, A. N. **245** (1932) 85; **247** (1933) 297. R. Wildt, Z. f. Ap. **9** (1934) 176.
3. Vgl. S. Chandrasekhar, M. N. **94** (1934) 14, 726. W. H. McCrea, M. N. **95** (1934) 80.
4. C. G. Rossby, Mo. Wea. Rev. **54** (1926) 321.
5. L. F. Richardson. Proc. R. S. L. A, **96** (1920) 9: **97** (1920) 355.

Masse der Luft zeigen würde, wenn sie adiabatisch unter einen normalen Druck p_s gebracht würde, nämlich, $\theta = T(p/p_s)^{-n}$, wo $n = 1 - \frac{1}{\gamma}$ und $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ das Verhältnis der spezifischen Wärmen bedeutet. Da der adiabatische Temperaturgradient, wegen der konstanten spezifischen Wärmen der Luft und des Gasgesetzes, eine eigentümliche Konstante bei der Erdatmosphäre ist, wird die Turbulenz durch Konvektion sobald dann verursacht, wenn der wahre Temperaturgradient unter Einfluss der Sonnen- oder Erdoberflächenstrahlung u. a. so vergrössert wird, dass der Ausdruck (1) positiv wird, d. h. $\left|\frac{dT}{dz}\right| > \left|\left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad}\right|$. In der Sonnenatmosphäre ist die Sache etwas anders. Der wahre Temperaturgradient lässt sich durch Strahlungsgleichgewicht bestimmen, denn die Strömung der Strahlungsenergie ist dort überwiegend grösser als die der Energietransporte aller anderen möglichen Art[1]. Die turbulenten Bewegungen werden jedoch durch Konvektion verursacht, falls der adiabatische Temperaturgradient kleiner als der wahre Temperaturgradient wird, indem jede Schwankung in kritischen Ionisationszuständen die Werte der spezifischen Wärmen stark beeinflusst.

Aber wir können nicht dabei eine so bequeme Quantität, wie *Richardsons* θ, definieren, sodass man nicht (1) ohne weiteres auf unseren Fall anwenden darf. Wenn man aber diesen Ausdruck mit Hilfe der spezifischen Entropie S in

$$C_H\left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad} \frac{dS}{dz} \qquad (1')$$

umformt, so besitzt diese Grösse eine allgemeinere Gültigkeit als (1), denn (1′) enthält nur die thermodynamischen Quantitäten, vom Austausch C_H abgesehen, befreit von den hydrostatischen Bedingungen. Es liegt also nahe, annehmen zu dürfen, dass (1′) auch in unserem Falle gilt. Das soll im folgenden nach thermodynamischen Betrachtungen der Konvektionsvorgänge bewiesen werden.

Es werde angenommen, dass *das Turbulenzelement während seiner Bewegung immer die adiabatische Bedingung erfüllt* und man den Strahlungsdruck vernachlässigen kann. Nun fassen wir in der Sonnenatmosphäre zwei horizontale Schichten L_1, L_2 ins Auge, deren vertikale Entfernung l ist. Es seien T_1, T_2; p_1, p_2; S_1, S_2 beziehungsweise die mittleren Temperaturen, die Gasdrucke und die spezifischen Entropien je in L_1, L_2. Die in der Zeiteinheit von L_1 zu L_2 durch Turbulenz zu

1. Vgl. H. Siedentop f. A. N. **247** (1933) 304.

übertragende Gasmasse muss der entsprechenden Gasmasse in der entgegengesetzten Richtung gleich sein. Wir bezeichnen deise Masse mit m und wollen uns einen thermodynamischen Zyklus denken, welcher besteht in :— 1. Die Masse m stehe zunächst in einem Zustande (T_1, p_1, S_1); sie dehne sich durch Übergang $L_1 \rightarrow L_2$ adiabatisch aus, und p_1, T_1 werden p_2, T_1'. 2. Vom Zustande (T_1', p_2, S_1) werde sie durch Mischung unter konstantem Druck p_2 in den der Schicht L_2 eigentümlichen Zustand (T_2, p_2, S_2) gebracht. 3. Vom Zustande (T_2, p_2, S_2) werde eine Gasmenge von derselben Masse m adiabatisch durch Übertragen von L_2 zu L_1 in den Druck p_1 zusammengedrückt, dabei werde ihre Temperatur T_2'. 4. Schliesslich werde sie durch Mischung unter konstantem Druck p_1 in den Anfangszustand (T_1, p_1, S_1) gebracht. Dann lässt sich die während dieses Zyklus von aussen zugeführte Wärmemenge durch den Flächeninhalt im Entropie-Temperatur-Diagramm, $\int TdS$, geben. Daher folgt sogleich für die Gesamtzunahme pro Zeiteinheit der turbulenten Energie in hinreichend grossem Volumen V der Ausdruck:

$$\sum m(T_1'-T_1)(S_2-S_1)=\sum ml^2\left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad}\frac{dS}{dz}, \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

bis auf die kleinen Glieder von höherer Ordnung, wobei sich die Summe auf die Paare der gegeneinander die Masse austauschenden Schichten in V bezieht. Bezeichnet man mit C_H den räumlichen Mittelwert von $\sum ml^2$, so erhält man schliesslich aus (2), als die Zunahme der turbulenten Energie pro Zeiteinheit pro Einheitsvolumen, $C_H\left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad}\frac{dS}{dz}$, was nichts anderes als der *Richardson*sche Ausdruck in Form (1′) ist.

§ 2. Im vorhergehenden Paragraphen haben wir bewiesen, dass der *Richardson*sche Ausdruck auch in der Sonnenatmosphäre zu brauchen ist. Jetzt ist man imstande, die *Rossby*sche[1] Differentialgleichung für die Energie der Turbulenz auf die Sonnenatmosphäre anzuwenden. Die Gleichung lautet bei dem stationären Zustand:

$$C_M\Gamma+C_H\left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad}\frac{dS}{dz}+\frac{d}{dz}\left(C_E\frac{dE}{dz}\right)-f\rho E=0,^{2} \qquad (3)$$

---

1. C. G. Rossby. loc. cit. 2. Bei nicht-stationärem Zustande wird noch allgemeiner $\rho\frac{DE}{Dt}$ auf der rechten Seite, und $p_t\frac{D\rho}{\rho Dt}$ auf der linken Seite eintreten, und die allgemeine Energiegleichung wird infolgedessen von der Form $\rho\frac{D}{Dt}(E+U)=(p+p_t)\frac{D\rho}{\rho Dt}+C_M\Gamma+\frac{\partial}{\partial z}\left[C_E\frac{\partial E}{\partial z}+C_H T\frac{\partial S}{\partial z}-H\right]$ sein, wobei U die innere Energie des Gases, p_t der turbulente Druck und H der Strahlungsfluss ist.

worin $\Gamma = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)^2$ und E die Turbulenzenergie pro Einheitsmasse ist. Das erste Glied der linken Seite von (3) bedeutet einen Bruchteil der kinetischen Energie der mittleren Bewegung (in (3) nur horizontale Bewegungen ($\bar{u}$, $\bar{v}$) angenommen), der in Zeit- und Volumeneinheit durch die turbulente Reibung in turbulente Energie umgewandelt wird; C_M ist hier der Koeffizient der turbulenten Reibung. Das dritte Glied lässt sich der Diffusion der Turbulenzenergie zuschreiben, nämlich der durch eine horizontale Einheitsfläche strömenden Turbulenzenergie, $-C_E \frac{dE}{dz}$: Hier ist C_E auch ein zu C_H, C_M analoger Koeffizient, aber nicht wesentlich gleich jedem von beiden. Das letzte Glied bedeutet denjenigen Bruchteil der Energie, die in Zeit- und Volumeneinheit durch die molekulare Viskosität in Wärme verwandelt wird. Für f hat Richardson den Ausdruck $f = \frac{2\nu\pi^2}{\rho\sigma^2}$ gegeben, worin ν die molekulare Viskosität, σ die lineare Dimension des Turbulenzelementes ist. Bezeichnet man mit v das spezifische Volumen, so wird das Differential der spezifischen Entropie durch

$$dS = \frac{C_p}{T} dT - \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p dp \qquad \text{(4)}$$

gegeben. Für die adiabatische Änderung ergibt sich

$$\frac{C_p}{T}\left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad} = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \frac{dp}{dz}. \qquad \text{(5)}$$

Aus (3) folgt, (4) und (5) berücksichtigend,

$$C_M \Gamma + C_H \frac{R}{\mu} \frac{dp}{p\,dz}\left\{1 - \frac{T}{\mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_p\right\}\left\{\frac{dT}{dz} - \left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad}\right\} - f\rho E$$
$$= -\frac{d}{dz}\left(C_E \frac{dE}{dz}\right), \qquad \text{(6)}$$

worin μ das mittlere Molekulargewicht bedeutet. Wir wollen nach Rossby die durch den in der linken Seite dieser Gleichung stehenden Ausdruck gegebene Grösse „Wirbelproduktivität" nennen[1].

§ 3. Wir wollen nunmehr die in den vorhergehenden Paragraphen ermittelten Formeln auf die Sonnenatmosphäre sowie die unmittelbar darunter liegenden Schichten anwenden, angenommen, dass sie sich im mechanisch-thermodynamischen Gleichgewicht befinden. Die Temperaturverteilung wird dabei, wie in §. 1 erwähnt, in erster Annäherung

---

1. Bei Rossby soll man unter „Wirbelproduktivität" anstatt diesen Grösse ihr Verhältnis zu E verstehen.

durch das Strahlungsgleichgewicht bestimmt. Bezeichnet man mit T_0, τ, p_t die Grenztemperatur, die optische Tiefe und den turbulenten Druck, und nimmt man den Absorptionskoeffizienten k als konstant an, so ergeben sich

$$T^4 = T_0^4\left(1 + \frac{3}{2}\tau\right), \quad \frac{dp}{dz} = -\beta\rho g, \quad p + p_t = \frac{g}{k}\tau, \quad \text{wo} \quad \beta \equiv \frac{dp}{dp + dp_t}. \qquad \text{(7)}$$

Da der turbulente Druck mit der Turbulenzenergie in Relation $p_t = \frac{2}{3}\rho E$ steht, folgt aus (7) sofort $\rho = \frac{g/k}{\frac{R}{\mu}T + \frac{2}{3}E}\tau$, und demgemäss ergibt sich als der Temperaturgradient

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{\mu}{R}\beta' g \frac{T^4 - T_0^4}{4T^4}, \qquad \beta' \equiv \frac{p}{p + p_t} = \frac{\frac{R}{\mu}T}{\frac{R}{\mu}T + \frac{2}{3}E}. \qquad \text{(8), (9)}$$

In unserem Falle lässt sich die Gleichung (6) wegen (5), (7) und (8) umschreiben:

$$C_H \frac{\mu\beta^2 g^2}{RT}\left(1 - \frac{T}{\mu}\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_p\right)\left(\frac{\beta'}{\beta}\,\frac{T^4 - T_0^4}{4T^4} - n\right) + \frac{d}{dz}\left(C_E \frac{dE}{dz}\right) = 0,^{1} \qquad \text{(10)}$$

worin ist: $$n = \left(\frac{d\log T}{d\log p}\right)_{\text{adiabatisch}} = \frac{p}{C_p}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p. \qquad \text{(11)}$$

Setzt man nun $$\frac{\mu\beta^2 g^2}{RT} \equiv \alpha^2, \quad \phi \equiv \frac{\psi}{\alpha^2} \equiv \left\{1 - \frac{T}{\mu}\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_p\right\} \times \left\{\frac{\beta'}{\beta}\,\frac{T^4 - T_0^4}{4T^4} - n\right\}, \qquad \text{(12)}$$

---

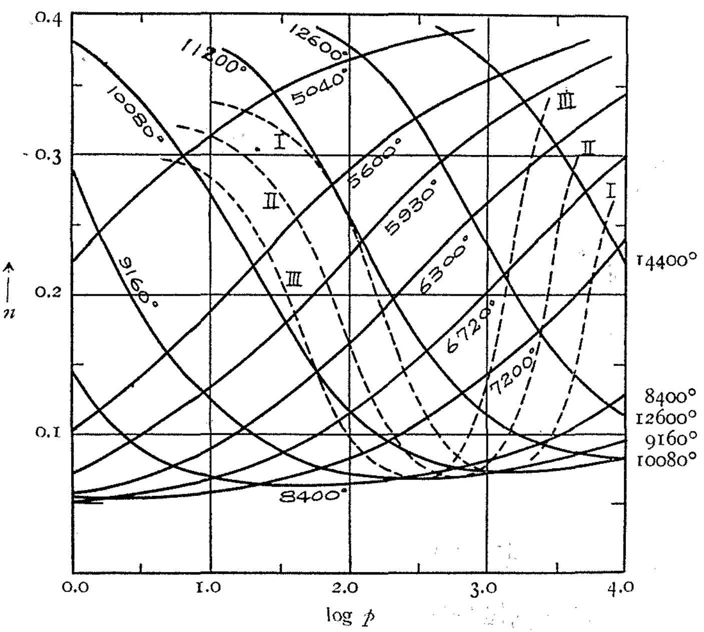
1. In der Gleichung ist die durch molekulare Viskosität zu dissipierende Turbulenzenergie vernachlässigt. Die Richtigkeit solcher Annäherung ist in folgender Weise zu verifizieren: Man vergleiche grössenordnungsmässig das Glied $f\rho E$ mit dem zweiten Gliede $C_H\left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad}\frac{dS}{dz}$ der linken Seite von (3) oder mit (1). Mit $g \doteq 3\times 10^4$, $T \approx 10^4$, $\rho \approx 10^{-8}$ und $\sigma \approx 10^7$ (was der linearen Dimension von kleiner Granulation entspricht) erhält man dann nach dem Ausdruck für f, $\frac{f\rho E}{C_H\left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad}\frac{dS}{dz}} \approx \bar{v}\times 10^{-8}$, dabei den *Prandtl*schen Ausdruck für den Austausch berücksichtigend, nämlich $C_H \approx \rho\bar{v}\sigma$ ($\bar{v}$ = die mittlere Geschwindigkeit der turbulenten Bewegungen). Aus der Grössenordnung 10^6 von $\bar{v}$ (vgl. §. 4), folgt dann die Richtigkeit unserer Annahme für die Sonnenatmosphäre.

so erhält man $$C_H\phi + \frac{d}{dz}\left[C_E\frac{dE}{dz}\right] = 0, \qquad \text{.........(13)}$$

worin das erste Glied in der linken Seite die „Wirbelproduktivität" der Konvektion gibt. In einem und demselben Turbulenzelemente ändern sich freilich der Druck, die Temperatur und der Ionisationsgrad, und zwar verschieden in ihren Änderungen für verschiedene Örter, wegen der verschiedenen Bedingungen der Umgebung. Entsprechend ändern sich $n = \left(\frac{d\log T}{d\log p}\right)_{ad}$ und μ, daher auch ϕ mit der Tiefe. Wir wollen also zunächst die Werte von ϕ als Funktion der optischen Tiefe berechnen.

Wir wollen annehmen[1], dass die Sonnenatmosphäre der Einfachheit halber nur aus einem einzigen Gase, Wasserstoff, besteht. Es seien x, χ der Ionisationsgrad und das Ionisationspotential (13.54 Volt). Dann erhält man nach der *Saha*schen Formel, $\log\frac{x^2}{1-x^2}p = \frac{5}{2}\log T - \frac{\chi}{\varkappa T} + C$ worin $\varkappa$ die *Boltzmann*sche Konstante und C die chemische Konstante für das Elektron bedeutet,

Fig. 1



1. Vgl. z. B. Anm. in S. 305.

$$1-\frac{T}{\mu}\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_p=1+\frac{1}{2}x(1-x)\left(\frac{5}{2}+\frac{\chi}{\varkappa T}\right), \quad (14)$$

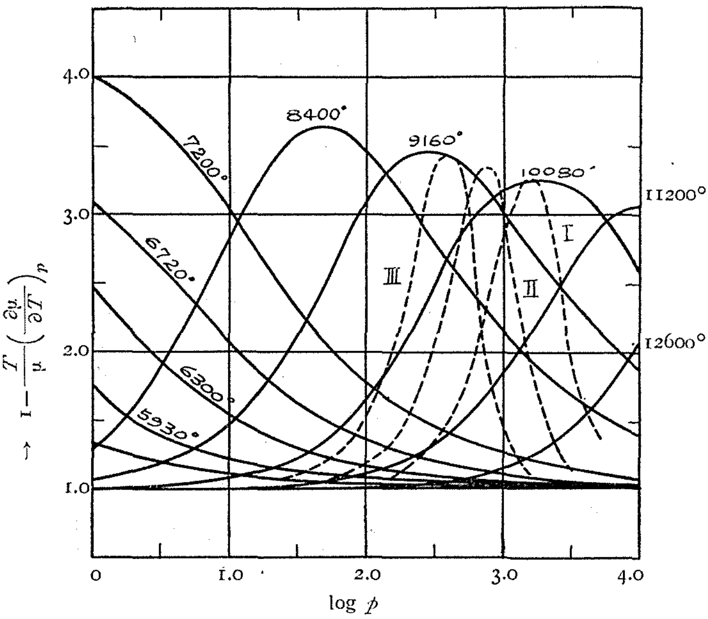
berücksichtigt, dass das mittlere Molekulargewicht umgekehrt proportional zur Gesamtzahl der unabhängigen Partikeln sein muss.

Andererseits, von dem Ausdruck für die Entropie der Mischung von neutralen Atomen, Ionen und Elektronen ausgehend, hat Unsöld[1] einen Ausruck für n abgeleitet:

$$n=\frac{2+x(1-x)\left(\frac{5}{2}+\frac{\chi}{\varkappa T}\right)}{5+x(1-x)\left(\frac{5}{2}+\frac{\chi}{\varkappa T}\right)^2}. \quad ....(15)$$

In Fig. 1, 2 sind n und $1-\frac{T}{\mu}\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_p$ als Funktion von T und p veranschaulicht.

Fig. 2

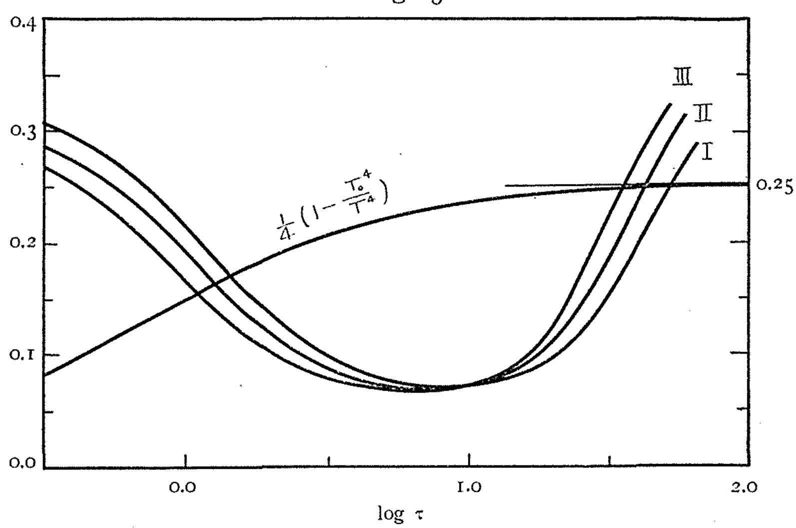


Nun ergibt sich aus (7), (9), $p=\frac{g\beta'}{k}\tau$. Mittels dieser Relation und (7) lassen sich p, T als Funktion der optischen Tiefe bestimmen,

1. A. Unsöld loc. cit.

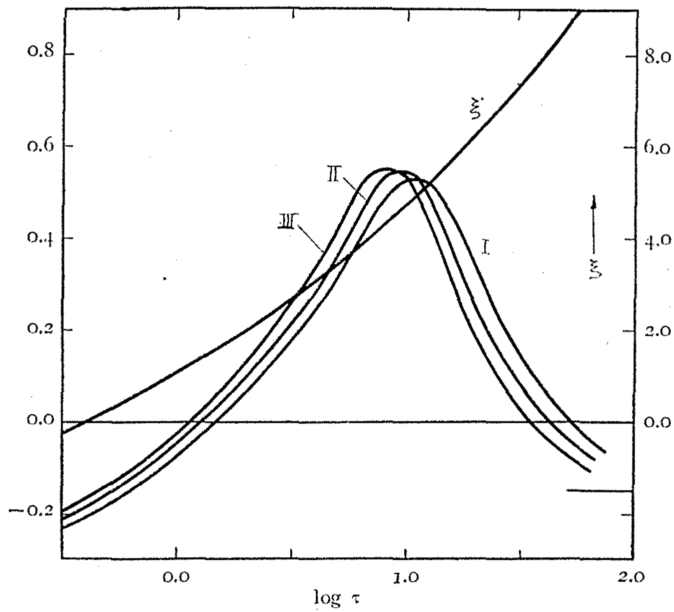
und man ist jetzt imstande, die Werte von n, $1-\frac{T}{\mu}\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_p$ in der Sonnenatmosphäre aus Fig. 1 und 2 als Funktion von τ abzulesen. Zu diesem Zwecke hat man aber zunächst den Wert von β' zu kennen, der seinerseits erst dann errechnet werden könnte, wenn man das Problem gelöst hätte. Wir dürfen aber als einen für unser Problem geeigneten Wert von β' in erster Annäherung den mittleren Wert derselben in der *wirbelerzeugenden Zone* annehmen, weil die Wirbelproduktivität eine viel wichtigere Rolle im Probleme als die entgegengesetzte Wirkung in den beiden wirbelkonsumierenden Zonen spielt. Die gestrichenen Kurven I, II, III in Fig. 1 und 2 entsprechen den Verläufen von T, p in der Sonnenatmosphäre, respektive für $\frac{k}{\beta'}=200$, 350, 600 ($T_0=4830°$ gesetzt). In Fig. 3 sind n und $\frac{1}{4}\left(1-\frac{T_0^4}{T^4}\right)$ als Funktion von

Fig. 3



τ dargestellt. Setzt man näherungsweise $\beta=\beta'$, so kann man sogleich den zweiten Faktor von ϕ aus der Abbildung abschätzen. Dabei ist zu bemerken, dass das Gebiet, wo die n-Kurve oberhalb der $\frac{1}{4}\left(1-\frac{T_0^4}{T^4}\right)$-Kurve liegt, der wirbelkonsumierenden Zone entspricht, und sonst der wirbelerzeugenden Zone. Schätzt man weiter den ersten Faktor aus Fig. 2 ab, so kann man schliesslich den Wert von ϕ als Funktion

Fig. 4



von τ berechnen. Die Ergebnisse der Berechnungen sind in Fig. 4 veranschaulicht. Der Wert von z in der wirbelerzeugenden Zone wird nach Integration von (8) gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} &\text{Konst.} - z = \frac{RT_0}{\bar{\mu}\bar{\beta}'g}\xi \\ &\xi = \frac{4T}{T_0} + \log_e \frac{T-T_0}{T+T_0} - 2\tan^{-1}\frac{T}{T_0} \end{aligned}\right\}, \qquad \dots(16)$$

worin $\bar{\mu}$, $\bar{\beta}'$ den mittleren Wert von μ, β' in der wirbelerzeugenden Zone bedeutet. Die Kurve von ξ ist in Fig. 4 gegeben. Wenn man mit $\Delta\xi$ die Differenz der beiden Werte von ξ, für die ϕ verschwindet, bezeichnet, so gibt $\frac{RT_0}{\bar{\mu}\bar{\beta}'g}\Delta\xi$ die lineare Dimension der wirbelerzeugenden Zone. Auf diese Weise erhalten wir folgende Ergebnisse :—

Tabelle 1.

Mittlere Temperatur	Mittelswert von ϕ	$\Delta\xi$
10000	0.27	7.1 für $\frac{k}{\beta_1}=200$
9700	0.27	6.8 für $\frac{k}{\beta_1}=350$
9400	0.27	6.5 für $\frac{k}{\beta_1}=600$

Wie die Tabelle zeigt, bewirken β' und k keinen wesentlichen Einfluss auf $\Delta\xi$ und die mittleren Werte von ϕ, T. Wir wollen demgemäss in folgenden Betrachtungen nur von dem Werte für $\frac{k}{\beta'}=350$ Gebrauch machen. In der unteren konsumierenden Zone, deren lineare Dimension, wie wir später sehen werden, grösser als die der erzeugenden Zone ist, setzen wir als mittleren Wert von ϕ den Grenzwert -0.15 voraus, gegen den ϕ dort sehr schnell konvergiert; in der oberen konsumierenden Zone, dagegen $\phi \doteq -0.3$, die Ionisation der anderen Metallatome als Wasserstoff auch berücksichtigend (vgl. Fig. 4). Um nun die Werte von ψ aus $\psi=\alpha^2\phi$ zu berechnen, hat man die Werte von α^2 zu kennen, deren mittlere Werte in der erzeugenden und in der unteren bzw. oberen konsumierenden Zone[1] seien jeder für sich α_0^2, α_1^2, α_2^2. Es genügt aber zu unserem Zwecke nur die Verhältnisse α_1^2/α_0^2, α_2^2/α_0^2 zu berechnen. Um diese Verhältnisse abzuschätzen, gehen wir folgendermassen vor:—Nach dem *Russell*schen Resultat[2] in bezug auf die Komposition der Sonnenatmosphäre erhält man leicht nach einer Reihe von einfachen Rechnungen $\mu=2.0$, für die obere konsumierende Zone, wo die Ionisation des Wasserstoffes zu vernachlässigen ist, $\mu=1.0$ für die untere konsumierende Zone, wo dieser Vorgang fast vollständig ist, und $\mu=1.4$ für die erzeugende Zone, wo $x=0.5$ angenommen ist. Wir nehmen weiter als die mittlere Temperatur vorläufig 20000°, 9700°, 5500° für die betreffenden Zonen an, und setzen, die späteren Resultate vornehmend, $p \gtrsim p_t$ also $\beta'=\frac{1}{2}$ für die erzeugende Zone, $p \gtrsim 2p_t$ also $\beta'=\frac{2}{3}$ für die obere konsumierende Zone und $\beta'=1$ für die untere konsumierende Zone, wegen ihrer hohen Temperatur. Mit diesen Werten erhält man dann aus (12), $\alpha_1^2=1.4\alpha_0^2$, $\alpha_2^2=4.5\alpha_0^2$.

§ 4. Die Koeffizienten C_H, C_E hängen wohl nicht nur von der Turbulenz, sondern auch vom mittleren Zustande des Gases ab. Wir setzen aber auch der Einfachheit halber voraus, dass sie eine Funktion nur von der Turbulenzenergie, E, sind, damit man die Differentialgleichung (13) sogleich integrieren kann. Obgleich man keine genaue Kenntnis über diese Funktionalform hat, liegt es doch nahe, dass sie sicher in dem Punkte verschwinden müssen, wo E verschwindet, und mit E monoton zunehmen müssen. Also können wir nach Rossby ihre Pro-

---

1. In folgenden machen wir auch bei anderen Grössen von den Suffixen 0, 1, 2 Gebrauch, um diese drei Zonen zu kennzeichnen. 2. H. N. Russell. Ap. J. **70** (1929) 11.

portionalität zu E annehmen, falls E hinreichend klein ist. In der Sonnenatmosphäre wird die Turbulenz vielleicht viel gewaltiger als in der Erdatmosphäre sein. Es mag also auch möglich sein, noch allgemeiner vorauszusetzen, dass sie zu der s-ten Potenz von E proportional seien. In solchen Fällen kann die Differentialgleichung (13) mit Hilfe einer Funktion, $\int_\zeta^1 \frac{\zeta^s}{\sqrt{1-\zeta^{2s+1}}}d\zeta$, ganz auf dieselbe Weise wie im Falle, C_H, C_E=konst., gelöst werden. Wir wollen im folgenden beispielsweise nur den letzteren Fall genau untersuchen. Aus (13) folgt dann

$$\frac{d^2E}{dz^2}+\frac{C_H}{C_E}\psi=0, \qquad \text{.........................(17)}$$

oder integriert, mit Integrationskonstanten A und B,

$$E=-\frac{C_H}{2C_E}\psi z^2+Az+B. \qquad \text{..................(18)}$$

Es ist selbstverständlich, dass E in einem gewissen Punkte in der wirbelerzeugenden Zone einen Maximumwert E_0 erreicht. Misst man von diesem Punkte die Höhe z, so ergibt sich aus (18)

$$E=-\frac{C_H}{2C_E}\psi_0 z^2+E_0 \qquad \text{für} \qquad h_2\geqq z\geqq -h_1, \qquad (19)$$

worin h_1, h_2 die absoluten Beträge von z für die untere bzw. obere Grenze der erzeugenden Zone bedeuten. Sind $-H_1$, H_2 die Höhe der unteren bzw. oberen Grenze der ganzen durch die Turbulenz zu beherrschenden Zone, so lautet (18) für die konsumierenden Zonen:

$$\left.\begin{aligned} E&=-\frac{C_H}{2C_E}\psi_1(H_1+z)^2 \qquad \text{für} \qquad -H_1\leqq z\leqq -h_1 \\ E&=-\frac{C_H}{2C_E}\psi_2(H_2-z)^2 \qquad \text{für} \qquad H_2\geqq z\geqq h_2 \end{aligned}\right\}. \qquad \text{......(20)}$$

Da die Turbulenzenergie E und ihr Gradient für $z=-h_1$, und h_2, sowohl aus (19) als auch aus (20) berechnet, dieselben Werte haben sollen, ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} &\frac{h_1}{\sqrt{\frac{-\psi_1}{\psi_0-\psi_1}}}=\frac{h_2}{\sqrt{\frac{-\psi_2}{\psi_0-\psi_2}}}\equiv K, \qquad E_0=\frac{C_H}{2C_E}\psi_0 K^2 \\ &h_1H_1=h_2H_2=K^2, \qquad 2H\equiv h_1+h_2 \end{aligned}\right\}. \qquad (21)$$

Hieraus sieht man, dass alle Höhen nicht von den Koeffizienten C_H, C_E, sondern von den Verhältnissen ψ_1/ψ_0, ψ_2/ψ_0 und der Höhe der erzeugenden Zone $2H$ abhängig sind. Das ist, es sei hier bemerkt, bei willkürlicher Wahl von s auch der Fall.

Wie schon oben erwähnt, können die Berechnungen bei den allgemeinen Fällen $s \neq 0$ auf dieselbe Weise durchgeführt werden. Die Ergebnisse der Berechnungen für $s=0, 1, 2, 3$ sind in Tabelle 2 zusammengestellt, in der $\zeta_1 = \frac{(E)_{z=-h_1}}{E_0}$, $\zeta_2 = \frac{(E)_{z=h_2}}{E_0}$ ist.

Tabelle 2.

s	ζ_1	ζ_2	h_1/H	h_2/H	H_1/H	H_2/H	H_1+H_2/H	F_0
0	0.56	0.17	0.84	1.16	1.9	1.4	3.3	0.8
1	0.83	0.55	0.79	1.21	4.3	2.4	6.7	2.0
2	0.89	0.70	0.78	1.22	6.7	3.3	10.0	3.1
3	0.92	0.78	0.78	1.22	9.2	4.3	13.5	4.3

F_0 ist die Maximalturbulenzenergie, in Einheiten von $\frac{C_H}{C_E}\phi_0 H^2$ gemessen. Für E_0 folgt also wegen (12), (16) der Ausdruck:

$$E_0 = \frac{C_H}{C_E}\phi_0 F_0\left(\frac{\Delta\xi}{2}\right)^2 \frac{RT_0^2}{\mu\bar{T}}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(22)$$

worin $\bar{T}$, die mittlere Temperatur in der erzeugenden Zone bedeutet. Da die Koeffizienten C_H und C_E von derselben Grössenordnung sind, darf man annäherungsweise $C_H/C_E=1$ setzen. Mittels der Tabelle 2 und (22) erhält man dann:

s	0	1	2	3
$E_0 \times 10^{-11}$	3.5	8.9	14	19
$\bar{v}_{max} \times 10^{-5}$	8.4	13	17	19

Diese Tabelle zeigt, wie sich die Turbulenzenergie nach dem anzunehmenden Gesetz (s) in bezug auf den Massenaustausch ändert. Wenn man mit Rossby $s=1$ setzt, so beträgt die maximale mittlere Geschwindigkeit der Turbulenz $\bar{v}_{max}$ etwa 13 km/sec. Wenn ein grösserer Wert von s als wahrscheinlicher bei der Sonnenatmosphäre gilt, so wird $\bar{v}_{max}$ grösser als 13 km/sec. Nun mit $T=9700°$, $\mu=1.4$ ist $\frac{R}{\mu}T$ gleich 5.7×10^{11} c.g.s. für die wirbelerzeugende Zone. Andererseits erhält man, aus den Werten von ζ_1, ζ_2 in Tabelle 2, die mittlere Turbulenzenergie $\doteq 7.6\times10^{11}$ c.g.s., für $s=1$ und 1.2×10^{12} für $s=2$. Hieraus folgt $\beta' \doteq 0.5$ und 0.4 für $s=1$ bzw. 2, welche wir im vorhergehenden Paragraphen bei der Abschätzung von a_1^2/a_0^2, a_2^2/a_0^2 vornahmen. Mit diesen Werten von β' berechnet, kann man schliesslich sagen, dass ungefähr die Hälfte der oberhalb der betrachteten Schicht liegenden Gesamtmasse durch den Turbulenzdruck getragen wird. Alle in Tabelle 2 gegebenen Höhen sind in Einheiten von der Halbdicke der wirbelerzeugenden Zone, nämlich $H = \frac{\Delta\xi}{2} \frac{RT_0}{\bar{\mu}\beta' g}$ ausgedrückt. Diese letztere beträgt 7.9×10^7 cm, mit $T_0 = 4830^\circ$, $\mu = 1.4$, $\beta' = 0.45$, $\Delta\xi = 6.8$. Demgemäss erhält man als die Gesamtdicke der turbulenten Zone 5300, 7900 km für $s = 1$ bzw. 2. Wir finden also in der Sonnenatmosphäre die Möglichkeit des Vorhandenseins einer turbulenten Zone von ziemlich grosser linearer Dimension, etwa 7000 km, deren obere Grenze wohl in der Chromosphäre[1] liegt. Es mag auch möglich sein, die beobachteten Turbulenzbewegungen in der Chromosphäre auf solche wirbelerzeugende Zone, die man üblich *Konvektionszone* nennt, zurückzuführen.

Zum Schluss ist es mir eine angenehme Pflicht, Herrn Prof. Dr. Toschima Araki für seine ständige Leitung bei der Durchführung dieser Arbeit und Herrn Prof. Dr. Tadao Namekawa für seine wertvollen Bemerkungen meinen herzlichen Dank auszusprechen.

Kyoto, Institut für Astrophysik, Juli, 1935.

---

1. Auf die Chromosphäre ist die Differentialgleichung (3) nicht ohne weiteres anzuwenden, denn wegen der ausserordentlich dünnen Dichte wird solche hydrodynamische Betrachtung, wie hier gemacht, nicht mehr gelten.