

特異性の概念は近代数学へ如何に寄与したか (II)

— 特異性問題に関する近代数学の発展・形成 : 1880-1940s —

芝浦工業大学システム工学部 阿部剛久 (Takehisa Abe)

Faculty of Systems Engineering, Shibaura Institute of Technology

チュービンゲン大学数学研究所 グレゴール・ニッケル (Gregor Nickel)

Universität Tübingen, Mathematisches Institut

序. 本課題 (I) は早くから発表されていた ([1]) にもかかわらず、続編 (II) は 2, 3 の事情から今日まで未発表のままであったが、前回の研究集会での講演 (I) ([2]) を機会に引き続いてここにその (II) の発表に至ったことで、その実現を大いに幸いとするとともに、その場たる研究集会「数学史の研究」に謝意を表したい。

さて、振り返れば、第一著者にとってこのようなテーマを選んだ経緯はその動機とともに報告[2]に述べた通りであるが、当時30代後半の意気込みから実に遠大な計画をもくろんだものだと思う。その至難さは早くも本論 (II) の調査研究途上に既に出始めた感があった。多分野にまたがる問題意識、概念およびそれらの進展状況の理解と把握、加えて原著文献の検索収集作業に基づく事項や事実の検証等、骨の折れる仕事が続く。この課題を数学としてのみ研究するのであれば数学史学に相応しいものとは成り難いであろうし、因果性に重点を置く歴史的観点からの叙述は重要であっても、数学的内容の変化や発展形成の本質的段階に至る説明が可能なものでなくては平凡な数学史に終わるだけである。また歴史的なドラマを求めることは時として興をそそるかもしれないが、これは見る者の感性に依存する面もあり、そう度々出会うものでもなく、学術的史観と異なる次元のものであろう。要するに、ほどよく調和を保った数学とその歴史的推移、そしてできれば、これらを一体として見据えることの可能な哲学的視野を備えていることが望ましい。これは他の学術史と同様、人類の歴史、社会、文化において数学の目指すもの、その役割、そしてその位置付けの評価に繋がるであろうし、同時に未来への展望を可能にしてくれるであろうと期待したい。このことはまた、数学にとって永遠の課題でもある。本研究はこのような考えが多少とも反映されることを願っている。幸いにも第一著者は、数学者として、また科学の哲学思想面にも活躍中の若き気鋭の第二著者の協力を得て本研究を一層推進させる方向へもってこれたことを心から喜んでいる。本課題の調査対象は今後更に飛躍的に増加の一途を辿ることが予測され、関心を寄せる人々の参加と協力を期待したい。

ところで、本テーマの叙述を本格的に展開するとすれば、膨大な著述となろうことが予想される。本編 (II) を例にとれば、特異性の概念に関する数学の分野は初期のそれらに関連したもの、新しく勃興したもの、応用関係のもの等、それぞれは複数の分野から成り、およそ70年間の歴史を彩る内容であるから、これらを集大成すればシリーズ本の類となろう。しかし著者たちはこのようないつ果てるとも知れない仕事の遂行は夢見てはいないし、望むべくもないことである。将来この方面に深い関心を抱く人々によってこの完璧な仕事が達成されることを願っている。

今回の概略を述べる前に S.Bochner の論文[3]との関わりを述べておきたい。彼の論著はこの課題の原点に位置することは前回の[2]の序の終わりの部分に記したが、そのテーマ (I) の数学的内容に関しては彼の主張にほ

ほ全面的に従っている。これはその実証的な考察を通してであり、補足的事項を加えたものとなっている。また、これらの背景をなす社会的・文化的思潮と数学史の動向に関する考察は Bochner における不連続観(第一著者の造語)の導入に端を発しているが、彼の議論は当初においてのみであり、テーマ (I) と (II) を通して本課題の発展と思想の変遷やこれら相互の関係への歴史的考察は著者たちによる。特に、本編 (II) におけるその後の特異性概念の数学的内容は論文[3]においては全くといっていいほど触れられていない。それは彼の論文の趣旨が著者たちのものとは異なるからであり、著者たちの目指す課題の展開が目的ではなかったことは言うまでもない。このような次第で、Bochner の論著は我々の課題への契機を与えてくれたが、その影響は報告[2]までであり、今回の (II) 以後からは本研究が著者たちの独自の調査と考証に基づくものであることを予めお断りしておく。

終わりに今回のテーマ (II) の概略を述べておきたい： これに先立つ講演において既にその概要 ([4]) が示されたが、ここではこれを更に要約した上で補足を含む本テーマの内容を説明しよう。最初に先のテーマ (I) の要約を行う。それは B.Riemann, A.Cayley, H.Hankel および K.Weierstrass による初期の特異性概念に関する主要事項のまとめに始まり、これ等の概念が興った歴史的背景をそれ以前のドイツを中心とするヨーロッパの社会的、文化的思潮と当時の数学の内部志向を説明することによって、その発生の要因と必然性を理解しておきたい。次がこのテーマ (II) の本論である。初めにその後の特異性に関する数学の進展が主要なテーマである。先ず、初期の特異性概念に関連した問題の発展、次いで新しい概念や問題の起こりとその展開、そして20世紀へかけての新分野の形成に至る過程を概観する。またこれ等の結果が応用方面へ貢献した成果を2、3の代表例によって見ることになる。続いて、特異性概念の一般化とする不連続性に対する見方、ここでは「不連続観」と呼ぶが、その歴史的変遷に触れ、不連続性の概念が数学や科学、更には一般の世界においてもつその意義の重要性と連続性の概念に対等な価値を不連続観の確立を通して理解されよう。特に、連続性と不連続性の矛盾した価値の二面性を備える対象の統一的な認識の方法について言い添えておきたい。最後にこの (II) 部の最終章として、これまでの内容を可能な限り今後に関わる形で要約し、予定された最終のテーマ (III) へ向けて展望を試みる。

以上が本論 (II) の内容である。紙数の制限もあって、70年間にわたるその多彩な歴史を決して十分に述べきれものではないから、叙述は簡潔を旨として、必要にして最小限の数式を除いて複雑または煩雑なもの、説明に手間どるもの等は省略し、できるだけ専門用語の使用と通常言葉による説明を試みる。このような叙述は時として内容の理解を不透明にしかねないが、また一方で全体的な見通しを可能にしてくれる。ここでは前編 (I) と異なり、前者の欠点は多少やむを得ないと覚悟して後者の利点を重視したい。

1. (I) 部の要約

本論である次章2のために (I) 部の主要事項を先の報告 [2] に従ってまとめておく。なお詳細は論文 [1] にある。19世紀後半の初頭に始まる Riemann の特異点から、中葉にかけての Weierstrass の特異点に至るまでを初期の特異点とする。これ等の特異点をはじめ、後に見る多くの種類の特異点にはこれ等を生成起因とするそれぞれに固有の数学的な特異現象が考察対象に付随する。ここでは数学的对象の考察基盤である領域上のどの点でも対象に特に異常な、または他に比較して顕著な挙動特性が存在しなければ、このとき領域上の各点は通常点

(または非特異点)と呼ぶことにして、このような各点における事象を対象のもつ非特異現象と呼ぶことにする。これは極めて大雑把な言い方であるが、この真相を定性的に表現したものである。従って、この場合に当たらなければ、領域上にある点が存在してその点で対象に特異現象が生じることになる(詳しくは[2]を参照。また2章でも述べられる)。これ等が冒頭に述べた特異点(または非通常点)とそれに伴う特異現象を指す。このような特異点と特異現象を合わせて数学的对象のもつ特異性と呼ぶことにする。特異性の概念とは、種々の特異性をはじめ、これ等に関連した数学的知見および他の全ての分野においてこれ等の観点から説明可能な類似の諸概念の総称であるとした。このことは特異性の概念の普遍的存在をも強調するものである。また、特異点だけでなく、特異現象の考察は特に応用的見地から重視しなければならないであろう。

(1) 初期の特異性の概念：1850-1870年代

特異性の概念またはこれに関する問題は18世紀以前には今日まで全く文献上見出されていない。流体の運動、波動の伝播、天体の運動等、自然科学の中には特異現象の存在を既に察知し得たものがあつたと考えられるが((I)部、注1)、数学の未開発な状況下ではそれ等の適切な定式化が得られず、特異性に関する明確な意識をもつに至らなかったと言えよう。そのためには、特に関数概念の発展と微分方程式の扱いの進歩を必要とした。

1) **複素関数論的特異性(1): 1851** ((I)部、文献[7])。G.F.B.Riemann(1826-66)によって平面上のJordan閉領域を他の複素平面上の単位円板に等角的に写像する関数の存在理論が確立されたが、その際等角写像される領域を三つに分類し設定する。この設定に必要な事柄が特異点に関する定理(除去可能な特異点に対する関数の特異性の除去と正則化)に基づく結論(単葉等角写像における孤立特異点の孤立境界点への対応)を媒介とする。よって等角写像論の基本に位置するRiemannの写像定理を得るための数学的必然性から彼の特異点(除去可能特異点)が派生したと言うべきであろう。

注目すべきことは、Riemannは特異点“singularität”の語は使用せず、不連続点“unstetigkeit”の語を使用している。当時のドイツでは数理学において特異点や特異性の概念は未だ存在しなかったから、彼は連続の反意語としてここでは一般的な不連続の言葉を使用したのであろう。また後で述べる社会的、文化的背景の影響もあってこの言葉を用いざるを得なかったとも考えられる。

2) **代数幾何学的特異性: 1852** ((I)部、文献[8])。A.Cayley(1815-97)によって多項式よる平面代数曲線の特異点の分類とこれ等の呼称が与えられた。今日我々のよく知る二重点(または結節点)、その一般的な場合の重複特異点はその点で相異なる2本またはそれ以上の数の接線が存在する点であり、特殊な場合として孤立特異点や尖点も見出した。その他、微分幾何学的にも同様に呼ばれ、通常の微積分の書に見られる変曲点をそこでの接線と曲線との高次接触点と定めた。他にも、これ等の特別な場合の呼称とその点をもつ性質を与えている。このように彼は多項式のもつ特異性を幾何学的特性に還元してみせた。

Cayleyの場合は当時既に特異点“singularity”、“singular point”の語を用いていて、上述の各種特異点の英語呼称((I)部、pp.42-43)とともに現代へ引き継がれ、定着した。彼が当時活躍したイギリスには後述のドイツ的な観念の影響は無かったものと考えられる。

3) **測度論的特異性: 1870** ((I)部、文献[9])。F.M.C.Fourier(1772-1840)、P.G.L.Dirichlet(1805-59)以来、三角級数に端を発した関数概念の拡張は積分の基本に関する考察を促した。Riemann積分の可能性は不連続点の集合が稠密である関数に対しても成り立つことは当時既に知られていたが、H.Hankel(1839-73)はRiemannの三角級数に関するメモ((I)部、[9])から着想を得て、特異点の凝

縮の原理による稠密な不連続点集合をもつ関数の一般的構成と具体例を与えた上で、これ等の不連続関数の種別ごとの可積分性を検証した。今日ではこれ等は測度論の立場から容易に説明できる。しかし、ここで重要なこととは積分に寄与しない不連続点(の集合)を特異点(の集合)としていることであり、これまでの特異点と特異現象の考えからは全く異なった概念と言うべきである。これはまた実関数論的な特異性と呼んでよいだろう。

Hankelはこの特異点(の集合)を *singularität* (en) と呼んでいる。このことは Riemann 後 20 年近くを経て特異性の概念が少なくとも数学の世界に殆ど定着したことを示している。事実、分野別では代数幾何学が最初で次が複素関数論(1860年代)、そして実関数論の順となっている。

4) 複素関数論的特異性(2): 1876 (I) 部、[12]) . K.T.Weierstrass (1815-97) は Riemann とは異なる意味の特異性を複素関数論へ導入した。彼は一般に多価関数としての解析関数の冪級数表示から出発して解析接続の操作によって彼の関数論が展開された。その原理となるものは、解析関数を各部分領域で与えられた正則関数を要素として解析接続によって得られた要素全体としての正則関数と見なすことであり、それは一点の近傍で正則関数が冪級数に展開されると、一致の定理を通して達成されるということである。この方法に基づいて解析関数の収束域が決定されるが、その収束半径が ∞ である整関数を除いて一般の解析関数のそれは有限の大きさであり、収束域の境界である円周上の各点はその点からの解析接続は不可能の意味で特異点であり、境界そのものは自然境界として解析関数の存在領域の限界を示している。このような解析接続に伴う解析関数の特異性は一複素変数の場合に顕著な特性であるが、多複素変数の場合は前者と異なることが知られている。

以上は特異性に関する発端となった概念のあらましである。その後、それぞれに関連した概念や問題が出現するにおよんで初期の概念は、これ等とは異なって新たに発生した特異性の問題とともに、新しい展開の時代を迎えることになる。

(2) 歴史的背景と概念の形成要因

数学の発展と形成に影響した19世紀前半までのドイツおよびフランスを中心とする西欧諸国における歴史上の文化的環境(外部的要因)と特異性の概念に直結する近代数学の必然性(内部的要因)を前もって理解しておく。このことは19世紀後半以降の特異性の概念に対する見方(不連続観)の変遷と科学の認識に関する哲学的議論に繋がってくる。

1) 連続の思潮 — 外部的要因 — : 学術や芸術に関わる特に重要な要素は社会的文化的環境であることは言うまでもないが、数学や自然科学にとってもそれは例外でない。とりわけ特異性の概念はその発生期以前からの哲学的思想に相容れぬ存在であった。それはドイツとフランスに共通する精神的志向としての体系的認識の尊重と整合的なものへの信奉、すなわち無矛盾な体系的認識の獲得を目指すことへのアンチテーゼから来るものであった。体制的な理念と思想を象徴するものが I.Kant (1724-1804) 以来の1840年代におよぶ哲学で、その特性は観念的で形而上学的であり、統一的体系を志向し、その根底に理性への絶対的なまでの信頼を置く理想主義的思想の展開であった。特にドイツにおける観念論的な理想主義的思想はアカデミズム文化の長所と短所を合わせ持つて次第に西欧の思潮になり得ていった。この近代西欧諸国の哲学的思想にある主傾向をここでは仮に“連続の思潮”と呼ぼう。この思潮にあつて望まれる文化的傾向は正常性の尊重であつて、例外、変則、無秩序、破綻、破局等は許容されない存在であった。数学の世界では連続的なものが正常であつて、不連続的なものは前者の破綻であり、その存在は許されないものとして異端視される傾向にあつた。この傾向は学術一般の世界へも反映された。進化論、地質学、基礎物理学と化学等においては、離散的な認識の否定に基づく連続的観点か

らの現象の巨視的特性の研究が流行し、物質に関わる様々な分野では物質を連続媒質として扱った。特に電磁気学における J.C.Maxwell (1831-79) の理論は19世紀物理学の連続観の勝利であった。よって、このような連続の思潮は特異性概念の起こりと発展にとっては負となる外部的な最大要因であったと言える。

2) 近代数学の形成 — 内部的要因 — : 特異性の概念に直結する数学の内部的要因を明らかにしていく過程の分析的検証については論文[1]にその詳細がある。ここでは極めて簡潔に述べておこう。産業革命とその後の実利的体制の影響によって、当初は数理物理学が発展、やがて純粋科学が自立的に発展する中で新しい数学の芽生えとその進展により数学全般を流れる共通意識としての連続性の問題が新展開を見せてきた。このような近代数学の動向は一方で不連続観の胎生基盤の拡大を生み出す結果となったが、これは20世紀に入ってからの大局的な趨勢である。4人の創始者たちへ繋がるそれぞれの数学上の系譜(影響した人々の仕事の分析とその評価)から初期の特異性の概念に鋭く結びつく主要概念は Riemann の場合: 代数関数と Riemann 面、Weierstrass の場合: 代数関数と冪級数に基づく複素関数、Hankel の場合: Fourier 級数と不連続関数、Cayley の場合: 多項式と幾何学、であることを知る。そして各人に共通した問題意識は、関数とは何であるか、の問いであった。この問いこそが初期の特異性概念に対する数学内部からの必然的な形成要因に他ならない。

2. 本論 (II) の主要結果

本章において述べられることは、最初に初期の概念以後の特異性概念に関する諸問題の分野別展開、次に不連続観の正当化に関する歴史的過程の分析と連続性と不連続性の統一に関する哲学的見解である。この章は本論 (II) の核心部分であるが、紙数の制限があるから、豊富な話題に対して簡潔にしてかつ要を得た説明を試みたい。

(1) 初期以後の特異性概念の展開

以下、初期概念の系列を A、新概念の系列を B、応用系列を C によって示す。それぞれはいくつかの代表的な専門分野から成っている。

1) A: Riemann の系列にある複素関数論を R 系、Weierstrass の系列にあるそれを W 系と略記する。

複素関数論 (R 系): Riemann の除去可能特異点をはじめ、関数論における特異点の分類と呼称は代数幾何学に次いで1860年代にその整備を終えた。除去可能特異点はその点での関数値の無定義から生じるから改めて関数値を定義すれば関数は正則化され、極はその点に近づくほど関数値 $\rightarrow \infty$ 、真性特異点はその点の任意の近傍で関数が任意の値に近づく(精密化: Picard の大定理)という性質をもつ。これらの特異点に関わる数学の発展問題は主要なものだけでも、**■値分布論の一般化**: 値分布とは $f(z) = w$ となる z の分布の有様を意味する。超越整関数の場合 (1879: E.Picard \rightarrow 1896: E.Borel, 他) の拡張として、領域内で極だけを特異点とする有理形関数(有理関数は領域を全平面とする)の場合に対する理論は、R.H.Nevanlinna (1925) \rightarrow C.V.Ahlfors (1935) \rightarrow H.Weyl & J.Weyl (1943) 等によって基本的理論を確立。これに関連して **■有理形関数の逆関数問題の解決**: Ahlfors (1930-40) による解析接続、集積値集合に関する諸結果と並行して、**■集積値集合の理論の建設**: F.Iversen, W.Gross (1920) 以来、1940年代にかけて多数の人々(多くの日本人数学者を含む)の貢献による(\rightarrow 現在)。また他方で **■留数理論の開発的発展**: (A.Cauchy 以来の留数理論 (1814-25, 31) の応用的発展として、S.D.Poisson, C.G.J.Jacobi, A.M.Legendre 等 (1827-30) から D.F.Gregory (1837) を経て、) E.Rouché (1860)、E.Heine (1880)、M.C.Jordan (1

894)、E.Lindelöf (1905)、E.Goursat (1911) 等々による積分の評価式、実積分公式等種々の基礎公式の導出 → 多方面への応用：数学（特殊関数、楕円関数、微分方程式の解法、他）、物理学、工学、数値解析分野の諸公式の導出とそれらの実用的応用（→ 1940年代（→ 現在：本論（III））等を見る。

代数幾何学：Cayley 以後、特異性は代数曲線の重複点とその点における接線、その他の特異性とどまらず、代数曲面、一般の代数多様体へと拡張された。特に、特異点は多様体の生成イデアルの多項式による Jacobi 行列の階数 < 多様体の次元、となる点として定義される。このような特異点をめぐって、■特異点の解消または還元問題：平面代数曲線に対しては、M.Noether (1871) → F.Enriques (1894) → Enriques-O.Chisini (1915-24) によって、空間においては主に C.Segre (1897) によって解決。代数曲面に対しては、同じく Segre (1897)、他の人々の寄与があるが、この間のイタリア代数幾何学派の努力は目覚しく、特に複素数体上では Enriques、Chisini の他に、R.J.Walker (1935) の結果がある。一般の代数多様体に関しては、その還元問題の解決は容易でなかった。3次元までは標数 $p=0$ の場合、O.Zariski (1944) の成功がある ($p \neq 2, 3, 5$ の場合は S.S.Abhyankar (1956)、一般次元の $p=0$ の場合は H.Hironaka (広中平祐) (1964) の結果を待つのみであった → 本論 (III))。これらの問題は Riemann の思想 (Riemann 面による一意化) の代数幾何学的実現と見なされる。■特異点の位相的分類：特異点近傍の位相幾何学的性質による特異点の特徴付け等、系列 B に繋がる内容。平面代数曲線の場合、K.Brauner (1928)、E.Kähler (1929) に始まり、Zariski (1931) によって解決。代数曲面に対しては、初期位相幾何学に関する E.Picard-G.Simart (1897-1906) と S.Lefschetz (1924) の寄与に基づいて、その間、イタリア学派を代表する F.Severi 等の貢献もあって、最終的に Zariski (1948) によって解決を得た。一般の代数多様体に関しては系列 B に深く関係する。■代数積分論：代数曲線または Riemann 面の理論において、一変数の代数関数体の微分とその留数に関してはよく知られているが、代数曲面上の微分の積分 (代数積分)、特に第二種微分の重複積分の留数の消失に関する研究は Picard-Simart、H.Poincaré (1906)、Lefschetz によって、彼等の曲面の位相的結果 (積分のサイクルに関する) に基づいて行われた (代数積分の消失問題の代数多様体上への一般化は本論 (III) で触れられよう)。

実関数論：Hankel の意味の特異点 (の集合) は実関数の不連続点 (の集合) で、Riemann 積分に寄与しない (現代的に言えば Lebesgue 測度 = 0) 性質のものであった。このような研究に至った契機は、19世紀初め以降の関数概念の進展と実関数の深い研究の結果であった。よく知られているように、J.B.J.Fourier の不連続関数 $f(x)$ の三角級数表示 (1811) に対して、P.G.L.Dirichlet はその収束性を示した (1828) が、その際 $f(x)$ の Fourier 級数展開の係数を決定する積分公式における積分の可能性が問題であった。 $f(x)$ を区分的に単調、連続であるとしたことから更に広い部類の関数にかけてその問題を考えようとした。当時 '病理学的' とされた有名な Dirichlet の関数はこの時に彼が生んだものである。その後 Riemann によって再びこの問題が検討されることとなり (1854)、彼の定積分の可能性に関する検証は $f(x)$ の不連続点が至るところ稠密な集合にまでおよんでいる。その検証方法に基づいて定義された積分が今日呼ばれる Riemann 積分で、彼のこの研究はその後の実関数や集合の一層深い研究へと向かわせることになる。この分野の歴史は劇的であったから少し詳しく展望しよう。■Riemann 積分に関連した継続的研究：P.du Bois-Reymond (1871, 75) の他に 1870年代の Weierstrass、U.Dini の研究があるが、G.Cantor は自身の手によって創始された集合論の立場から Hankel の特異点に関する仕事を批判的に検証した (1882)。しかし、この時点までは Riemann による積分可能性の条件に関する不連続点集合の性質についての測度の概念や定式化には至らなかった。■積分論と測度論の進展：1884-85年にかけて、O.Stolz、C.G.Harnack は R (実数全体) の有界集合に対して初めて測度の一定義を与

え、Cantor はこれを有界集合の近傍の概念を用いて n 次元へ拡張、この Cantor 測度の欠点を改良するため G.Peano (1887) と C.Jordan (1894) は可測性の概念を導入した。現代ではその性質をもつ集合を Jordan 可測集合、その測度を Jordan 測度と呼んでいることは周知であろう。Jordan 測度によって一般の Riemann 積分が定義される。また、E.Borel は集合論の基礎概念から出発して、測度論に必要な諸定義や概念の整備に基づいて Borel 可測集合や Jordan 測度より強い条件を満たす Borel 測度を考えた (1898)。これらの結果は R.L.Baire の連続関数の極限移行の繰り返しから得られる実関数の特性の研究 (1899) と結合して点集合の分類に関する位相的研究の出発点となった。この根底には Dirichlet 以来の不連続関数を含む一般の関数の導入にあったが、進んで Baire の不連続関数の研究 (1905) へ結実し、連続関数の Riemann 積分だけでは不十分であることが感じられ、積分概念の拡張の可能性が問題となった。■積分論と測度論の確立—Lebesgue 積分と Lebesgue 測度—: Jordan, Borel によるそれぞれの測度の統合は、H.Lebesgue によってなされた (1902, 04)。いくつかの条件を満たす任意の有界集合 A の測度を定義し、そのような集合を含む任意の開集合およびそれに含まれる任意の開集合に対して、それぞれの測度から (Lebesgue の) 外測度および (Lebesgue の) 内測度を定め、両者が一致する場合、 A を (Lebesgue の) 可測集合、そのときの測度を (Lebesgue の) 測度と呼ぶ。また、Riemann 積分の一般化としての (Lebesgue の) 積分は有限閉区間で定義された有界な実関数の加法族を含む完備加法族の構成から実現された (1910)。■その後の発展—理論と応用—: 多方面へ多彩な展開を見せた結果はここで概観することも困難なほどである。古典的な積分問題の見直しをはじめ、重複積分に関する G.Fubini の結果 (1907)、J.Radon による Stieltjes 積分 (T.J.Stieltjes による) と Lebesgue 積分の一つの総合化とその役割を演じた Radon 測度の構成 (1913)、その拡張に関する人々の貢献、特に O.M.Nykodým による結果 (1930) と J.von Neumann の結果 (1940) は顕著である。以上で積分の基本理論は完成されたと言えようが、Radon 以後に見られるものは、たとえば、弱積分やベクトル値積分の理論であるが、これは S.Bochner に始まり (1933)、I.Gelfand (1938)、N.Dunford・B.Pettis (1938, 40) 等によって進歩した。また A.Haar による Haar 測度 (1933) はこれまでの測度概念とともに関数解析、調和解析、群論等の主要な基礎的方法となっている。たとえば、早いもので E.Fischer (1907)、F.Riesz (1907, 10) による関数空間における積分概念へ応用され、また後に A.Kolmogoroff による確率の公理化 (1933) に伴う確率論や確率過程論の基礎に置かれることとなった。

ここに至って気付くことは Hankel の、関数の不連続点としての積分に対する特異性の概念は Lebesgue 測度の概念に全く吸収されて、その影が消えてしまった感が強い。

複素関数論 (W系): a を始点、 b を終点とする z 平面上の曲線を $C: z = z(s)$, $0 \leq s \leq 1$ とする。 a を中心とする関数要素 $P(z; a)$ が C に沿ってどこまでも b の近くまで解析接続できるが、 b を含んでは解析接続できないとき、座標 b は z 平面上の特異点 B に対応する。 b を中心とする開円板 (半径 $= r < |a - b|$) において上記の関数要素の解析接続が定める解析関数の分枝を $F(z)$ とする。 $F(z)$ は開円板 $\{b\}$ 上に非分枝の被覆面 W を定める。特異点はこの W の構造と分枝 $F(z)$ の値の分布によって、特異点 B は孤立特異点、対数特異点、代数特異点と分類される。1章、(1) の 4) でも触れたが、一定の領域で正則な解析関数とその境界点を全て特異点として領域の外へ解析接続できないとき、この領域の境界を自然境界と呼んだ。w 系の中心的テーマは解析接続に伴う特異性である。■自然境界に対する空隙理論: 収束円周を自然境界とする冪級数に関する研究が圧倒的に多い。Weierstrass とともに J.Hadamard のこの方面に関する最初の仕事は、冪級数の解析的分枝の有理形半径 (これを越えた範囲では極以外の特異点が現れる) に関する結果であった (1892)。冪級数の収束

円が自然境界となるための条件の研究は Weierstrass, E.I. Freholm の結果をはじめとして (1890)、Hadamard の今では空隙定理と呼ばれる結果 (1892) → 1896 : Borel の結果 (Hadamard の条件の拡張) と E. Fabry の結果 (彼等と異なる条件) → 1929 : G. Pólya の結果 (Fabry の結果の拡張) → 1942 : Pólya の再結果。この最後の結果について少し述べよう。これまでの結果は、原点 0 を中心とする冪級数の収束半径を 1 として、 $|z|=1$ が自然境界となるための十分条件の研究であった。Fabry の結果における条件からの帰結、複素変数 z の冪 λ_n に対して、 $\lambda_n/n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty) \Rightarrow |z|=1$ は自然境界、における条件を最良とするものである。この他にも、A. Hurwitz (1922) 等の結果、また A. Ostrowski による超収束の概念 (1921) に関連して、R. Jentsch による自然境界上の特異点と冪級数の部分和の零点の集積点との関係 (1918)、およびこれらと超収束との関係が Ostrowski によって知られている (1922)。■広義の解析接続と特異点：二つの Laurent 級数によって定められるそれらの対 (P, Q) を広義の関数要素として、 (P, Q) の直接接続全体を広義の解析近傍とすると、関数要素全体に位相がある。この位相空間における曲線を広義の解析接続と呼び、この空間の連結成分を広義の解析関数と定める。この解析関数は狭義の解析関数の高々可算個の分枝要素と極要素を加えたものである。広義の接続における特異点は、狭義の場合に類似の拡張された考えに基づき、超越的特異点、直接超越特異点、間接超越特異点に分類される。広義解析関数の分枝の定める開円板の被覆面を考慮することによって、通常特異点や真性特異点を定めることができる。ここの場合は近年の理論として現在進展中であり、解析接続に伴う特異現象は多変数の場合は一変数の場合と異なる結果を得ている (→ 本論 (III))。

2) B: この系列に属する主要な分野は、以下の三つとする。

微分方程式：数学の中で比較的長い歴史をもつこの分野の源流は、G. Galilei, I. Newton に始まり A. C. Clairaut, J. F. Riccati, L. Euler, J. L. Lagrange と続く。特に Euler, Lagrange を経て Gauss, Riemann の超幾何関数を用いた解法的研究 (1857) から Cauchy, R. Lipschitz 等の解の存在に関する理論的研究 (1820, 1869) が注目される。この時期から特異性問題に関連した微分方程式が現れた。初めに微分方程式の特異性をまとめておく。方程式の係数が解析的である点を通常点、非通常点として、正則、非正則特異点があり、それぞれは極、高位の極を意味する (L. W. Thomé の呼称 (1873))。L. I. Fuchs の場合はそれぞれに対応して、確定、不確定特異点と呼び、他に真性特異点、見かけの特異点 (係数に現れるが、解の特異点とならない点) がある。その現象的特徴は、見かけの特異点を除いて、R 系に類似、他は W 系の意味の解析接続の性質が議論の対象となる。この分野の特異点に関する結果だけでも膨大である。项目的に展望するしかない。■特異点をもった微分方程式：最初の研究は C. A. A. Briot と J. C. Bouquet による単独一階非線形方程式 $dy/dx = f(x, y)/g(x, y)$ (f, g は $(0, 0)$ で解析的) に対する $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$ の場合であった (1856)。このとき特異点は $(0, 0)$ であって、この近傍で解を求めることを研究し、後にこの型の方程式は Briot-Bouquet の微分方程式と呼ばれるようになった。■Fuchs 型方程式の理論：二階線形方程式で係数に特異点をもつ。Fuchs の研究に端を発し (1865, 66, 68)、J. Tannery もこれに続く (1866)。次に、J. Thomae によって Riemann-Fuchs の方法による類似方程式の統一的扱いが試みられた (1870, 74)。他方で、Fuchs 型の新しい研究としての簡易化が F. G. Frobenius によって行われた (1873, 75)。■Fuchs 型以外の方程式へ Fuchs の理論の拡張：Thomé によって研究がなされ (1872, 73)、その後は特に方程式の解の漸近挙動の研究へと向かう。H. Poincaré が先鞭を付け (1886)、A. M. Lyanov (1892)、J. C. A. Kneser (1896)、J. Horn (1897)、C. E. Love (1914) と続いた。■一般の非線形方程式と動く特異点：Fuchs の研究に始まり (1880-90)、それ以後非線形微分方程式の大局的理論に繋がる (詳細：略)。■微分方程式の Galois 理論 (Picard-Vessiot 理論) と

Riemann-Hilbert 問題 (Hilbert の第 21 問題) : 前者は、微分方程式の解の特異点(局所理論)とモノドロミーおよび代数方程式の Galois 理論の融合の下に、Picard (1883, 87) から始まって、E.Vessiot (1892) → F.Klein (1894) と Picard (1895) → L.Schlesinger (1899) へ至る。また、P.Th.Pépin の研究 (1881) に基づいた A.Boulangier の研究 (1898) がある。後者は、Riemann 面とモノドロミーに関するもので、H.Poincaré (1880) → D.Hilbert (1900) → Hilbert (1904) → Plemeli (1908) → G.D.Birkhoff (1913) へ受け継がれたが、最終的な解決は 20 世紀後半へ持ち越された (解決済みとされたものへの反証により、更に 20 世紀末へとおよぶ → 本論 (III))。■多変数超幾何微分方程式 : P.Appell (1880-82) から始まって、Picard (1880-83)、以後一般の多変数への拡張の試みが S.Pincherle (1888)、G.Lauricella (1893) によって行われたが、完全な成功には至らなかった。

力学系 : 力学系は微分方程式と関係深い分野で、この理論の端緒は古来からの天文学にあって、近世以来、上記の微分方程式とともに歩みを同じくしたと考えられる。両者の研究上の本質的違いは、方法的に微分方程式が解析的傾向が強い (したがって概念は定量的である) のに比べ、力学系は幾何学的 (したがって内容の意味するものは定性的) である。まず、特異性に関する基本的な概念を簡潔に述べておこう。自律系 (一階非線形微分方程式系 $dx/dt = f(x)$ (右辺 : 未知関数のみからなる)) の生成する力学系 (または流れと呼ぶ) (右辺 = 0 とする定数関数解の微分同相写像の独立変数に関する 1 パラメーター群) の定常解 (定数関数解) を通る軌道 (解曲線集合) が定常解のみ \Rightarrow 定常解の特異点 (不動点、固定点、平衡点、臨界点等多くの呼称がある) と呼び、この点での右辺の Jacobi 行列の固有値の実部 $\neq 0 \Rightarrow$ 特異点は双曲型、孤立的等の各種別に分類される。これらの特異点は、その近傍での特異現象に相当する軌道の安定性を特徴付ける (例 : 軌道が漸近安定 \Rightarrow Liapunov 安定)、また特異点と閉軌道 (定常解を通る軌道が一点でないコンパクト集合) は力学系の構造の大域的安定性を (不) 安定多様体と関連付けて議論される。■三体問題と力学系の位相幾何学的定性理論 : 天体力学における三体問題に関する Poincaré の研究 (1881, 82, 85, 86, 90, 92-99) と H.Bruns の研究 (1887) は解の非可積分性から、その力学的構造の議論に向かうことによって力学系の位相幾何学的研究 (定性的理論) の発端となった。■力学系の基礎の確立 : 位相力学と安定性の研究は G.D.Birkhoff (1913-27) と A.M.Lyapunov (1947) による。また、微分力学と構造安定性に関しては A.A.Andronov-L.S.Pontryagin の研究 (1937) に続いて、V.V.Nemytskii-V.V.Stepanov の研究 (1947) によって一応の基礎を築いた。以上は力学系における特異性に関連した部分の素描である。特異性問題に関する議論の展開は 1950 年以降に顕著となる (→本論 (III))。

この分野の終わりとして興味深いことを述べておこう。W 系の複素関数論で見た Hadamard は質点の運動において初期値に連続的に依存しない軌道が不安定平衡点へ漸近収束する例を示したが、これを発想の原点として後の彼の双曲型偏微分方程式の Cauchy 問題の適切である (bien posé, well posed) ための研究が生まれたという。

特異点理論 : 20 世紀後半に入って急速に展開し始めた分野であるが、元はと言えば、それまでに内容を蓄積してきた代数幾何学、位相幾何学、多変数関数論、力学系等における特異性関連部門が総合された形でこの理論を形成しているが、特に共通する問題の独自の的方法による包括的研究を目指している。一般的な特異点は有限個の正則関数で定義される解析的集合に対して、代数多様体の特異点と同様に定められる。このような特異点に付随する特異現象はこれまでに述べたものと本質的に差異はない。Poincaré、Picard、Lefschetz から近年までの主要テーマは■代数的または解析的曲面の特異点の還元問題と特異点近傍の位相幾何学的研究■特異点の分類と Picard-Lefschetz 理論 (—1930 年代) をはじめとして、これらの近代化 (1940 年代)、1950 年代以降

は彼等の古典論は完全に近代論に吸収された形となり、新たに生じた■超平面切断に伴う特異性問題と超曲面の特異性問題、また近年話題を呼んだカタストロフィーの基礎に関係する■微分位相幾何学と開折理論における特異点問題等へと急速な進展を見せた。最近では特異性に関する新しい問題が次々と現れてきているかのようである(→本論(III))。

3) C : 応用系からは一般力学と流体力学の二つを選ぶ。それぞれは物理科学の中でも最も古く、伝統的な分野であるばかりでなく、特異性問題が発生する以前からそこに特異な現象が存在すると察知されていたと考えられる分野である。ここでは前者から質点系の運動に関する問題を代表する一つ、三体問題、および後者から連続体媒質としての流体の運動をとりあげる。いずれも複雑であるが、紙数の都合で数学的特性のみに注目する。

三体問題 : 二体問題は求積法で完全に解けるが、三体問題の場合は Lagrange の特別な解(正三角形解と直線解)を除いて求積的な一般解は得られない。この問題は重心の運動に関する積分6個、面積速度に関する積分3個、エネルギー積分1個の他、関連した積分を求めることである。 $n(\geq 3)$ 体問題に対して、Bruns は代数的な積分の非存在を示し(1887)、続いて Poincaré が一価解析的積分の非存在を示した(1892)。それ以来、三体問題は制限問題(質点の質量と運動に関する条件付き問題)を含めた周期解の研究に注がれた。その手法は冪級数展開であり、この話題に関係することは、漸近解の解析的、位相的挙動に関することである。Poincaré は実領域での力学系、したがってそれに伴う実特異点の種別ごとにその近傍での解(曲線)の挙動を調べることによって、その結果を漸近解の実特異点近傍での特異性問題の解明に帰着させた。その問題とは言うまでもなく、解の安定性(安定であることと不安定であること)に関することであって、これを詳しい解析的議論によって示すとともに流れの安定性に関する幾何学的特性に帰結させた(1899)。彼による三体問題に関する多数の周期軌道の存在証明(1912)とそれに関連した諸問題はその後(1913)から力学系の理論における Birkhoff たちによって20世紀の前半にかけて引き継がれた。後半から現代にかけて、力学系の理論は一新されて三体問題も他の古典力学と同様にその枠内で厳密に再構成されるとともに新たな問題を呼んでいる。

流体運動 : 流体の運動を一般的に支配する方程式は Navier-Stokes の方程式系であり、非粘性、非圧縮性の流体の場合は Euler の方程式系である。特に前者の場合は今日なお精力的に研究されている流体力学および非線形偏微分方程式の重要なテーマの一つである。ここで特異点に関するものは後者であって、この方程式系の対象とする運動は一般の流れの他に、流れの中に発生する渦や渦糸(集中渦)である。非粘性非圧縮性流体における循環に関する Lord Kelvin (W.Thomson) の結果(1871)、また渦の不生不滅に関する H.von Helmholtz の結果(1868)および両者の同値であること等は既に当時明確に得られていた。それ以来、数学の進歩も手伝って、渦や渦糸の存在は流体の流れにおける複素関数論的特異現象と見なされ関数論的立場からの研究が進化した。これらの近代の特徴付けでは、渦や渦糸は力学系の不安定特異性として理解される。また、衝撃波現象については、衝撃波どうしの接触面での物理量(速度、運動量、エネルギー等)の不連続性とそれから生じる衝撃波解の特異性は既に Riemann の頃から知られていたと思われる。Riemann のテスト問題(1860?)と呼ばれる数学的モデルはこのような特異性に関する理論と数値実験のよい比較検討の場を与えている。ところでこの場合の特異性とは、気体運動に関する偏微分方程式の解(衝撃波)の滑らかさ(微分可能性)に関するもので、それは通常の意味の微分概念としてではなく、弱解としての広義の滑らかさを意味する。これは20世紀後半に入ってその意味が明確に理解された超関数論によって解釈が可能となった。このような特異性は超関数論的特異性と呼ぶことにする。更に、S.J.W.Rayleigh に始まる流体の流れの安定性に関する考察(1880)は力学系の特異性に関するものである。

以上の内容に関する結論は本論の3章で述べられる。それまでは特異性概念の背景であり続けた西欧の社会的、文化的思潮の変遷を概観することによって、不連続観の正当性の確立を知るとともに、連続観との統合とそれに至る論理に触れる。

(2) 不連続観の歴史的変遷

先に、1章(2)において特異性概念の初期以前の歴史的背景を見た。ここでは、その当時まで支配的であった連続観に対してそれ以後に新しく興った不連続観の歴史的推移を展望することから始めよう。

1) 不連続観の確立への歴史的歩み — 数学、自然科学からの必然性 — : 既述のように18世紀後半からおよそ19世紀前半にかけて観念論的理想主義の哲学思想をもって、社会と文化の在り方に重なる影響を与えた Kant はここで言うところの連続の思潮の象徴的存在であった。連続観に関して個人的なものとして、たとえば G.W.F.von Leibniz (1646-1716) は自然現象の連続性を確信して、何ら不連続事象の存在を認めることはなかった。これはまた彼の決定論の主張の拠り所でもあった。これに対して Newton は宇宙論的観点から自然現象の連続性を当然視していない。では Kant の場合はどうであったか、ということは大いに興味深いことであるが、彼は物質の連続性と究極的な存在としての原子の離散的存在の不整合性を彼の哲学的立場からは完全な説明を得ることはできなかったから自然観をどちらにとるかは明確にしていない。しかし、彼の哲学世界の理念からすれば自然界に特異現象の存在を認める理由はなく、むしろ連続性の擁護の側にあったと見られよう。一方、G.W.F.Hegel (1770-1831) は、Kant に見られる矛盾を在るがままに見ることによって、むしろ特異性の存在を容れる立場をとったと考えられる。それは彼の矛盾の止揚を通しての統一的認識の主張からくる妥当な見方であろう。このように、個人的な連続観は古くからあって、多少の差異があったにせよ、1章(2)で見たように当時代の社会の趨勢下では連続の思潮が支配的であったことは否定できない。したがって、次の結論を得る。■数学および自然科学において不連続に関わる考えは社会的、文化的に異端的存在であった。そのような雰囲気の中では極少数の偉大な科学者を除いて一般の科学者は不連続観の形成をなすに至らなかった。しかし、数学や科学にとってこれまでの体制的在り方は、やがて Kant から Hegel にかけて最盛期を迎えたその思潮も Hegel の没後から驕りが見え始めた頃から、その内部的な必然性によって旧来の殻を脱して不連続なものへの関心を向けざるを得ない状況となりつつあった。これについては[1] ((a) pp.69-70) に詳しいが、まとめて述べれば、実数や関数の連続性への強い関心は新しく厳密な連続観を生み、後の Cantor の集合論の出現による連続の問題の新たな出発点となる契機となった。その契機は連続外の問題としての不連続性や微分可能性等の問題を後に示唆するものとして重視しなければならない。やがてこの方向は解析学全体が連続の問題以外の問題も対象にすべきであることを意味し、それ自身の解明のためにもトポロジーや多様体の概念の方向で展開されることになる。また他方において、連続的立場からは合理的説明が不可能な自然現象に対する不連続的立場からの批判と解釈が様々な分野から噴出するにおよんで、不連続観の重要性が重みを増してきた。このような情勢を迎えて、ここに■不連続観は異端的存在から数学と科学における必然的存在となってきた。この時期、数学において初期の特異性の概念が現れ始め、その分野と関連した諸問題をかかえた分野では特異性の概念を避けて通れず、その開拓に当たってきたことは既に眺めたことである。不連続観の成果は随所に刻まれるにおよんで、19世紀末にかけて■特異性の概念は数学内部から正当な市民権を獲得するに至ったといえよう。また、数学より遅れはしたが物理学における不連続観はその巨大な足跡を20世紀に入って刻むことになる。それは M.K.E.Planck の量子仮説(1900)に始まった古典量子論は古典物理学における連続観の限界を示したが、その連続観の微視的世界

からの徹底的な駆逐とまでは至らなかった。やがて、W.K.Heisenberg の行列力学 (1925)、E.Schrödinger の波動力学 (1926) の出現によってここに古典力学に代わって量子力学が確立された。以後、これを基礎に今日まで徹視的な物理学的現象の解明と多方面にわたる応用に成果を積んできた。量子力学の完成は自然界における古い連続観を打破 (電磁波や光の粒子性、突然変異的現象、カタストロフな現象等の発見) し、不連続観の勝利をもたらした。このことを一般的に言えば、■自然観は不連続観を合法化し、定着化したということである。

以上のことから、数学の世界では比較的早く特異性の概念の確立とその存在権を得たことに続いて、次に自然科学において不連続観の確立を得たことはこれらの普遍的存在が認識されたことであり、客観的に正当性が確立されたことを意味している。

2) 不連続観の確立後に見るもの : 過去には数学や自然科学の諸問題を連続的に考えるしかなかった習慣と風潮はやがて不連続の立場からも見直す姿勢の定着によって自然消滅の一途を辿り、不連続観は対象となる問題の正しい理解と認識を得る一方の方法的立場となった。かつては連続観が優位に作用して、不連続観は排斥されその価値を顧みられることは殆どなかったほどであったが、ここにその存在価値と権利を獲得してからは両者間の優位性の問題は消滅し、両者は対等の価値をもった観点として数学をはじめあらゆる学術領域、社会、政治、経済、文化、芸術万般の世界で常識化するに至った。両者の役割は自身の問題に向けられるばかりではなく、一般的な対象に向けて互いに他の認識の不可能な部分を補うことである。互いに相補的な役割を演じ合うことにおいて両者のそれぞれの意義は大きい。では、対象の認識が連続観と不連続観の一体化または統一によって得られるということとはどのような意味があるのか。それぞれは互いに矛盾した観点であり、矛盾したもの (からの認識) の統一の意味と論理について次に簡潔に触れておきたい。

3) 連続的なものと不連続的なものの統一的認識 — 唯物弁証法 — : 互いに矛盾するものの認識の統一は古くから弁証法と呼ばれる、本来は対話の精神に基づいて真理へ到達する方法である。二つの対立し、矛盾する概念を克服して、そこに統一的な更に高い結論または立場に至ろうとする発展的な考え方である。この間になされる調和統一への働きを止揚 (aufheben (独), sublation (英)) と呼んですることは日本人にとって余りにも聞き慣れた言葉であろう。弁証法には多くの考え方があるが、中でも Hegel のものは観念的であり、K.H.Marx (1818-83) のものは唯物的なものである。近代科学の認識の一つの有力な方法として Marx の唯物論的弁証法があげられ、量子力学における波動性 (連続性) と粒子性 (不連続性) の統一的理解の論理的基盤を与えてくれる。同様にこれまで見た数学における特異性と非特異性はそれぞれの概念の統一 (たとえば、局所性から大域性) によって、数学的对象の本質的認識 (全容) がこの弁証法の論理によって達成される。矛盾した概念の統一とは一層高いばかりでなく、本質的で有用な概念を得るものでなければならない。その論理は止揚の概念の正しい実践の中に見出される。

3. 結論と展望

初めにこれまでに現れた特異性を再び点検することによって、その特徴的分類を行う。そして、今回の主題 (II) の結論を要約する。最後に主題 (III) への展望を行う。

(1) 主題 (I)、(II) から

ここから再び数学的内容の議論にもどる。この節は次の主題 (III) への中継点に位置するだろう。

1) 特異性の分類：特異性は系列ごとに次の二つに大別できる。

	A	B	C
■解析的特異性	複素関数論 (R、W 系)、実関数論	微分方程式	天体力学、流体力学
■幾何学的特異性	代数幾何学、複素関数論 (W 系)	力学系、特異点理論	天体力学、流体力学

解析的特異性とは実関数、複素関数、超関数に対する特異性を総称したものであり、幾何学的特異性とは代数幾何学、位相幾何学、微分幾何学的な特異性を指すものである。両者に共通する分野は複素関数論 (W 系)、応用系列の二分野である。W 系の複素関数論では本質的には解析的特異性が問題であるが、広義の場合の概念は位相幾何学的考察を必要とするからである。また、応用系列ではいずれも両方の特異性を兼ね備えることは、応用問題の複雑な構造を示すものである。

2) 結論：■複雑な構造を持った特異性の出現。解析的特異性では C 系列の場合であり、幾何学的特異性では W 系複素関数論の広義の場合を含んでほぼ全般にわたる。これは後者の特異性が幾何学特有の質的性質の反映としてあるからであろう。■系列ごとの各分野にわたって特異性問題の発展と形成、およびそれらの近代化、他の分野への寄与等を検証する。■特異性に関する問題は局所的であるだけに大域的な視野からの理解も必要、そのためにも連続的な観点に立つことは基本的で重要である。■数学や科学の発展は社会や文化の影響に支配されることも大いにあれば、逆に社会や文化に強い影響を与えることもあるということである。

(2) 主題 (III) へ向けて

今後の予定は主題 (III) として、20 世紀後半以降の特異性概念とその展開である。二つに分けて展望しよう。

1) 本論 (II) で触れたもの：2 章で既に紹介的に示されたものがあつた。列記するにとどめる。

A 系列. 複素関数論 (R 系)：留数解析の発展。代数幾何学：代数積分の消失問題。複素関数論 (W 系)：多変数の場合。 B 系列. 力学系：特異性問題。特異点理論：新しい問題。

2) 他に予定されるもの：上記のものは各分野における今後の問題の部分的なものに過ぎない。他の問題は複雑にからんで分類と整理が未完のため記さなかったものもあれば、まだ見出してないものもあるであろう。これ等の他にこれまでの分野に入らない新分野の中で問題を生み出しつつあるもの、または複数の分野にまたがるものの中に存在するものが考えられる。ここにこれ等を列記するにはまだ十分な資料と根拠が整っていないから明らかにできないが、手元の資料を参考する限り、20 世紀後半に入ってから特異性問題は一層複雑な度合いを増してきた印象が強い。特に近年に至っては問題が流動的で展望が困難な様相が見え始めているのは歴史が浅いせいもあるだろうが、何と云っても内容の理解が容易でないことからくるであろう。また、応用系列については純粋方面の数学の進展によって特異性問題の開発的進歩を得て、それに関する情報は豊富である。たとえば、偏微分方程式の解、場の理論、カタストロフ理論、複雑系等に見られる現象の中に新しいか、または複雑な特異性概念が見出されるであろう。

参 考 文 献

文献の記載について：以下のことを断っておきたい。

(1) 本報告 (II) の研究のために直接参考または人々の助けを借りて間接的に内容の確認を得た文献は多数で

ある。本文でそれ等を、せいぜい(1867, 69)、(1907)等以示して、ここに掲げる代わりとした。特異性の問題に関しては著者たちの気付かぬ他にも重要な文献があるかもしれないから、これ等が決して全てではないことは言うまでもない。

(2) 本文中の引用文献および注は[1]—[4]を除いて、報告(I)の中の参考文献の番号によって記載した。上記(1)、(2)ともにスペースの節約のために行ったことであることを諒解戴きたい。

- [1] 阿部剛久, (a)「特異の問題」とその数学形成をめぐって, I — 発生期の概念とその胎生基盤 —, 芝浦工業大学工学部紀要, 第11巻(1977), pp. 59—71 (b)「特異の問題」とその数学形成をめぐって, I-(2) — 初期概念の成立過程とその史的意義 —, 芝浦工業大学研究報告(理工系編) Vol. 23, No. 1 (1979), pp. 36—49.
- [2] 阿部剛久, 特異性の概念は近代数学へ如何に寄与したか (I) — 初期の概念とその背景 —, 数理解析研究所講究録 1317「数学史の研究」, 京都大学数理解析研究所(2003), pp. 39—49.
- [3] S.Bochner, Singularities and Discontinuities, Proc. of the Conference on Complex Analysis (1972), Vol.II (Rice Univ. Studies 59, 1973), No. 2, pp. 21—40.
- [4] 阿部剛久 - Gregor Nickel, 特異性の概念は近代数学へ如何に寄与したか (II), 研究集会予稿集「数学史の研究」(研究代表者 小松彦三郎編), 京都大学数理解析研究所(2003. 8. 25~8. 28), pp. 19—21.

次に、全体的に上記(1)における文献の約半数を提供してくれて、理論への案内、歴史的展開と資料を含む下記の著書文献は有益である。本文の各系列ごとの分野順に紹介する。

- [5] D.Laugwitz, *Bernhard Riemann 1826-1866; Wendepunkte in der Auffassung der Mathematik* (Vita Mathematica, Bd.10), Birkhäuser Verlag (1996). Riemann 中心に以前と以後の歴史的評論。
- [6] S.Lefschetz, *L'Analysis situs et la géometrie algébrique*, Gauthier-Villars, Paris (1924).
- [7] O.Zariski, *Algebraic Surfaces*, Chelsea, New York (1948), 2nd ed., Springer (1971). [6], [7] は代数幾何学の古典的成果に詳しく、また前者は特異理論と関係深い。
- [8] 功力金次郎, 実関数論および積分論, 共立出版(1959). この方面の歴史的解説を含む貴重な書。
- [9] E.T.Whittaker, G.N.Watson, *A Course of Modern Analysis*, 4th ed., Cambridge Univ. (1927). この書はW系の複素関数論や微分方程式に関して多くの歴史的文献や資料を提供してくれる宝庫である。
- [10] J.J.Gray, *Linear Differential Equations and Group Theory from Riemann to Poincaré*, Springer (2000). 微分方程式とその延長、関連問題に詳しく、新旧文献案内も豊富である。
- [11] V.I.Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer (1978). 文献の紹介こそ少ないが、力学系の古典的結果から現代論まで歴史的に重要な成果を段階的に解説した名著である。

なお、応用系列関係では特に特異性問題を意識的に取り上げた文献類は20世紀初頭以前は少なく、Poincaréの天体力学の著書以外はそう多くは見当たらない。これは研究者たちの発見的努力に待たれよう。