半無限ヤング盤がつくる柏原結晶とその応用

群馬大学・教育学部　石井基裕 *

1　はじめに

特殊線型リー環 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ の有限次元表現は, (半標準) ヤング盤による様々な組合せ論的記述を持つ. 逆に, ロビンソン–シェンステッド–クヌース対応をはじめとするヤング盤に関係する様々な組合せ論的操作は, 量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}))$ の表現 (の結晶基底) のテンソル積構造から捉えることができる. このように有限 A 型ルート系に付随する表現論や組合せ論は, 他の型のそれらに比べ簡明な記述を持ち, ヤング図形・ヤング盤による詳細な理論が展開される. 有限 A 型の場合に見られる上述の優れた性質が成り立つ要因の一つとして, $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ の全ての基本表現がミニスキュルであるという事実を挙げることができる. ここで, 表現がミニスキュルであるとは, その表現の全てのウェイトの集合が一つのワイル群軌道をなすことを意味する. これは, その表現の結晶基底にワイル群が推移的に作用することとも言い換えることができる.

一方で, 同様の事実は $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ に付随するアフィン・リー環 $\hat{\mathfrak{sl}}_n(\mathbb{C})$ のレベル・ゼロ表現論においても成り立つことが知られている. すなわち, $\hat{\mathfrak{sl}}_n(\mathbb{C})$ に付随する量子群 $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n(\mathbb{C}))$ の全てのレベル・ゼロ基本端ウェイト加群はミニスキュルである. 本稿では, この事実をもとに考察することによって, ヤング盤の一般化である半無限ヤング盤が導入されること, またその応用として,

- A 型アフィン・ワイル群上の半無限ブリュア半順序に対する盤判定法,
- $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n(\mathbb{C}))$ のレベル・ゼロ端ウェイト加群の結晶基底に対する盤による実現

が得られることについて述べる.

* 本研究は JSPS 科研費 16K17577 の助成を受けたものです.

■$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ の有限次元表現論とヤング盤. 半無限ヤング盤の定義, 及びその導入の背景を説明するために, $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ の有限次元表現とヤング盤との間の関係について述べることから始める (詳細については [8, 18] などを参照せよ).

$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ の全ての基本表現 $L(\varpi_i) = \bigwedge^i \mathbb{C}^n$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ はミニスキュルであり, その (結晶) 基底は n 次対称群 S_n のグラスマン置換の集合

$$S_n^{(i)} = \{w \in S_n \mid w(1) < w(2) < \cdots < w(i),\ w(i+1) < w(i+2) < \cdots < w(n)\}$$

と 1 対 1 に対応する. この集合はまた, i 個の箱を持つ 1 列型の列標準盤全体の集合

$$\mathrm{CST}(\varpi_i) = \left\{ \mathsf{T} = \begin{array}{|c|}\hline \mathsf{T}(1) \\ \hline \mathsf{T}(2) \\ \hline \vdots \\ \hline \mathsf{T}(i) \\ \hline \end{array} \ :\ 1 \leqq \mathsf{T}(1) < \mathsf{T}(2) < \cdots < \mathsf{T}(i) \leqq n \right\}$$

とも 1 対 1 に対応する. ここで, ϖ_i は $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ の i 番目の基本ウェイト, または i 個の箱を持つ 1 列型のヤング図形を表している.

一般の優整ウェイト $\lambda = \sum_{i=1}^{n-1} m_i \varpi_i$ $(m_i \in \mathbb{Z}_{\geqq 0},\ i = 1, 2, \ldots, n-1)$ を最高ウェイトとする $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ の既約最高ウェイト表現 $L(\lambda)$ は, テンソル積表現

$$L(\varpi_1)^{\otimes m_1} \otimes L(\varpi_2)^{\otimes m_2} \otimes \cdots \otimes L(\varpi_{n-1})^{\otimes m_{n-1}}$$

の中で, 最高ウェイト・ベクトルのテンソル積が生成する部分表現として実現される. $\lambda = \sum_{i=1}^{n-1} m_i \varpi_i$ を各 $i = 1, 2, \ldots, n-1$ について i 箱の列を m_i 個持つヤング図形と同一視するとき, 上記のテンソル積表現の基底は, 型 λ の列標準盤の集合

$$\mathrm{CST}(\lambda) \cong \mathrm{CST}(\varpi_1)^{m_1} \times \mathrm{CST}(\varpi_2)^{m_2} \times \cdots \times \mathrm{CST}(\varpi_{n-1})^{m_{n-1}}$$

と 1 対 1 に対応する. そして, この対応のもとで部分表現 $L(\lambda)$ の基底とヤング盤[*1] のなす部分集合とが自然に対応する.

上の状況を S_n の言葉で述べると次のようになる. 任意の $w \in S_n$ に対して, $\mathsf{T}_w^{(i)} \in \mathrm{CST}(\varpi_i)$ を

$$\left\{\mathsf{T}_w^{(i)}(1), \mathsf{T}_w^{(i)}(2), \ldots, \mathsf{T}_w^{(i)}(i)\right\} = \{w(1), w(2), \ldots, w(i)\}$$

[*1] 本稿におけるヤング図形は, [8] におけるそれの左右を反転させたものである. また, ヤング盤とは, 与えられたヤング図形の各箱に $\{1, 2, \ldots, n\}$ の元を 1 つずつ次の条件を満たすように記入したものである: 各列においては下方向に狭義に増加し, 各行においては左方向に広義に増加する.

によって定める．また，$N=\sum_{i=1}^{n-1} m_i$ とおき，$\prod_{\nu=1}^{N} \mathsf{T}_\nu = \mathsf{T}_1\mathsf{T}_2\cdots\mathsf{T}_N \in \mathrm{CST}(\lambda)$ によって，第 ν 列が T_ν である列標準盤を表す．このとき，$\mathsf{T}_1\mathsf{T}_2\cdots\mathsf{T}_N \in \mathrm{CST}(\lambda)$ がヤング盤であるための必要十分条件は，次の条件を満たす $w_1, w_2, \ldots, w_N \in S_n$ が存在することである．すなわち，S_n のブリュア半順序 $\succeq$ に関して $w_1 \succeq w_2 \succeq \cdots \succeq w_N$ であり，各 $1 \leqq \nu \leqq N$ に対して，$\mathsf{T}_\nu \in \mathrm{CST}(\varpi_i)$ ならば $\mathsf{T}_\nu = \mathsf{T}^{(i)}_{w_\nu}$ である．

■**$\hat{\mathfrak{sl}}_n(\mathbb{C})$ のレベル・ゼロ表現論と半無限ヤング盤**． 次に，上述における $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ の既約表現 $L(\lambda)$ を，アフィン・リー環 $\hat{\mathfrak{sl}}_n(\mathbb{C})$ に付随する量子群 $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n(\mathbb{C}))$ 上の端ウェイト加群 $V(\lambda)$ に置き換えて同様の考察を行う．*2 この状況におけるヤング盤に相当する組合せ論的対象として半無限ヤング盤を導入することが基本的な方針である．

以下では，ϖ_i $(i=1,2,\ldots,n-1)$ を $\hat{\mathfrak{sl}}_n(\mathbb{C})$ のレベル・ゼロ・ウェイトとして考える (零虚ルート δ を法として一意的に定まる)．$U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n(\mathbb{C}))$ 上のレベル・ゼロ基本端ウェイト加群 $V(\varpi_i) = \bigwedge^i \mathbb{C}(q)^n \otimes_{\mathbb{C}(q)} \mathbb{C}(q)[z,z^{-1}]$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$ は全てミニスキュルであり，その基底は自然に $\mathrm{CST}(\varpi_i)\times\mathbb{Z}$ と 1 対 1 に対応する．また，一般のレベル・ゼロ優整ウェイト $\lambda=\sum_{i=1}^{n-1} m_i\varpi_i$ を端ウェイトとする端ウェイト加群 $V(\lambda)$ は，テンソル積加群

$$V(\varpi_1)^{\otimes m_1} \otimes V(\varpi_2)^{\otimes m_2} \otimes \cdots \otimes V(\varpi_{n-1})^{\otimes m_{n-1}}$$

の中で，端ウェイト・ベクトルのテンソル積が生成する部分加群として実現される (柏原の予想 [15, §13] の解決 [5, §4.2] を参照せよ)．$N=\sum_{i=1}^{n-1} m_i$ とおくと，このテンソル積加群の基底は，

$$\mathrm{CST}(\lambda)\times\mathbb{Z}^N \cong (\mathrm{CST}(\varpi_1)\times\mathbb{Z})^{m_1} \times (\mathrm{CST}(\varpi_2)\times\mathbb{Z})^{m_2} \times\cdots\times (\mathrm{CST}(\varpi_{n^1})\times\mathbb{Z})^{m_{n-1}}$$

と 1 対 1 に対応する．この中で $V(\lambda)$ の基底に対応するものとして半無限ヤング盤を定式化することを考える．半無限ヤング盤を正確に記述するためには，S_n 上のブリュア半順序構造の代わりに，次章で述べる $\hat{\mathfrak{sl}}_n(\mathbb{C})$ のワイル群 $\hat{S}_n$ (すなわち S_n に付随するアフィン・ワイル群) 上の半無限ブリュア半順序構造が利用される．

2　半無限ブリュア半順序の盤判定法

半無限ブリュア半順序の定義と，その盤による判定法とを述べる． ここでは，集合 $\mathrm{CST}(\varpi_i)\times\mathbb{Z}$ と“半無限グラスマン置換”の集合 $\hat{S}^{(i)}_n$ とが重要な役割を果たす．

*2 量子群上の端ウェイト加群は改変型量子群の構造解析を目的として [14] において導入された．端ウェイト加群は可積分最高ウェイト加群を含む可積分加群のクラスをなし，これらは結晶基底を持つことが知られている．アフィン型量子群の端ウェイト加群の構造については [1, 5, 15, 16] を参照せよ．

自由アーベル群 $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\epsilon_i$ において $\Delta = \{\alpha_{i,j} = \epsilon_i - \epsilon_j \mid 1 \leqq i, j \leqq n\} \setminus \{0\}$ と定める．$\alpha_i = \alpha_{i,i+1} = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ $(1 \leqq i \leqq n-1)$, $Q = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{Z}\alpha_i$ とおく．S_n は基底 $\{\epsilon_i\}_{i=1}^{n}$ の置換により Δ と Q とに作用する．このとき, $\hat{\mathfrak{sl}}_n(\mathbb{C})$ のワイル群 $\hat{S}_n$ は, S_n に付随するアフィン・ワイル群 $\hat{S}_n = S_n \ltimes Q = \{(w, \xi) \mid w \in S_n,\ \xi \in Q\}$ として実現される．関数 $\ell \colon S_n \to \mathbb{Z}_{\geqq 0}$ を S_n のコクセター群構造から定まる長さ関数とする．各 $\xi \in Q$ に対して, $c_i(\xi) \in \mathbb{Z}$ を ξ の中の α_i の係数とする．すなわち, $\xi = \sum_{i=1}^{n-1} c_i(\xi)\alpha_i$ とする．また, $\xi \in Q$ に対して, $\mathrm{ht}(\xi) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i(\xi) \in \mathbb{Z}$ と定める．関数

$$\ell^{\frac{\infty}{2}} : \hat{S}_n \to \mathbb{Z},\ (w, \xi) \mapsto \ell(w) + 2 \cdot \mathrm{ht}(\xi)$$

を $\hat{S}_n$ の半無限長さ関数という．$x \in \hat{S}_n$ と鏡映 $r \in \hat{S}_n$ とに対して, $\ell^{\frac{\infty}{2}}(rx) = \ell^{\frac{\infty}{2}}(x) + 1$ が成り立つとき, rx は x を被覆するという関係によって定まる $\hat{S}_n$ 上の半順序 $\succeq$ を半無限ブリュア半順序という．

注意 2.1. アフィン・ワイル群上の半無限ブリュア半順序は, (捩れのない) アフィン型ルート・データに依存して定義される半順序構造であり, コクセター群構造から定まるブリュア半順序に類似する良い性質を持つ．例えば, 次の各項目は半無限ブリュア半順序構造と密接に関係する (または同値である).

- ジェネリック・ブリュア半順序 ([21, §1.5]),
- 安定ブリュア半順序 ([23, Lecture 12]),
- リッテルマン半順序 ([20, §4]),
- 量子ブリュア・グラフ ([6, Definition 6.1] 及び [19, §4]),
- 脇本加群の間の (非自明な) 準同型写像の存在性 ([2, §4]),
- 半無限旗多様体の中の岩堀部分群軌道の間の閉包関係 ([9, §5.1] または [17, §4.2]),
- レベル・ゼロ・デマジュール結晶の間の包含関係 ([22, §5]).

次に, 列標準盤の集合 $\mathrm{CST}(\varpi_i)$ に対応するグラスマン置換の集合 $S_n^{(i)}$ とその上のブリュア半順序構造との類似として, 集合 $\mathrm{CST}(\varpi_i) \times \mathbb{Z}$ に対応する半無限グラスマン置換の集合 $\hat{S}_n^{(i)}$ とその上の半無限ブリュア半順序構造とについて述べる．各 $1 \leqq i \leqq n-1$ に対して, S_n の極大な放物型部分群 $S_i \times S_{n-i} \subset S_n$ と $Q_i = \bigoplus_{j \neq i} \mathbb{Z}\alpha_j \subset Q$ とを考える．このとき, 部分群 $(S_i \times S_{n-i}) \ltimes Q_i \subset \hat{S}_n$ は $\hat{S}_n$ の放物型部分群ではないが, 鏡映部分群である (より正確には, 有限ワイル群 $S_i \times S_{n-i}$ に付随するアフィン・ワイル群に同型な群である)．従って, 剰余類集合 $\hat{S}_n / (S_i \times S_{n-i}) \ltimes Q_i$ は, 各剰余類の中で (通常の)

ブリュア半順序に関して最小である代表元からなる完全代表系 $\hat{S}_n^{(i)} \subset \hat{S}_n$ を持つ (例えば [10, 命題 3.1] を参照せよ). より具体的には, $\hat{\Delta}_+$ を $\hat{S}_n$ の正ルート全体の集合とし, $\hat{\Delta}_+^{(i)}$ を部分群 $(S_i \times S_{n-i}) \ltimes Q_i$ に属する鏡映に対応する正ルート全体の集合とすると, $\hat{S}_n^{(i)} = \{x \in \hat{S}_n \mid x(\hat{\Delta}_+^{(i)}) \subset \hat{\Delta}_+\}$ となる. $\Pi^i : \hat{S}_n \to \hat{S}_n^{(i)}$ を自然な全射とする. $x \in \hat{S}_n^{(i)}$ と鏡映 $r \in \hat{S}_n$ とに対して, $\ell^{\frac{\infty}{2}}(rx) = \ell^{\frac{\infty}{2}}(x) + 1$ が成り立つならば $rx \in \hat{S}_n^{(i)}$ であることが分かる. よって, $\hat{S}_n^{(i)}$ 上の半無限ブリュア半順序 $\succeq$ を上述と同様の方法により定めることができる.

$(\mathsf{T}, c), (\mathsf{T}', c') \in \mathrm{CST}(\varpi_i) \times \mathbb{Z}$ に対して, 関係 $(\mathsf{T}, c) \succeq (\mathsf{T}', c')$ を

$$(c \geqq c') \quad \text{かつ} \quad (1 \leqq u \leqq i - c + c' \text{ ならば } \mathsf{T}(u + c - c') \geqq \mathsf{T}'(u))$$

が成り立つことであると定義する. すなわち, $d := c - c' \geqq 0$ であるとき, T を第 1 列に持ち, T' を下方向に d 箱分ずらしたものを第 2 列に持つ斜め型の盤が半標準であるとき, $(\mathsf{T}, c) \succeq (\mathsf{T}', c')$ と定義するのである (例 2.5 も参照せよ). 容易に分かる性質として, $c - c' \geqq \min\{i, n - i\}$ であるならば, 任意の $\mathsf{T}, \mathsf{T}' \in \mathrm{CST}(\varpi_i)$ に対して, $(\mathsf{T}, c) \succeq (\mathsf{T}', c')$ が成り立つ.

命題 2.2 ([11])**.** 写像

$$\mathscr{Y}_i : \hat{S}_n \to \mathrm{CST}(\varpi_i) \times \mathbb{Z}, \ (w, \xi) \mapsto (\mathsf{T}_w^{(i)}, c_i(\xi))$$

について, 次が成り立つ.

- $\mathscr{Y}_i \circ \Pi^i = \mathscr{Y}_i$.
- $\mathscr{Y}_i$ の $\hat{S}_n^{(i)}$ への制限は, 全単射 $\mathscr{Y}_i : \hat{S}_n^{(i)} \to \mathrm{CST}(\varpi_i) \times \mathbb{Z}$ を誘導する.
- 任意の $x, y \in \hat{S}_n^{(i)}$ に対して, $\hat{S}_n^{(i)}$ において $x \succeq y$ であることと, $\mathrm{CST}(\varpi_i) \times \mathbb{Z}$ において $\mathscr{Y}_i(x) \succeq \mathscr{Y}_i(y)$ であることとは同値である.

定理 2.3 ([12])**.** $x, y \in \hat{S}_n$ に対して, 次の条件 (i)–(iii) は互いに同値である.

(i) $\hat{S}_n$ において $x \succeq y$ である.

(ii) 任意の $1 \leqq i \leqq n - 1$ に対して, $\hat{S}_n^{(i)}$ において $\Pi^i(x) \succeq \Pi^i(y)$ である.

(iii) 任意の $1 \leqq i \leqq n - 1$ に対して, $\mathrm{CST}(\varpi_i) \times \mathbb{Z}$ において $\mathscr{Y}_i(x) \succeq \mathscr{Y}_i(y)$ である.

注意 2.4. 定理 2.3 における条件 (i) と (ii) との同値性は, 任意の捩れのないアフィン型ルート・データに対して定まるアフィン・ワイル群上の半無限ブリュア半順序に対して証

明されている ([12]). この (i) と (ii) との同値性は, コクセター群のブリュア半順序に対するデオダールの判定法 ([7, Lemma 3.6] または [4, Theorem 2.6.1]) の類似であると考えることができる. また, (i) と (iii) との同値性は, 対称群のブリュア半順序に対する盤判定法 ([3, §3] または [4, Theorem 2.6.3]) の一般化を与える.

定理 2.3 を利用した半無限ブリュア半順序の判定の一例を示す.

例 2.5. $n = 7$ とする.

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 7 & 5 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in S_7,$$

$$\xi = 5\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + 4\alpha_4 + 5\alpha_5 - 2\alpha_6, \quad \zeta = 3\alpha_1 - 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 - 3\alpha_6 \in Q$$

とし, $x = (w, \xi), y = (v, \zeta) \in \hat{S}_7$ を半無限ブリュア半順序で比較する. 今,

$$\prod_{i=1}^{6} \mathsf{T}_w^{(i)} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ \cline{2-6} \multicolumn{2}{c|}{} & 4 & 4 & 3 & 3 \\ \cline{3-6} \multicolumn{3}{c|}{} & 5 & 4 & 4 \\ \cline{4-6} \multicolumn{4}{c|}{} & 5 & 5 \\ \cline{5-6} \multicolumn{5}{c|}{} & 7 \\ \cline{6-6} \end{array}, \qquad \prod_{i=1}^{6} \mathsf{T}_v^{(i)} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 4 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ \cline{2-6} \multicolumn{2}{c|}{} & 7 & 5 & 4 & 4 \\ \cline{3-6} \multicolumn{3}{c|}{} & 7 & 5 & 5 \\ \cline{4-6} \multicolumn{4}{c|}{} & 7 & 6 \\ \cline{5-6} \multicolumn{5}{c|}{} & 7 \\ \cline{6-6} \end{array}$$

である. また, 次が成り立つ.

- $c_1(\xi) - c_1(\zeta) = 2 \geqq 1 = \min\{1, 7-1\}$ より, $\mathscr{Y}_1(x) \succeq \mathscr{Y}_1(y)$ である.
- $c_2(\xi) - c_2(\zeta) = 1$ かつ $\begin{array}{|c|c|} \cline{1-1} 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 4 & 3 \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 4 \\ \cline{2-2} \end{array}$ は半標準であるので, $\mathscr{Y}_2(x) \succeq \mathscr{Y}_2(y)$ である.
- $c_3(\xi) - c_3(\zeta) = 1$ かつ $\begin{array}{|c|c|} \cline{1-1} 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 3 & 3 \\ \hline 4 & 4 \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 7 \\ \cline{2-2} \end{array}$ は半標準であるので, $\mathscr{Y}_3(x) \succeq \mathscr{Y}_3(y)$ である.

- $c_4(\xi) - c_4(\zeta) = 2$ かつ $\begin{array}{|c|c|} \cline{1-1} 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 4 & 3 \\ \hline 5 & 4 \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 5 \\ \cline{2-2} \multicolumn{1}{c|}{} & 7 \\ \cline{2-2} \end{array}$ は半標準であるので, $\mathscr{Y}_4(x) \succeq \mathscr{Y}_4(y)$ である.

- $c_5(\xi) - c_5(\zeta) = 4 \geqq 2 = \min\{5, 7-5\}$ であるので, $\mathscr{Y}_5(x) \succeq \mathscr{Y}_5(y)$ である.

- $c_6(\xi) - c_6(\zeta) = 1 = \min\{6, 7-6\}$ であるので, $\mathscr{Y}_6(x) \succeq \mathscr{Y}_6(y)$ である.

よって, 定理 2.3 から $x \succeq y$ であることが結論される.

3　半無限ヤング盤による端ウェイト加群の結晶基底の実現

前章までの準備を踏まえて, 半無限ヤング盤の定義を述べる.

定義 3.1 ([11]). $\lambda = \sum_{i=1}^{n-1} m_i \varpi_i$ ($m_i \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}$, $1 \leqq i \leqq n-1$) とし, $N = \sum_{i=1}^{n-1} m_i$ とおく.

$$\mathbb{T} = \left(\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{\nu=1}^{m_i} \mathsf{T}_{i,\nu},\ (c_{i,\nu})_{1 \leqq \nu \leqq m_i,\, 1 \leqq i \leqq n-1} \right) \in \mathrm{CST}(\lambda) \times \mathbb{Z}^N$$

が条件「各 $1 \leqq i \leqq n-1$ に対して, $\mathrm{CST}(\varpi_i) \times \mathbb{Z}$ において,

$$(\mathsf{T}_{i,1}, c_{i,1}) \succeq (\mathsf{T}_{i,2}, c_{i,2}) \succeq \cdots \succeq (\mathsf{T}_{i,m_i}, c_{i,m_i})$$

が成り立つ」を満たすとき, $\mathbb{T}$ を型 λ の半無限ヤング盤という. 型 λ の半無限ヤング盤全体の集合を $\mathbb{Y}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ と表す.

次に, $\mathbb{Y}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ に $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n(\mathbb{C}))$ 上の柏原結晶の構造を定める. そのために, $\mathrm{CST}(\varpi_i)$ の上の柏原結晶構造の復習から始める ([24]). δ を $\hat{\mathfrak{sl}}_n(\mathbb{C})$ の零虚ルートとし, $P = Q + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{Z}\varpi_i + \mathbb{C}\delta$ とおく. S_n の P への作用を次で定める. $r_i = (i, i+1) \in S_n$ ($i = 1, 2, \ldots, n-1$) を単純互換として,

- $1 \leqq i, j \leqq n-1$ に対して, $r_i \varpi_j = \varpi_j - \delta_{i,j} \alpha_i$ と定める,

- $1 \leqq i, j \leqq n-1$ に対して, $r_i \alpha_j = \alpha_j - (2\delta_{i,j} - \delta_{|i-j|,1})\alpha_i$ と定める,

- 任意の $w \in S_n$ に対して, $w\delta = \delta$ と定める.

$\mathsf{T} \in \mathrm{CST}(\varpi_i)$, $0 \leqq j \leqq n-1$ に対して, $\mathrm{wt}(\mathsf{T}) \in P$, $e_j\mathsf{T}, f_j\mathsf{T} \in \mathrm{CST}(\varpi_i) \sqcup \{\mathbf{0}\}$ を次のように定める. ただし, $\mathrm{CST}(\varpi_i) = \{\mathsf{T}_w \mid w \in S_n\}$ に注意せよ. また, 以下では $\mathsf{T} \in \mathrm{CST}(\varpi_i)$ と集合 $\{\mathsf{T}(1), \mathsf{T}(2), \ldots, \mathsf{T}(i)\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ とを同一視する.

- 各 $w \in S_n$ に対して, $\mathrm{wt}(\mathsf{T}_w) = w\varpi_i \in P$ と定める.
- $1 \leqq j \leqq n-1$ とする. $\mathsf{T}(s) = j+1$ かつ $j \notin \mathsf{T}$ であるならば, $e_j\mathsf{T} \in \mathrm{CST}(\varpi_i)$ を $(e_j\mathsf{T})(s) = j$ かつ $(e_j\mathsf{T})(u) = \mathsf{T}(u)$ $(1 \leqq u \leqq i,\ u \neq s)$ と定義する.
- $1 \in \mathsf{T}$ かつ $n \notin \mathsf{T}$ であるならば, $e_0\mathsf{T} \in \mathrm{CST}(\varpi_i)$ を $(e_0\mathsf{T})(i) = n$ かつ $(e_0\mathsf{T})(u) = \mathsf{T}(u+1)$ $(1 \leqq u \leqq i-1)$ と定義する.
- $0 \leqq j \leqq n-1$ に対して, 上述以外の場合には $e_j\mathsf{T} = \mathbf{0}$ と定義する.
- $1 \leqq j \leqq n-1$ とする. $\mathsf{T}(s) = j$ かつ $j+1 \notin \mathsf{T}$ であるならば, $f_j\mathsf{T} \in \mathrm{CST}(\varpi_i)$ を $(f_j\mathsf{T})(s) = j+1$ かつ $(f_j\mathsf{T})(u) = \mathsf{T}(u)$ $(1 \leqq u \leqq i,\ u \neq s)$ と定義する.
- $1 \notin \mathsf{T}$ かつ $n \in \mathsf{T}$ であるならば, $f_0\mathsf{T} \in \mathrm{CST}(\varpi_i)$ を $(f_0\mathsf{T})(1) = 1$ かつ $(f_0\mathsf{T})(u) = \mathsf{T}(u-1)$ $(2 \leqq u \leqq i)$ と定義する.
- $0 \leqq j \leqq n-1$ に対して, 上述以外の場合には $f_j\mathsf{T} = \mathbf{0}$ と定義する.

以上の準備のもと, $\mathbb{Y}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ の柏原結晶構造を次で定める.

定義 3.2 ([11])**.** $0 \leqq j \leqq n-1$ とする. $\mathbb{T} = (\mathsf{T}_1\mathsf{T}_2\cdots\mathsf{T}_N, (c_1, c_2, \ldots, c_N)) \in \mathbb{Y}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ に対して, $\mathrm{wt}(\mathbb{T}) \in P$, $\varepsilon_j(\mathbb{T}), \varphi_j(\mathbb{T}) \in \mathbb{Z}$, $e_j\mathbb{T}, f_j\mathbb{T} \in \mathbb{Y}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda) \sqcup \{\mathbf{0}\}$ を次の手順により定める.

(1) $\mathrm{wt}(\mathbb{T}) = \sum_{\nu=1}^{N} \mathrm{wt}(\mathsf{T}_\nu) - \sum_{\nu=1}^{N} c_\nu \delta$.

(2) $\mathsf{T} \in \mathrm{CST}(\varpi_i)$ とする. $j \neq 0$ のとき, $\epsilon^{(j)}(\mathsf{T}) \in \{\oplus, \ominus, \bullet\}$ を

$$\epsilon^{(j)}(\mathsf{T}) = \begin{cases} \oplus & (j \in \mathsf{T} \text{ かつ } j+1 \notin \mathsf{T}), \\ \ominus & (j \notin \mathsf{T} \text{ かつ } j+1 \in \mathsf{T}), \\ \bullet & (\text{その他}) \end{cases}$$

と定める．同様に, $\epsilon^{(0)}(\mathsf{T}) \in \{\oplus, \ominus, \bullet\}$ を

$$\epsilon^{(0)}(\mathsf{T}) = \begin{cases} \oplus & (n \in \mathsf{T} \text{ かつ } 1 \notin \mathsf{T}), \\ \ominus & (n \notin \mathsf{T} \text{ かつ } 1 \in \mathsf{T}), \\ \bullet & (\text{その他}) \end{cases}$$

と定める．

(3) 列 $\left(\epsilon^{(j)}(\mathsf{T}_1), \ldots, \epsilon^{(j)}(\mathsf{T}_N)\right)$ において, $\nu < \nu'$ かつ $\epsilon^{(j)}(\mathsf{T}_\mu) = \bullet$ $(\nu < \mu < \nu')$ を満たすペア $\left(\epsilon^{(j)}(\mathsf{T}_\nu), \epsilon^{(j)}(\mathsf{T}_{\nu'})\right) = (\oplus, \ominus)$ を $(\bullet, \bullet)$ に置き換える．この操作を可能な限り繰り返し, その結果として得られる列を $\epsilon^{(j)}(\mathbb{T}) \in \{\oplus, \ominus, \bullet\}^N$ とする．

(4) $\varepsilon_j(\mathbb{T})$ を $\epsilon^{(j)}(\mathbb{T})$ における $\ominus$ の個数とする．また, $\varphi_j(\mathbb{T})$ を $\epsilon^{(j)}(\mathbb{T})$ における $\oplus$ の個数とする．

(5) $\epsilon^{(j)}(\mathbb{T})$ の中に $\ominus$ が存在しない場合, $e_j\mathbb{T} = \mathbf{0}$ と定める．また, $\epsilon^{(j)}(\mathbb{T})$ の中に $\ominus$ が存在する場合, 最も右の $\ominus$ が ν 番目であるならば,

$$e_j\mathbb{T} = (\mathsf{T}_1 \cdots \mathsf{T}_{\nu-1}\,(e_j\mathsf{T}_\nu)\,\mathsf{T}_{\nu+1} \cdots \mathsf{T}_N, (c_1, \ldots, c_{\nu-1}, c_\nu - \delta_{j,0}, c_{\nu+1}, \ldots, c_N))$$

と定める．このとき, $e_j\mathsf{T}_\nu \neq \mathbf{0}$ であることが分かる．

(6) $\epsilon^{(j)}(\mathbb{T})$ の中に $\oplus$ が存在しない場合, $f_j\mathbb{T} = \mathbf{0}$ と定める．また, $\epsilon^{(j)}(\mathbb{T})$ の中に $\oplus$ が存在する場合, 最も左の $\oplus$ が ν 番目であるならば,

$$f_j\mathbb{T} = (\mathsf{T}_1 \cdots \mathsf{T}_{\nu-1}\,(f_j\mathsf{T}_\nu)\,\mathsf{T}_{\nu+1} \cdots \mathsf{T}_N, (c_1, \ldots, c_{\nu-1}, c_\nu + \delta_{j,0}, c_{\nu+1}, \ldots, c_N))$$

と定める．このとき, $f_j\mathsf{T}_\nu \neq \mathbf{0}$ であることが分かる．

定理 3.3 ([11])**.** $\lambda = \sum_{i=1}^{n-1} m_i\varpi_i$ $(m_i \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}, 1 \leqq i \leqq n-1)$ とし, $\mathcal{B}(\lambda)$ を端ウェイト加群 $V(\lambda)$ の結晶基底とする．次が成り立つ．

- $(\mathbb{Y}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda), e_i, f_i, \varepsilon_i, \varphi_i, \mathrm{wt})$ は $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n(\mathbb{C}))$ 上の柏原結晶である．
- $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n(\mathbb{C}))$ 上の柏原結晶として $\mathbb{Y}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ と $\mathcal{B}(\lambda)$ とは同型である．

この定理の証明には, 命題 2.2 と定義 3.1 とに加え, 半無限ラクシュミバイ–セシャドゥリ道 ([13]) のなす柏原結晶のテンソル積の中の標準単項式に対する半無限ブリュア半順序による特徴付けが利用される．

半無限ヤング盤に関係する今後の研究課題としては,

- アフィン $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ の表現論への半無限ヤング盤の応用,

- 半無限ヤング盤に対するロビンソン–シェンステッド–クヌース対応 (またはプラクティック代数) の記述,
- 半無限ヤング盤と A 型の二重アフィン・ヘッケ環の既約表現を記述する巡回的ヤング盤 ([25]) との間の関係の記述

などを挙げることができる.

参考文献

[1] T. Akasaka and M. Kashiwara, Finite-dimensional representations of quantum affine algebras, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **33** (1997), 839-867.

[2] T. Arakawa, Two-sided BGG resolutions of admissible representations, *Represent. Theory* **18** (2014), 183-222.

[3] A. Björner and F. Brenti, An improved tableau criterion for Bruhat order, *Electron. J. Combin.* **3** (1996), 5pp.

[4] A. Björner and F. Brenti, Combinatorics of Coxeter Groups, Grad. Texts in Math., **231**, Springer, New York, 2005.

[5] J. Beck and H. Nakajima, Crystal bases and two-sided cells of quantum affine algebras, *Duke Math. J.* **123** (2004), 335-402.

[6] F. Brenti, S. Fomin, and A. Postnikov, Mixed Bruhat operators and Yang–Baxter equations for Weyl groups, *Internat. Math. Res. Notices* (1999), 419-441.

[7] V. V. Deodhar, Some characterizations of Bruhat ordering on a Coxeter group and determination of the relative Möbius function, *Invent. Math.* **39** (1977), 187-198.

[8] W. Fulton, Young Tableaux: With applications to representation theory and geometry, London Mathematical Society Student Texts **35**, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[9] B. Feigin, M. Finkelberg, A. Kuznetsov, and I. Mirković, Semi-infinite flags. Ⅱ. Local and global intersection cohomology of quasimaps' spaces. Differential topology, infinite-dimensional Lie algebras, and applications, 113-148, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 194, Adv. Math. Sci., 44, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[10] 石井基裕, 一般の extremal weight module のパス模型の構成に向けて, 第 31 回有限群論草津セミナー報告集 (2020), 69-78.

[11] M. Ishii, Semi-infinite Young tableaux and standard monomial theory for semi-infinite Lakshmibai–Seshadri paths, preprint.

[12] M. Ishii, Criteria for semi-infinite Bruhat order, preprint.

[13] M. Ishii, S. Naito, and D. Sagaki, Semi-infinite Lakshmibai–Seshadri path model for level-zero extremal weight modules over quantum affine algebras, *Adv. Math.* **290** (2016), 967-1009.

[14] M. Kashiwara, Crystal bases of modified quantized enveloping algebra, *Duke Math. J.* **73** (1994), 383-413.

[15] M. Kashiwara, On level zero representations of quantized affine algebras, *Duke Math. J.* **112** (2002), 117-175.

[16] M. Kashiwara, Level zero fundamental representations over quantized affine algebras and Demazure modules, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **41** (2005), 223-250.

[17] S. Kato, S. Naito, and D. Sagaki, Equivariant K-theory of semi-infinite flag manifolds and Pieri–Chevalley formula, preprint 2017, arXiv:1702.02408.

[18] J.-H. Kwon, Crystal graphs and the combinatorics of Young tableaux, Handbook of algebra. Vol. 6, 473-504, Handb. Algebr., 6, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2009.

[19] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, A uniform model for Kirillov–Reshetikhin crystals I: lifting the parabolic quantum Bruhat graph, *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2015** (2015), 1848-1901.

[20] P. Littelmann, Paths and root operators in representation theory, *Ann. of Math.* **142** (1995), 499-525.

[21] G. Lusztig, Hecke algebras and Jantzen's generic decomposition patterns, *Adv. Math.* **37** (1980), 121-164.

[22] S. Naito and D. Sagaki, Demazure submodules of level-zero extremal weight modules and specializations of Macdonald polynomials, *Math. Z.* **283** (2016), 937-978.

[23] D. Peterson, Quantum Cohomology of G/P, Lect. Notes, Massachusetts Institute of Technology, Spring, Cambridge, MA, 1997 (unpublished).

[24] M. Shimozono, Affine type A crystal structure on tensor products of rectan-

gles, Demazure characters, and nilpotent varieties, *J. Alg. Comb.* **15** (2002), 151-187.

[25] T. Suzuki and M. Vazirani, Tableaux on periodic skew diagrams and irreducible representations of the double affine Hecke algebra of type A, *Int. Math. Res. Not.* (2005), 1621-1656.