A 型箙のねじれ自由類と
対称群における Bruhat inversion

名古屋大学大学院多元数理科学研究科 * 榎本 悠久
Haruhisa Enomoto
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

本稿は [2] において得られた、A 型箙のねじれ自由類における単純対象の組合せ論的分類と、その応用としての Jordan-Hölder 性の判定を解説するものである。本稿の結果は [3] において、他の simply-laced な有限ルート系に付随する箙の表現圏や、前射影的多元環と呼ばれる、ある種の箙表現の enhancement に対しても拡張されたが、本稿では具体的で記述が明快である A 型箙の表現の場合に限り記す。

1 箙の表現、Gabriel の定理

箙 *(quiver)* とは、有限有向グラフのことである。箙を $Q = (Q_0, Q_1)$ と表し、Q_0 は頂点集合、Q_1 は矢の集合と呼ぶことにする。箙の**表現** M とは、次のデータからなるものである:

- 各頂点 $i \in Q_0$ に対し、有限次元ベクトル空間 M_i が定まっている。
- 各矢 $i \to j \in Q_1$ に対し、線形写像 $M_i \to M_j$ が定まっている。

また表現の間の準同型という概念も自然に定義でき、Q の表現全体 $\mathsf{rep}\, Q$ はアーベル圏をなす。以下理論を単純にするため、Q には有向サイクルがないことを仮定する。

箙の表現論とは、与えられた箙に関して $\mathsf{rep}\, Q$ の構造を様々な視点から解析するものである。このときにまず次の Krull-Schmidt の定理が基本的である。

定理 1.1 (Krull-Schmidt)**.** Q を箙としたとき、任意の有限次元な Q の表現は必ず直既

〒464-8602 愛知県名古屋市千種区不老町

約な表現の直和に、同型と並び替えを除いて一意的に表せる。

この定理により、$\mathsf{rep}\, Q$ の構造は直既約部分のみ分かればよい。このことを厳密に言うために $\mathsf{ind}(\mathsf{rep}\, Q)$ を $\mathsf{rep}\, Q$ の直既約対象の同型類のなす集合とする。このとき、$\mathsf{rep}\, Q$ は $\mathsf{ind}(\mathsf{rep}\, Q)$ のみから圏論的に復元できる。またこのことにより、$\mathsf{rep}\, Q$ の「直和と直和因子で閉じた部分圏」を指定することと、$\mathsf{ind}(\mathsf{rep}\, Q)$ の部分集合を指定することは同じことである。

箙の表現論と Lie 理論との関わりにおける重要で基本的な定理である Gabriel の定理というものがある。

定理 1.2 (Gabriel)**.** Q を有限で連結な箙としたとき、次は同値である。

1. $\mathsf{ind}(\mathsf{rep}\, Q)$ は有限集合、つまり直既約 Q 表現は同型を除いて有限個しかない。
2. Q の向きを忘れた無向グラフが *simply-laced* な *Dynkin* グラフ（A_n, D_n, E_6, E_7, E_8）である（このとき Q を *Dynkin* 型箙という）。

さらに、以上が満たされるとき、Q に対応する *Dynkin* 型のルート系を Φ とし、Q の頂点 i に対応する Φ の単純ルートを α_i とする。このとき、

$$M \mapsto \sum_{i \in Q_0} (\dim M_i)\alpha_i$$

は、Q の直既約表現と Φ の正ルートの集合 Φ^+ との全単射

$$\underline{\dim}\colon \mathsf{ind}(\mathsf{rep}\, Q) \cong \Phi^+$$

を与える。

この定理と先に述べた注意から、Q が Dynkin 型箙のとき、$\mathsf{rep}\, Q$ の（直和と直和因子で閉じた）部分圏を指定することは、対応するルート系 Φ の正ルート Φ^+ の部分集合を指定することと対応する。この対応のもとで、Φ の Weyl 群の元から $\mathsf{rep}\, Q$ の部分圏を作るというのが次に述べる *Ingalls-Thomas* 対応である。

その前に A 型の箙について Gabriel の定理をより具体的に言い換えてみよう。A 型ルート系について思い出せば、Gabriel の定理は結局次のように言い換えられる。

定義 1.3. 箙 Q が A_n 型であるとは、Q の向きを忘れた有向グラフが

$$1 \text{ —— } 2 \text{ —— } \cdots \text{ —— } n$$

であるときをいう。

定理 1.4 (A 型 Gabriel)**.** *Q を A_n 型の箙とするとき、$1 \leq i < j \leq n+1$ を満たす各ペア (i,j) に対して、$M_{[i,j)}$ を次の表現ような Q の表現とする:*

$$M_{[i,j)}: \qquad 0 \text{ — } \cdots \text{ — } 0 \text{ — } k \text{ — } \cdots \text{ — } k \text{ — } 0 \text{ — } \cdots \text{ — } 0$$

ここで頂点 m には $i \leq m < j$ のとき k が、他には 0 が乗っていて、線形写像は k の間は全て恒等写像、それ以外は全て 0 写像である。このように定義すると、写像 $(i,j) \mapsto M_{[i,j)}$ は全単射

$$\{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq n+1\} \cong \mathsf{ind}(\mathsf{rep}\, Q)$$

を与える。

2　ねじれ自由類

まずは表現論サイドから、**ねじれ自由類** *(torsion-free class)* というクラスの $\mathsf{rep}\, Q$ の部分圏を導入しよう。

定義 2.1. Q を箙とし、$\mathsf{rep}\, Q$ の部分圏 $\mathcal{F}$ が**ねじれ自由類** *(torsion-free class)* であるとは、次の 2 つを満たすときを言う。

1. $\mathsf{rep}\, Q$ での任意の短完全列 $0 \to L \to M \to N \to 0$ に対して、L と N が $\mathcal{F}$ に入っているならば、M も $\mathcal{F}$ に入っている。
2. $\mathsf{rep}\, Q$ での任意の短完全列 $0 \to L \to M \to N \to 0$ に対して、M が $\mathcal{F}$ に入っているならば、L も $\mathcal{F}$ に入っている。

つまり、「拡大をとる操作と部分表現を取る操作で閉じている」部分圏のことである。

ねじれ自由類はよい性質を持つ（とくに Quillen の意味での完全圏構造を持ち、また quasi-abelian である）。そのため次の問は自然である。

問題 2.2. 与えられた箙 Q（やより一般に有限次元多元環）について、$\mathsf{rep}\, Q$ のねじれ自由類を分類せよ。また各ねじれ自由類の圏論的な不変量を計算せよ。

本研究のもともとの動機は、完全圏についての著者の研究 [2] の一般論が、具体的な完全圏においてどのように応用できるかというもので、その意味で A 型箙のねじれ自由類は次節以降で見るような転倒集合による明快な記述 (Ingalls-Thomas 対応) をもち、しかも計算が具体的に可能なよい toy example となっている。

3　転倒集合と Bruhat 転倒

ここでいきなりだが S_{n+1} を $1, 2, \ldots, n+1$ に作用する対称群とする（A_n 型ルート系の Weyl 群である)。このとき**転倒集合** *(inversion set)* といものが S_{n+1} の元に付随して定義される:

定義 3.1. S_{n+1} の元 w に対して、

$$\mathsf{inv}(w) := \{(i,j) \mid 1 \le i < j \le n+1, w^{-1}(i) > w^{-1}(j)\}$$

とし、これを w の**転倒集合**、その元を w の転倒 (inversion) と呼ぶ。

これは、$w = w(1)w(2)\cdots w(n+1)$ と 1 行記法で書いた際に転倒している数の組である。

例 3.2. $w = 42153 \in S_5$ とすると（この意味は $w(1) = 4, w(2) = 2, w(3) = 1, \ldots$ である)、w の転倒の集合は次のようになる:

$$\mathsf{inv}(w) = \{(1,2), (1,4), (2,4), (3,4), (3,5)\}$$

転倒集合はルート系や組合せ論でよく用いられる有名な概念であるが、本稿では ***Bruhat* 転倒** *(Bruhat inversion)* というものが重要になる。これは直感的には「w の転倒のなかで、他の転倒に分割することができないもの」である。

定義 3.3. S_{n+1} の元 w に対して、$\mathsf{inv}(w)$ の部分集合 $\mathsf{Binv}(w)$ を、条件「$i < m < j$ かつ $w^{-1}(i) > w^{-1}(m) > w^{-1}(j)$ なるような m が存在しない」ような $(i,j) \in \mathsf{inv}(w)$ の集まりとして定義する。

例 3.4. 先程の例 $w = 42153$ では、$(1,2)$ と $(2,4)$ が転倒しており、その結果として $(1,4)$ が転倒しているとみなすことができる。このような場合 $(1,4)$ は Bruhat 転倒**でない**。このように 2 つ以上の転倒に分けられないものを考えていくと、

$$\mathsf{Binv}(w) = \{(1,2), (2,4), (3,4), (3,5)\}$$

となることが分かる。

Bruhat 転倒という名前は、対称群の Bruhat order で w が被覆する元と Bruhat 転倒が一対一に対応していることに由来する。

4 Ingalls-Thomas 対応

ここでは Ingalls-Thomas により構成された、$\mathsf{rep}\,Q$ のねじれ自由類の分類を、A 型の場合に限定して述べる。以下、Q を A_n 型の箙で、向きを忘れたグラフが

$$1 \text{------} 2 \text{------} \cdots \text{------} n$$

であることを仮定する。A 型 Gabriel の定理により、$\mathsf{rep}\,Q$ の直既約対象は $\{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq n+1\}$ と一対一対応し、よって $\mathsf{rep}\,Q$ の（直和と直和因子で閉じた）部分圏は後者の集合の部分集合を一対一対応したことを思い出そう。

まず次のように対称群の元から $\mathsf{rep}\,Q$ の部分圏を作ることが自然に考えつく。

定義 4.1. S_{n+1} の元 w に対し、$\mathsf{rep}\,Q$ の部分圏 $\mathcal{F}(w)$ を、$(i,j) \in \mathsf{inv}(w)$ となるような $M_{[i,j)}$ たちの有限直和からなる圏として定める。

後で見るように、このような操作で $\mathsf{rep}\,Q$ のねじれ自由類は全て構成できるのであるが、残念ながらねじれ自由類にならないものも存在し、どの w について $\mathcal{F}(w)$ が $\mathsf{rep}\,Q$ のねじれ自由類になるかは「箙 Q における矢印の向き付け」に依存している。つまり例えば箙 $1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$ と $1 \leftarrow 2 \rightarrow 3$ では、$\mathcal{F}(w)$ がねじれ自由類となるような $w \in S_4$ は異なる。

それゆえ、何らかの Q の向き付けの情報により S_{n+1} の元を制限するのは自然なことであり、それが Reading [6] により導入された *Coxeter-sortable* という概念である。

まず $s_1, \cdots, s_n$ を S_{n+1} の隣接互換（単純鏡映）とする。これらで S_{n+1} が生成されていることはよく知られており、単純互換の積で元を表したとき必要な文字の個数が最小になるようなものを**最短表示**と呼ぶ。

まず、Q に付随する Coxeter 元 $c_Q \in S_{n+1}$ を次で定義する:

定義 4.2. $c_Q \in S_{n+1}$ は $s_1, s_2, \ldots, s_n$ をある順番で一回ずつ掛けたものであり、次の条件を満たすものである : Q において $i \leftarrow j$ という矢があれば、c_Q において s_i のほうが s_j より左にある。

例 4.3. たとえば Q を $1 \leftarrow 2 \rightarrow 3 \leftarrow 4$ とすると、$c_Q = s_1 s_3 s_2 s_4$ である。もちろん $s_3 s_1 s_4 s_2$ なども条件を満たすが、どれも S_{n+1} の中では同じ元である。このように Q により c_Q は一意的に定まることが知られている。

この Coxeter 元 c_Q を固定すると、S_{n+1} の元についての c_Q-sortable 性が定義できる。

定義 4.4. S_{n+1} の元 w が c_Q-*sortable* であるとは、ある w の最短表示のブロック分け

$$w = c^{(0)}c^{(1)}c^{(2)}\cdots c^{(m)}$$

であり、$c^{(0)}$ は c_Q の部分語、$c^{(1)}$ は $c^{(0)}$ の部分語、$\ldots$、$c^{(m)}$ は $c^{(m-1)}$ の部分語、であるような最短表示が存在するときをいう。

例 4.5. $Q = 1 \leftarrow 2 \rightarrow 3 \leftarrow 4$ とすると $c_Q = s_1s_3s_2s_4$ である。このとき $42153 = s_1s_3s_2s_4s_1$ は $c^{(0)} = c_Q$、$c^{(1)} = s_1$ として条件を満たすので c_Q-sortable である。同様に $42513 = s_1s_3s_2s_4s_1s_3$ は $c^{(0)} = c_Q$、$c^{(1)} = s_1s_3$ として c_Q-sortable である。しかし例えば $s_2s_1s_3$ や $s_1s_2s_1s_2 = s_2s_1$ は c_Q-sortable でない。

このとき次が [4] によって示された Ingalls-Thomas 対応（の一部）である。

定理 4.6 (Ingalls-Thomas 対応)**.** Q を A_n 型の箙する。このとき $w \in S_{n+1}$ に対して $\mathsf{rep}\,Q$ の部分圏 $\mathcal{F}(w)$ を対応させることで、次の全単射が存在する*:*

$$\{w \in S_{n+1} \mid w \text{ は } c_Q\text{-}sortable\} \cong \{\mathsf{rep}\,Q \text{ のねじれ自由類 }\}$$

この結果により、$\mathsf{rep}\,Q$ のねじれ自由類は $\mathcal{F}(w)$ という形をしている。これを用いて、次のねらいは以下の問に答えることである:

問題 4.7. c_Q-*sortable* な元 w に対して、対応するねじれ自由類 $\mathcal{F}(w)$ の圏論的構造を、w の側の組合せ論的な情報を用いて記述せよ。

5 主結果

本研究は、与えられた具体的な完全圏の不変量を計算することをモチベーションとしていた。その重要な不変量が**単純対象**という概念である。それを今回のねじれ自由類の場合に定義しよう。

定義 5.1. $\mathsf{rep}\,Q$ のねじれ自由類 $\mathcal{F}$ について、$0 \neq M \in \mathcal{F}$ が $\mathcal{F}$ **の単純対象**であるとは、次のような $\mathsf{rep}\,Q$ での短完全列

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

であって、$0 \neq L, N \in \mathcal{F}$ となるようなものが存在しないときをいう。また $\mathsf{sim}\,\mathcal{F}$ により、$\mathcal{F}$ の単純対象の同型類の集合をさす。

少し考えれば、$\mathcal{F}$ の単純対象は必ず直既約でなければならず、つまり $\mathsf{sim}\,\mathcal{F} \subset \mathsf{ind}\,\mathcal{F}$ が成り立つ。一方、$w \in S_{n+1}$ に対して $\mathcal{F}(w)$ を考えると、構成により、(i,j) に対して $M_{[i,j)}$ を対応させることで全単射

$$\mathsf{inv}(w) \cong \mathsf{ind}\,\mathcal{F}(w)$$

が存在する。よって $\mathsf{sim}\,\mathcal{F}(w)$ は $\mathsf{inv}(w)$ のある部分集合に対応するはずであるが、それがちょうど Bruhat 転倒だというのが主結果 1 つ目である。

定理 5.2. *Q を A_n 型箙、$w \in S_{n+1}$ を c_Q-sortable な元とする。このとき Ingalls-Thomas 対応により対応する $\mathsf{rep}\,Q$ のねじれ自由類 $\mathcal{F}(w)$ に関して、次のような可換図式があり、上と下の写像は全単射である。*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{inv}(w) \arrow[r, "\sim"] & \mathsf{ind}\,\mathcal{F}(w) \\ \mathsf{Binv}(w) \arrow[r, "\sim"] \arrow[u, hook] & \mathsf{sim}\,\mathcal{F}(w) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

この定理により、「与えられた $\mathsf{rep}\,Q$ のねじれ自由類 $\mathcal{F}$ における単純対象の分類」という問題が「対応する w における Bruhat 転倒の列挙」という純組合せ論的な問題に帰着され、原理的には簡単に求めることができたことになる。

では「単純対象が分類されると何が嬉しいのか？」という自然な疑問があがるであろうので、その応用として次に主結果の 2 番目である *Jordan-Hölder* 性の判定を紹介する。

定義 5.3. $\mathcal{F}$ を $\mathsf{rep}\,Q$ におけるねじれ自由類とする。

- $M \in \mathcal{F}$ の $\mathcal{F}$ における組成列とは、M の部分表現の列

  $$0 = M_0 < M_1 < \cdots < M_n = M$$

  であって、各 i について M_i/M_{i-1} が $\mathcal{F}$ における単純対象であるときをいう。
- $M \in \mathcal{F}$ の 2 つの $\mathcal{F}$ における組成列 $0 = M_0 < \cdots < M_m = M$ と $0 = M'_0 < \cdots < M'_n = M$ が同値であるとは、$m = n$ が成り立ち、またある $\{1, 2, \ldots, n\}$ 上の置換 σ が存在し、各 i について $M_i/M_{i-1} \cong M'_{\sigma(i)}/M'_{\sigma(i)-1}$ が成り立つときをいう。
- $\mathcal{F}$ が *Jordan-Hölder* 性 *(Jordan-Hölder property)* を満たす、または単に *(JHP)* を満たすとは、任意の $M \in \mathcal{F}$ に対して、M の $\mathcal{F}$ における組成列が全て同値であるときをいう。

これは通常の加群についての Jordan-Hölder の定理を部分圏レベルに要請したものである。もちろん $\mathsf{rep}\,Q$ においては通常の Jordan-Hölder の定理により (JHP) が満たされるが、驚くべきことに、$\mathsf{rep}\,Q$ の多くのねじれ自由類は (JHP) を満たさない。

例 5.4. $Q = 1 \leftarrow 2 \rightarrow 3$ とし、$w = s_1 s_3 s_2 s_1 s_3 = 4231$ とする。このとき $\mathcal{F}(w)$ は $M_{[1,2)}, M_{[1,3)}, M_{[1,4)}, M_{[2,4)}, M_{[3,4)}$ を直既約対象として持ち、そのうち $M_{[1,4)}$ 以外は単純対象である（Bruhat 転倒に対応するので）。このとき $M_{[1,4)}$ には次のような 2 つの $\mathcal{F}(w)$ での組成列がある:

$$0 < M_{[1,2)} < M_{[1,4)},$$
$$0 < M_{[3,4)} < M_{[1,4)}$$

このうち前者の組成因子（と呼ぶべきもの）は $M_{[1,2)}$ と $M_{[1,4)}/M_{[1,2)} \cong M_{[2,4)}$ の 2 つであり、後者は $M_{[3,4)}$ と $M_{[1,4)}/M_{[3,4)} \cong M_{[1,3)}$ である。これら 4 つは互いに非同型なので (JHP) は $\mathcal{F}(w)$ において満たされていない。

ではどのような w に対して $\mathcal{F}(w)$ が (JHP) を満たすかを判定するのが次の主定理である。

定理 5.5. *Q を A_n 型箙、$w \in S_{n+1}$ を c_Q-sortable 元とすると、次は同値である。*

1. *$\mathcal{F}(w)$ が (JHP) を満たす。*
2. *w の Bruhat 転倒の個数が、w の台 (support) の数に等しい（ここで台とは w の最短表示に s_i が現れるような i たちの集合である）。*

証明には、[2] で確立された (JHP) の判定条件を用いる（それによると、単純対象の個数さえ分かれば (JHP) が判定でき、それが著者が $\mathcal{F}(w)$ における単純対象の分類に興味をもった経緯である）。

例 5.6. $Q = 1 \leftarrow 2 \rightarrow 3 \leftarrow 4$ を考えると、$c_Q = s_1 s_3 s_2 s_4$ であり、$w_1 = 42153 = s_1 s_3 s_2 s_4 s_1$ と $w_2 = 42513 = s_1 s_3 s_2 s_4 s_1 s_3$ はともに c_Q-sortable である。このとき w_1 と w_2 の台はともに $\{1, 2, 3, 4\}$ であるが、

$$\mathsf{Binv}(w_1) = \{(1,2), (2,4), (3,4), (3,5)\},$$
$$\mathsf{Binv}(w_2) = \{(1,2), (2,4), (3,4), (3,5), (1,5)\}$$

となるので、$\mathcal{F}(w_1)$ は (JHP) を満たすが、$\mathcal{F}(w_2)$ は (JHP) を満たさない。

注意 5.7. 先の (JHP) 性の判定は、一応 w における純組合せ論的で計算可能な特徴づけ

を与えているが、w が与えられたときに Bruhat 転倒と台を計算するのは少し面倒である。実は [3] において、(JHP) 性の判定は「w の Bruhat 転倒グラフがサイクルを含まない」というグラフ理論的で視覚的な条件で特徴づけられることが判明した。興味深いことに、この条件はちょうど w に対応する Schubert 多様体が locally factorial であることの必要十分条件として [1] で導入された条件と一致している。

注意 5.8. 冒頭に述べたように、本稿の結果は他の simply-laced な Dynkin 型箙にも自然になりたち、またさらに「Dynkin 図形の全ての向き付けの箙を一度に扱う」環として**前射影的多元環** *(preprojective algebra)* Π というものがあるが、そのねじれ自由類についても同様の理論がなりたつことが [3] において示された。例えば本稿で「c_Q-sortable」というかなり技巧的な概念が導入されたが、実は Π においてはその概念は必要なく、 $\operatorname{mod}\Pi$ のねじれ自由類は対応するルート系の Weyl 群の元と一対一対応することが [5] により知られており、その意味でも「前射影的多元環の表現論は箙の表現論よりも対称性が高い」と言える。実際、他の Dynkin 箙の場合は、前射影的多元環での結果から直ちに導くことができる。

参考文献

[1] M. Bousquet-Mélou, S. Butler, *Forest-like permutations*, Ann. Comb. 11 (2007), no. 3-4, 335–354.

[2] H. Enomoto, *The Jordan-Hölder property and Grothendieck monoids of exact categories*, arXiv:1908.05446.

[3] H. Enomoto, *Bruhat inversions in Weyl groups and torsion-free classes over preprojective algebras*, arXiv:2002.09205.

[4] C. Ingalls, H. Thomas, *Noncrossing partitions and representations of quivers*, Compos. Math. 145 (2009), no. 6, 1533–1562.

[5] Y. Mizuno, *Classifying τ-tilting modules over preprojective algebras of Dynkin type*, Math. Z. 277 (2014), no. 3-4, 665–690.

[6] N. Reading, *Clusters, Coxeter-sortable elements and noncrossing partitions*, Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007), no. 12, 5931–5958.