

Explicit Formula for Birational Rowmotion on Shifted Staircases

名古屋大学多元数理科学研究科

岡田 聡一

Soichi Okada

Graduate School of Mathematics, Nagoya University

1 はじめに

Rowmotion (Striker–Williams [10] による命名) やその区分線型版, 双有理版は半順序集合に付随して定まる全単射であり, その力学系としての性質がさまざまな半順序集合に対して調べられている. (サーベイ論文 [9], [8] やその参考文献などを参照されたい.) 本稿では, 鎖の直積半順序集合や shifted staircase と呼ばれる半順序集合上の双有理版 rowmotion を扱う.

まず, (組合せ論版) rowmotion の定義を思い出しておこう. 半順序集合 P に対して, P の順序イデアル (つまり, P の部分集合 I で「 $x \in I$ であり $y < x$ ならば $y \in I$ 」をみたすもの) 全体のなす集合を $\mathcal{J}(P)$ と表す. このとき, P 上の **rowmotion** とは,

$$\text{Row}(I) = (P \setminus I) \text{ の極小元全体を含む } P \text{ の順序イデアルのうちで最小のもの}$$

によって定義される全単射 $\text{Row} : \mathcal{J}(P) \rightarrow \mathcal{J}(P)$ のことである. 半順序集合 P が有限である場合には, Row を次のように局所的な変換に分解することができる. 各 $v \in P$ に対して, 写像 $t_v : \mathcal{J}(P) \rightarrow \mathcal{J}(P)$ (トグル (toggle) と呼ぶ) を

$$t_v(I) = \begin{cases} I \cup \{v\} & (v \notin I \text{ であり } I \cup \{v\} \in \mathcal{J}(P) \text{ であるとき}), \\ I \setminus \{v\} & (v \in I \text{ であり } I \setminus \{v\} \in \mathcal{J}(P) \text{ であるとき}), \\ I & (\text{その他}) \end{cases} \quad (1)$$

によって定義する. このとき,

$$\text{Row} = t_{v_1} \circ \cdots \circ t_{v_n} \quad (2)$$

(ここで, (v_1, \dots, v_n) は P の線型拡張, つまり, 「 P において $v_i \leq v_j$ ならば $i \leq j$ 」をみたすように P の元を並べたものである) と表される.

Einstein–Propp [2] は, (2) の表示に着目し, (組合せ論版) トグルを区分線型版, 双線型版のレベルに持ち上げることによって, 双線型版 rowmotion を導入した. 半順序集合 P に最大元 $\hat{1}$ と最小元 $\hat{0}$ を新たに付け加えてできる半順序集合を $\hat{P} = P \sqcup \{\hat{1}, \hat{0}\}$ と表し,

$$\mathcal{K}(P) = \{F : \hat{P} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} : F(\hat{1}) = F(\hat{0}) = 1\}$$

(ここで, $\mathbb{R}_{>0}$ は正の実数全体のなす集合を表す) とおく. 各 $v \in P$ に対して, 写像 $\tau_v : \mathcal{K}(P) \rightarrow \mathcal{K}(P)$ (双有理版トグル (birational toggle) と呼ぶ) を

$$(\tau_v F)(x) = \begin{cases} \frac{\sum_{w \in \hat{P}, w < v} F(w)}{F(v) \sum_{z \in \hat{P}, z > v} 1/F(z)} & (x = v \text{ のとき}), \\ F(x) & (x \neq v \text{ のとき}) \end{cases} \quad (3)$$

とおいて定める. ここで, 記号 $x < y$ は, $x < y$ であるが $x < z < y$ となる $z \in P$ が存在しないことを意味する. この双有理版トグルを用いて, 双有理版 rowmotion (birational rowmotion) $\rho : \mathcal{K}(P) \rightarrow \mathcal{K}(P)$ を

$$\rho = \tau_{v_1} \circ \cdots \circ \tau_{v_n} \quad (4)$$

(ただし, (v_1, \dots, v_n) は P の線型拡張である) によって定義する. 超離散化を施し順序多面体の頂点集合に制限することによって, 双有理版トグル・rowmotion から組合せ論版トグル・rowmotion が復元できる.

非負整数 r, s に対して,

$$R_{r,s} = [0, r] \times [0, s] = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq i \leq r, 0 \leq j \leq s\}$$

を, 鎖 (全順序集合ともいう) $[0, r] = \{0 < 1 < \cdots < r\}$, $[0, s] = \{0 < 1 < \cdots < s\}$ の直積半順序集合とする. つまり, $R_{r,s}$ 上の半順序は, $(i, j) \leq (i', j') \iff i \leq i', j \leq j'$ によって与えられる. このとき, Musiker–Roby [5] は, 双有理版 rowmotion を繰り返し施したときの $(\rho^k F)(v)$ ($v \in R_{r,s}$) の明示公式を利用して, 次の定理を証明している.

定理 1.1. 半順序集合 $P = R_{r,s}$ 上の双有理版 rowmotion ρ に対して,

(a) (Grinberg–Roby [4, Theorem 32]) 任意の $F \in \mathcal{K}(P)$ に対して,

$$(\rho^{i+j+1} F)(i, j) = \frac{1}{F(r-i, s-j)}. \quad (5)$$

(b) (Grinberg–Roby [4, Theorem 30]) 任意の $F \in \mathcal{K}(P)$ に対して, $\rho^{r+s+2} F = F$.

(c) (Musiker–Roby [5, Theorem 2.16]) $-r \leq l \leq s$ に対して, $P^l = \{(i, j) \in R_{r,s} : j - i = l\}$ とおく. このとき, 任意の $F \in \mathcal{K}(P)$ に対して,

$$\prod_{k=0}^{r+s+1} \prod_{v \in P^l} (\rho^k F)(v) = 1. \quad (6)$$

超離散化を施すことによって, この定理から, $P = R_{r,s}$ 上の組合せ論版 rowmotion Row の次の性質が導かれる.

(a) $(i, j) \in R_{r,s}$ と $I \in \mathcal{J}(P)$ に対して, $(i, j) \in \text{Row}^{i+j+1}(I)$ と $(r-i, s-j) \notin I$ とは同値である.

(b) (Brouwer–Schrijver [1, Theorem 3.6]) 任意の $I \in \mathcal{J}(P)$ に対して, $\text{Row}^{r+s+2}(I) = I$.

(c) (Propp–Roby [7, Theorem 23]) 任意の $I \in \mathcal{J}(P)$ に対して,

$$\frac{1}{r+s+2} \sum_{k=0}^{r+s+1} \#(\text{Row}^k(I) \cap P^l) = \begin{cases} \frac{(r+l+1)(s+1)}{r+s+2} & (-r \leq l \leq 0 \text{ のとき}), \\ \frac{(r+1)(s-l+1)}{r+s+2} & (0 \leq l \leq s \text{ のとき}). \end{cases}$$

非負整数 r に対して, $R_{r,r} = [0, r] \times [0, r]$ の部分半順序集合 S_r を

$$S_r = \{(i, j) \in R_{r,r} : 0 \leq i \leq j \leq r\}$$

とにおいて定め, **shifted staircase** と呼ぶ. 本稿の主目的は, 双有理版 rowmotion を繰り返し施したときの対角成分 $(\rho^k F)(i, i)$ ($0 \leq i \leq r$) の明示公式を与え, それを利用して次の定理の (d) を証明することである.

定理 1.2. 半順序集合 $P = S_r$ 上の双有理版 rowmotion ρ に対して,

(a) 任意の $F \in \mathcal{K}(P)$ に対して,

$$(\rho^{i+j+1} F)(i, j) = \frac{1}{F(r-j, r-i)}. \quad (7)$$

(b) (Grinberg–Roby [4, Theorem 58]) 任意の $F \in \mathcal{K}(P)$ に対して, $\rho^{2r+2} F = F$.

(c) $0 \leq l \leq r$ に対して, $P^l = \{(i, j) \in S_r : j - i = l\}$ とおく. このとき, 任意の $F \in \mathcal{K}(P)$ に対して,

$$\prod_{k=0}^{r+s+1} \prod_{v \in P^l} (\rho^k F)(v) = 1. \quad (8)$$

(d) $P^{0,\text{even}} = \{(i, i) \in S_r : i \text{ は偶数}\}$, $P^{0,\text{odd}} = \{(i, i) \in S_r : i \text{ は奇数}\}$ とおく. このとき, 任意の $F \in \mathcal{K}(P)$ に対して,

$$\prod_{k=0}^{r+s+1} \prod_{v \in P^{0,\text{even}}} (\rho^k F)(v) = \prod_{k=0}^{r+s+1} \prod_{v \in P^{0,\text{odd}}} (\rho^k F)(v) = 1. \quad (9)$$

半順序集合 $R_{r,s}$, S_r はそれぞれ A 型, D 型のミニスキュール半順序集合であり, 定理 1.1, 1.2 は任意のミニスキュール半順序集合に対して一般化できる ([6] を見よ).

本稿の構成は以下の通りである. 第 2 節では, 鎖の直積 $R_{r,s}$ に対する Musiker–Roby の明示公式を紹介し, その証明の鍵となる Plücker 型関係式の別証明を与える. 第 3 節では, shifted staircase S_r に対して同様の明示公式を与える. 第 4 節では, 第 2 節, 第 3 節で与えた明示公式を用いた定理 1.1 (c), 1.2 (d) の証明の概要を説明する.

2 鎖の直積の場合の明示公式

この節では, Musiker–Roby の明示公式を紹介し, 彼らの証明で鍵となる Plücker 型関係式の別証明を与える.

まず, Musiker–Roby の公式を述べるために, 記号を用意する. D を \mathbb{Z}^2 の部分集合とする. $u, v \in D$ に対して, u から v への D 内の格子経路 (lattice path) とは, D の元の列

$L = (v_1, v_2, \dots, v_r)$ で, $v_1 = u, v_r = v, v_{i+1} - v_i \in \{(1, 0), (0, 1)\}$ ($1 \leq i \leq r-1$) をみたすもののことである. u から v への D 内の格子経路全体のなす集合を $\mathcal{P}(D; u; v)$ と表す. 格子経路の組 (L_1, \dots, L_k) は, どの 2 つの格子経路 L_i, L_j も共有点を持たないとき, 非交差 (non-intersecting) であるという. D の点列 $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k), \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_k) \in D^k$ に対して, 非交差格子経路 (L_1, \dots, L_k) で $L_i \in \mathcal{P}(D; u_i; v_i)$ ($1 \leq i \leq k$) であるもの全体のなす集合を $\mathcal{L}^0(D; \mathbf{u}; \mathbf{v})$ とおく. D の各点 v に与えられた重み $Z(v)$ を用いて, 格子経路 L , 格子経路の組 $\mathbf{L} = (L_1, \dots, L_k)$ の重み $\text{wt}(L), \text{wt}(\mathbf{L})$ をそれぞれ

$$\text{wt}(L) = \prod_{i=1}^r Z(v_i), \quad \text{wt}(\mathbf{L}) = \prod_{j=1}^k \text{wt}(L_j)$$

と定義する. そして,

$$\xi(D; \mathbf{u}; \mathbf{v}) = \sum_{\mathbf{L} \in \mathcal{L}^0(D; \mathbf{u}; \mathbf{v})} \text{wt}(\mathbf{L}), \quad \pi(D) = \prod_{v \in D} Z(v)$$

とおく. つまり, $\xi(D; \mathbf{u}; \mathbf{v})$ は非交差格子経路の母関数である.

定義 2.1. 2 点 $(a, b), (c, d) \in R_{r,s} = [0, r] \times [0, s]$ (ただし, $a \leq c, b \leq d$ とする) と非負整数 k に対して,

$$H_k(a, b; c, d) = \left\{ (i, j) \in R_{r,s} : \begin{array}{l} a \leq i \leq c, b \leq j \leq d \\ a + b + k - 1 \leq i + j \leq c + d - k + 1 \end{array} \right\} \quad (10)$$

とおく. $H_k(a, b; c, d)$ 内の $2k$ 個の点

$$u_i = (a + i - 1, b + k - i), \quad v_i = (c - k + i, d - i + 1) \quad (1 \leq i \leq k)$$

を考え,

$$\varphi_k(a, b; c, d) = \frac{\xi(H_k(a, b; c, d); u_1, \dots, u_k; v_1, \dots, v_k)}{\pi(H_k(a, b; c, d))} \quad (11)$$

と定義する. ここで, $k = 0$ のときは, $\xi(H_0(a, b; c, d); \emptyset; \emptyset) = 1$ であると約束する.

部分集合 $H_k(a, b; c, d)$ は長方形 $[a, c] \times [b, d]$ 内の六角形状の領域 ($k \geq 2$ のとき) であり, u_1, \dots, u_k はその下端の辺を構成する k 個の点, v_1, \dots, v_k はその上端の辺を構成する k 個の点である.

例 2.2. 例えば, $r = s = 3, (a, b) = (1, 0), (c, d) = (3, 2), k = 2$ のとき, $H_2(1, 0; 3, 2)$ は図 1 において黒丸で表した 7 個の点からなり,

$$\begin{aligned} & Z(2, 0)Z(3, 0)Z(3, 1) \cdot Z(1, 1)Z(2, 1)Z(2, 2) \\ & + Z(2, 0)Z(3, 0)Z(3, 1) \cdot Z(1, 1)Z(1, 2)Z(2, 2) \\ & + Z(2, 0)Z(2, 1)Z(3, 1) \cdot Z(1, 1)Z(1, 2)Z(2, 2) \\ \varphi_2(1, 0; 3, 2) = & \frac{Z(2, 0)Z(3, 0)Z(3, 1) \cdot Z(1, 1)Z(2, 1)Z(2, 2) \\ & + Z(2, 0)Z(3, 0)Z(3, 1) \cdot Z(1, 1)Z(1, 2)Z(2, 2) \\ & + Z(2, 0)Z(2, 1)Z(3, 1) \cdot Z(1, 1)Z(1, 2)Z(2, 2)}{Z(2, 0)Z(1, 1)Z(3, 0)Z(2, 1)Z(1, 3)Z(3, 1)Z(2, 2)} \end{aligned}$$

となる.

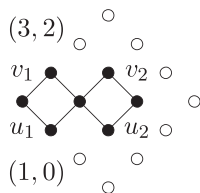


図 1: $H_2(1, 0; 3, 2)$

Musiker–Roby は、双有理版 rowmotion を繰り返し施したときの成分を、非交差格子経路を用いて具体的に表す公式を与えている。

定理 2.3. (Musiker–Roby [5, Theorem 2.7]) $P = R_{r,s}$ とする. $X \in \mathcal{K}(P)$ が与えられたとき, $\{X(v) : v \in P\}$ を変数とみなし, 変数変換

$$Z(v) = \begin{cases} X(v) & (v = (0, 0) \text{ のとき}) \\ \frac{X(v)}{\sum_{w \in P, w < v} X(w)} & (\text{その他}) \end{cases} \quad (12)$$

によって定まる $Z(v)$ を $v \in P$ の重みとする. このとき, $0 \leq k \leq i + j$ に対して,

$$\left(\rho^{k+1} X\right)(i, j) = \frac{\varphi_{k-M}([i-k]_+, [j-k]_+; r - [k-i]_+, s - [j-k]_+)}{\varphi_{k-M+1}([i-k]_+, [j-k]_+; r - [k-i]_+, s - [j-k]_+)}. \quad (13)$$

ここで, $M = [k-i]_+ + [k-j]_+$ であり, $[x]_+ = \max\{x, 0\}$ である.

この明示公式から, 定理 1.1 (a), (b) は容易に導かれる. また, 定理 1.1 (a) と明示公式 (13) から, $i + j \leq k \leq r + s + 1$ の場合の $(\rho^k X)(i, j)$ に対する明示公式も得られる. さて, 定理 2.3 の証明で鍵となるのは, φ_k に対する次の Plücker 型関係式である.

命題 2.4. ([5, Lemma 3.4])

(a) $1 \leq k \leq \min\{c - a + 1, d - b + 1\}$ に対して,

$$\begin{aligned} \varphi_k(a, b; c, d) \cdot \varphi_{k-1}(a + 1, b + 1; c, d) \\ = \varphi_k(a + 1, b; c, d) \cdot \varphi_{k-1}(a, b + 1; c, d) \\ + \varphi_k(a, b + 1; c, d) \cdot \varphi_{k-1}(a + 1, b; c, d). \end{aligned} \quad (14)$$

(b) $1 \leq k \leq \min\{c - a, d - b\}$ に対して,

$$\begin{aligned} \varphi_k(a, b; c, d) \cdot \varphi_k(a + 1, b; c + 1, d) \\ = \varphi_{k+1}(a, b; c + 1, d) \cdot \varphi_{k-1}(a + 1, b; c, d) \\ + \varphi_k(a + 1, b; c, d) \cdot \varphi_k(a, b; c + 1, d). \end{aligned} \quad (15)$$

原論文 [5] では全単射を構成することによってこの命題を証明しているが, ここでは次の一般的な行列式の関係式 (Desnanot–Jacobi 型の公式) を用いることによってこの命題に代数的な証明を与える.

補題 2.5. 行列 B と行添字 i_1, \dots, i_r , 列添字 j_1, \dots, j_s が与えられたとき, B から i_1 行, \dots , i_r 行, j_1 列, \dots , j_s 列を取り除いて得られる行列を $B_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}$ と表す. このとき,

(a) $(m+1) \times m$ 行列 B と行添字 $i < j < k$, 列添字 l に対して,

$$\det B^i \cdot \det B_l^{j,k} - \det B^j \cdot \det B_l^{i,k} + \det B^k \cdot \det B_l^{i,j} = 0. \quad (16)$$

(b) (Desnanot–Jacobi の公式) $m \times m$ 行列 B と行添字 $i < j$, 列添字 $k < l$ に対して,

$$\det B \cdot \det B_{k,l}^{i,j} - \det B_k^i \cdot \det B_l^j + \det B_l^i \cdot \det B_k^j = 0. \quad (17)$$

命題 2.4 の証明. (14) を示すために, 次の点を考える:

$$u_i = (a + k - i, b + i - 1) \quad (1 \leq i \leq k),$$

$$v_i = (a + k - i + 1, b + i - 1) \quad (1 \leq i \leq k + 1),$$

$$w_i = (c - i + 1, d - k + i) \quad (1 \leq i \leq k),$$

$$z_i = (c - i + 1, d - k + i + 1) \quad (1 \leq i \leq k - 1).$$

(例えば, $a = 0, b = 0, c = 5, d = 6, k = 4$ のとき, u_i, v_i, w_i, z_i は図 2 のように配置されてる.) 始点 s から終点 t への格子経路の母関数を $\zeta(s; t)$ と略記する. このとき, (14)

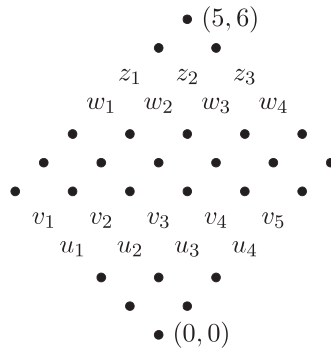


図 2: $a = 0, b = 0, c = 5, d = 6, k = 4$ の場合

の各因子の分子に現れる非交差格子経路の母関数は, $\zeta(v_i, w_j)$ のみを含む行列式と $Z(u_i)$, $Z(z_j)$ の積で表される. 例えば, u_i から w_j への格子経路は必ず v_i または v_{i+1} を通るから,

$$\zeta(u_i; w_j) = Z(u_i) \cdot (\zeta(v_i; w_j) + \zeta(v_{i+1}; w_j)).$$

よって, Lindström–Gessel–Viennot の補題を用いると,

$$\begin{aligned} \xi(H_k(a, b; c, d); u_1, \dots, u_k; w_1, \dots, w_k) &= \det (\zeta(u_i; w_j))_{1 \leq i, j \leq k} \\ &= \prod_{i=1}^k Z(u_i) \cdot \det (\zeta(v_i; w_j) + \zeta(v_{i+1}; w_j))_{1 \leq i, j \leq k}. \end{aligned}$$

一方, $H_k(a, b; c, d)$ の定義 (10) から, (14) の各因子の分母は関係式

$$\begin{aligned} & \pi(H_k(a, b; c, d)) \cdot \pi(H_{k-1}(a+1, b+1; c, d)) \\ &= Z(u_1) \cdot \pi(H_k(a+1, b; c, d)) \cdot \pi(H_{k-1}(a, b+1; c, d)) \\ &= Z(u_k) \cdot \pi(H_k(a, b+1; c, d)) \cdot \pi(H_{k-1}(a+1, b; c, d)) \end{aligned}$$

をみたしている. この考察から, $b_{i,j} = \zeta(v_i; w_j)$ ($1 \leq i \leq k+1, 1 \leq j \leq k$) とおくととき, (14) は

$$\begin{aligned} & \det(b_{i,j} + b_{i+1,j})_{1 \leq i,j \leq k} \cdot \det(b_{i+1,j} + b_{i+1,j+1})_{1 \leq i,j \leq k-1} \\ &= \det(b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k} \cdot \det(b_{i,j+1} + b_{i,j+2} + b_{i+1,j+1} + b_{i+1,j+2})_{1 \leq i,j \leq k-1} \\ & \quad + \det(b_{i+1,j})_{1 \leq i,j \leq k} \cdot \det(b_{i,j} + b_{i,j+1} + b_{i+1,j} + b_{i+1,j+1})_{1 \leq i,j \leq k-1} \end{aligned} \quad (18)$$

と同値であることがわかる.

ここで, $(k+2) \times (k+1)$ 行列 $\tilde{B} = (\tilde{b}_{i,j})_{0 \leq i \leq k+1, 0 \leq j \leq k}$ を

$$\tilde{b}_{i,j} = \begin{cases} 0 & (i = j = 0 \text{ のとき}) \\ (-1)^{j-1} & (i = 0, 1 \leq j \leq k \text{ のとき}) \\ (-1)^{i-1} & (1 \leq i \leq k+1, j = 0 \text{ のとき}) \\ b_{i,j} & (1 \leq i \leq k+1, 1 \leq j \leq k \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおいて定める. すると, 基本変形を施すことにより,

$$\det \tilde{B}^0 = \det(b_{i,j} + b_{i+1,j})_{1 \leq i,j \leq k}, \quad \det \tilde{B}_0^{1,k+1} = \det(b_{i+1,j} + b_{i+1,j+1})_{1 \leq i,j \leq k-1}$$

などとなることがわかるので, (18) は (16) から従う. 同様にして, (15) は (17) を用いることによって証明できる. \square

3 Shifted staircase の場合の明示公式

この節では, shifted staircase $S_r = \{(i, j) : 0 \leq i \leq j \leq r\}$ 上の双有理版 rowmotion を繰り返し施したときの対角成分の明示公式を与える.

定義 3.1. $0 \leq a \leq c \leq r$ と非負整数 k に対して,

$$K_k^{\leq}(a; c) = \left\{ (i, j) \in S_r : \begin{array}{l} a \leq i \leq j \leq c \\ 2a + 2k - 2 \leq i + j \leq 2c - 2k + 2 \end{array} \right\}, \quad (19)$$

$$K_k^{<}(a; c) = \left\{ (i, j) \in S_r : \begin{array}{l} a \leq i < j \leq c \\ 2a + 2k - 1 \leq i + j \leq 2c - 2k + 1 \end{array} \right\} \quad (20)$$

とおく. $K_k^{\leq}(a; c)$ 内の $2k$ 個の点 u_i^{\leq}, v_i^{\leq} ($1 \leq i \leq k$) と $K_k^{<}(a; c)$ 内の $2k$ 個の点 $u_i^{<}, v_i^{<}$ ($1 \leq i \leq k$) を

$$\begin{aligned} u_i^{\leq} &= (a+k-i, a+k+i-2), & v_i^{\leq} &= (c-k-i+2, c-k+i), \\ u_i^{<} &= (a+k-i, a+k+i-1), & v_i^{<} &= (c-k-i+1, c-k+i) \end{aligned}$$

と定めて、重み $\{Z(v) : v \in S_r\}$ に関する $K_k^{\leq}(a; c)$, $K_k^<(a; c)$ 内の非交差格子経路の母関数を用いて、

$$\psi_k^{\leq}(a; c) = \frac{\xi(K_k^{\leq}(a; c); u_1^{\leq}, \dots, u_k^{\leq}; v_1^{\leq}, \dots, v_k^{\leq})}{\pi(K_k^{\leq}(a; c))}, \tag{21}$$

$$\psi_k^<(a; c) = \frac{\xi(K_k^<(a; c); u_1^<, \dots, u_k^<; v_1^<, \dots, v_k^<)}{\pi(K_k^<(a; c))} \tag{22}$$

と定義する。

例 3.2. $r = 4, a = 0, c = 4, k = 2$ のとき, $K_2^{\leq}(0; 4)$ は図 3 において黒丸で表した 11 個の点からなり, $K_2^<(0; 4)$ は図 4 において黒丸で表した 6 個の点からなる。また、

$$\begin{aligned} & Z(1, 1)Z(1, 2)Z(2, 2)Z(2, 3)Z(3, 3) \cdot Z(0, 2)Z(0, 3)Z(1, 3)Z(1, 4)Z(2, 4) \\ & + Z(1, 1)Z(1, 2)Z(2, 2)Z(2, 3)Z(3, 3) \cdot Z(0, 2)Z(0, 3)Z(0, 4)Z(1, 4)Z(2, 4) \\ & + Z(1, 1)Z(1, 2)Z(1, 3)Z(2, 3)Z(3, 3) \cdot Z(0, 2)Z(0, 3)Z(0, 4)Z(1, 4)Z(2, 4) \\ \psi_2^{\geq}(0; 4) = & \frac{Z(1, 1)Z(0, 2)Z(1, 2)Z(0, 3)Z(2, 2)Z(1, 3)Z(0, 4)Z(2, 3)Z(1, 4)Z(3, 3)Z(2, 4)}{Z(1, 2)Z(1, 3)Z(2, 3) \cdot Z(0, 3)Z(0, 4)Z(1, 4)} \\ \psi_2^>(0; 4) = & \frac{Z(1, 2)Z(1, 3)Z(2, 3) \cdot Z(0, 3)Z(0, 4)Z(1, 4)}{Z(1, 2)Z(0, 3)Z(1, 3)Z(0, 4)Z(2, 3)Z(1, 4)} \end{aligned}$$

である。

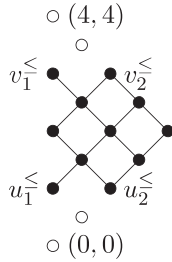


図 3: $K_2^<(0; 4)$

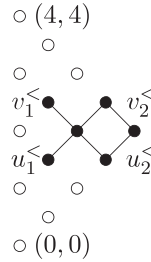


図 4: $K_2^{\leq}(0; 4)$

これらの記号を用いると、この節の主定理は次のように述べることができる。

定理 3.3. $P = S_r$ とする。 $X \in \mathcal{K}(P)$ が与えられたとき、 $\{X(v) : v \in P\}$ を変数とみなし、変数変換

$$Z(v) = \begin{cases} X(v) & (v = (0, 0) \text{ のとき}) \\ \frac{X(v)}{\sum_{w \in P, w < v} X(w)} & (\text{その他}) \end{cases} \tag{23}$$

によって定まる $Z(v)$ を $v \in P$ の重みとする。このとき、 $0 \leq k \leq 2i$ に対して、

$$(\rho^{k+1} X)(i, i) = \begin{cases} \frac{\psi_{(k-M)/2}^{\leq}([i-k]_+; r - [k-i]_+)}{\psi_{(k-M)/2+1}^{\leq}([i-k]_+; r - [k-i]_+)} & (k \text{ が偶数であるとき}), \\ \frac{\psi_{(k-M-1)/2}^{\leq}([i-k]_+; r - [k-i]_+)}{\psi_{(k-M-1)/2+1}^{\leq}([i-k]_+; r - [k-i]_+)} & (k \text{ が奇数であるとき}). \end{cases}$$

ここで、 $M = 2[k-i]_+$, $[x]_+ = \max\{x, 0\}$ である。

この定理を証明するために、まず S_r 上の双有理版 rowmotion と $R_{r,r}$ 上の双有理版 rowmotion を比較する。 $P = S_r \subset \tilde{P} = R_{r,r}$ とおき、 P 上の双有理版 rowmotion を ρ 、 \tilde{P} 上の双有理版 rowmotion を $\tilde{\rho}$ と表す。

補題 3.4. $X \in \mathcal{K}(P)$ とする。

(a) $\tilde{X} \in \mathcal{K}(\tilde{P})$ を

$$\tilde{X}(i, j) = \begin{cases} X(i, j) & (i \leq j \text{ のとき}) \\ X(j, i) & (i > j \text{ のとき}) \end{cases} \quad (24)$$

によって定義する。このとき、 $(i, j) \in S_r$ に対して、

$$\left(\rho^k X\right)(i, j) = \left(\tilde{\rho}^k \tilde{X}\right)(i, j) \times \begin{cases} 1/2 & (1 \leq k \leq i+j \text{ のとき}) \\ 1 & (k = i+j+1 \text{ のとき}) \\ 2 & (i+j+2 \leq k \leq 2r+1 \text{ のとき}) \\ 1 & (k = 2r+2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(b) $Z \in \mathcal{K}(P)$ を (23) で定め、 $\tilde{Z} \in \mathcal{K}(\tilde{P})$ を

$$\tilde{Z}(i, j) = \begin{cases} Z(i, j) & (i < j \text{ のとき}) \\ Z(i, i)/2 & (i = j \text{ のとき}) \\ Z(j, i) & (i > j \text{ のとき}) \end{cases} \quad (25)$$

によって定義する。このとき、変数変換 (12) のもとで $X = \tilde{Y}$ と $Z = \tilde{Z}$ が対応しているとする、

$$\left(\rho^k X\right)(i, j) = \left(\tilde{\rho}^k \tilde{Y}\right)(i, j) \times \begin{cases} 1/2 & (1 \leq k \leq i+j+1 \text{ のとき}) \\ 2 & (i+j+2 \leq k \leq 2r+1 \text{ のとき}) \\ 1 & (k = 2r+2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

この補題 3.4 の (a) を用いると、定理 1.1 (a), (b), (c) から定理 1.2 (a), (b), (c) を導くことができる。

以下では、補題 3.4 の (b) を用いて、定理 2.3 の明示公式から定理 3.3 の明示公式を導く。 $\kappa: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ を $\kappa(i, j) = (j, i)$ で与えられる対合とする。 κ 不変な部分集合 $D \subset \mathbb{Z}^2$ に対して、

$$D^{\leq} = \{(i, j) \in D : i \leq j\}, \quad D^{<} = \{(i, j) \in D : i < j\}, \quad D^= = \{(i, j) \in D : i = j\}$$

とおく。 D 内の点列 $\mathbf{w} = (w_{-k}, \dots, w_{-1}, (w_0), w_1, \dots, w_k)$ 、 $\mathbf{z} = (z_{-k}, \dots, z_{-1}, (z_0), z_1, \dots, z_k)$ で、 $\kappa(w_i) = w_{-i}$ 、 $\kappa(z_i) = z_{-i}$ ($0 \leq i \leq k$)、 $w_1, \dots, w_k, z_1, \dots, z_k \in D^{<}$ (このとき $w_0, z_0 \in D^=$ である) をみたしているものに対して、

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{\leq} &= ((w_0), w_1, \dots, w_k), & \mathbf{w}^{<} &= (w_1, \dots, w_k), \\ \mathbf{z}^{\leq} &= ((z_0), z_1, \dots, z_k), & \mathbf{z}^{<} &= (z_1, \dots, z_k) \end{aligned}$$

とおき、非交差格子経路の母関数

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}(D; \mathbf{w}; \mathbf{z}) &= \sum_{L \in \mathcal{L}^0(D; \mathbf{w}; \mathbf{z})} \widetilde{\text{wt}}(L), \\ \xi(D^{\leq}; \mathbf{w}^{\leq}; \mathbf{z}^{\leq}) &= \sum_{L \in \mathcal{L}^0(D^{\leq}; \mathbf{w}^{\leq}; \mathbf{z}^{\leq})} \text{wt}(L), \\ \xi(D^{<}; \mathbf{w}^{<}; \mathbf{z}^{<}) &= \sum_{L \in \mathcal{L}^0(D^{<}; \mathbf{w}^{<}; \mathbf{z}^{<})} \text{wt}(L)\end{aligned}$$

を考える。ここで、 $\text{wt}(L)$ は $\{Z(v) : v \in S_r\}$ に関する重みであり、 $\widetilde{\text{wt}}(L)$ は (25) によって与えられる $\{\tilde{Z}(v) : v \in R_{r,r}\}$ に関する重みである。

補題 3.5. 上の記号のもとで、

(a) $\mathbf{w} = (w_{-k}, \dots, w_{-1}, w_1, \dots, w_k)$, $\mathbf{z} = (z_{-k}, \dots, z_{-1}, z_1, \dots, z_k)$ に対して、

$$\tilde{\xi}(D; \mathbf{w}; \mathbf{z}) = \xi(D^{\leq}; \mathbf{w}^{\leq}; \mathbf{z}^{\leq}) \cdot \xi(D^{<}; \mathbf{w}^{<}; \mathbf{z}^{<}).$$

(b) $\mathbf{w} = (w_{-k}, \dots, w_{-1}, w_0, w_1, \dots, w_k)$, $\mathbf{z} = (z_{-k}, \dots, z_{-1}, z_0, z_1, \dots, z_k)$ に対して、

$$\tilde{\xi}(D; \mathbf{w}; \mathbf{z}) = \frac{1}{2} \xi(D^{\leq}; \mathbf{w}^{\leq}; \mathbf{z}^{\leq}) \cdot \xi(D^{<}; \mathbf{w}^{<}; \mathbf{z}^{<}).$$

補題 3.4, 3.5 を用いて、定理 3.3 を証明する。

定理 3.3 の証明. 定義 2.1 の (11) で定義される $Z(v)$ ($v \in \tilde{P} = R_{r,r}$) の Laurent 多項式 $\varphi_k(a, a; c, c)$ において、 $Z(v)$ を $\tilde{Z}(v)$ で置き換えて得られる Laurent 多項式を $\tilde{\varphi}_k(a, a; c, c)$ と表す。このとき、定理 2.3, 補題 3.4 より、

$$\frac{\tilde{\varphi}_{2k}(a, a; c, c)}{\tilde{\varphi}_{2k+1}(a, a; c, c)} = 2 \cdot \frac{\psi_k^{\leq}(a; c)}{\psi_k^{<}(a; c)}, \quad \frac{\tilde{\varphi}_{2k+1}(a, a; c, c)}{\tilde{\varphi}_{2k+2}(a, a; c, c)} = 2 \cdot \frac{\psi_k^{\leq}(a; c)}{\psi_k^{<}(a; c)} \quad (26)$$

を示せば十分である。

まず、 $\tilde{\varphi}_k(a, a; c, c)$ を考える。 $D = H_{2k}(a, a; c, c)$ とし、

$$w_{-i} = (a + k + i - 1, a + k - i), \quad w_i = (a + k - i, a + k + i - 1) \quad (1 \leq i \leq k),$$

$$z_{-i} = (c - k + i, c - k - i + 1), \quad z_i = (c - k - i + 1, c - k + i) \quad (1 \leq i \leq k)$$

とおくと、定義 2.1 より、

$$\tilde{\varphi}_{2k}(a, a; c, c) = \frac{\tilde{\xi}(D; \mathbf{w}; \mathbf{z})}{\tilde{\pi}(D)}.$$

ここで、 $\tilde{\pi}(D) = \prod_{v \in D} \tilde{Z}(v)$ である。補題 3.5 より、

$$\tilde{\xi}(D; \mathbf{w}; \mathbf{z}) = \xi(D^{\leq}; \mathbf{w}^{\leq}; \mathbf{z}^{\leq}) \cdot \xi(D^{<}; \mathbf{w}^{<}; \mathbf{z}^{<}).$$

また、 $\#D^{\leq} = c - a - 2k + 1$ だから、

$$\tilde{\pi}(D) = \frac{1}{2^{c-a-2k+1}} \cdot \pi(D^{\leq}) \cdot \pi(D^{<}).$$

ここで, (10), (19), (20) を比較すると,

$$K_k^{\leq}(a; c) = D^{\leq} \sqcup \{u_1^{\leq}, \dots, u_k^{\leq}, v_1^{\leq}, \dots, v_k^{\leq}\}, \quad D^{\leq} = K_k^{\leq}(a; c),$$

であり, $w_i = u_i^{\leq}$, $z_i = v_i^{\leq}$ ($1 \leq i \leq k$) である. 以上から,

$$\tilde{\varphi}_{2k}(a, a; c, c) = 2^{c-a-2k+1} \cdot \psi_k^{\leq}(a; c) \cdot \psi_k^{\leq}(a; c)$$

となることがわかる. 同様にして,

$$\tilde{\varphi}_{2k+1}(a, a; c, c) = 2^{c-a-2k} \cdot \psi_{k+1}^{\leq}(a; c) \cdot \psi_k^{\leq}(a; c).$$

この 2 つの関係式から, (26) が従う. □

4 明示公式の応用

この節では, 第 2 節, 第 3 節の明示公式 (定理 2.3, 3.3) を用いた定理 1.1 (c), 1.2 (d) の証明の概要を説明する.

まず, 定理 1.1 (c) を証明する. この主張は [5] で証明されているが, ここではより整理された証明を与える.

定理 1.1 (c) の証明. $P = R_{r,s}$ とおき, $l \geq 0$ の場合を考える. ($l \leq 0$ の場合も同様である.) 定理 1.1 (b) の周期性に注意すると,

$$\prod_{k=0}^{r+s+1} \prod_{v \in P^l} (\rho^k X)(v) = \prod_{k=0}^{r+s+1} \prod_{i: (i, i+l) \in P^l} (\rho^{k+i+1} X)(i, i+l).$$

そこで, 右辺の内側の積を計算する.

補題 4.1. $(a, b), (c, d) \in R_{r,s}$ (ただし, $a \leq c, b \leq d$ とする) に対して,

$$\theta(a, b; c, d) = \prod_{i=a}^c \prod_{j=b}^d Z(i, j)$$

とおく. このとき,

(a) $0 \leq l \leq s-r$ のとき,

$$\prod_{i=0}^r X^{(k+i+1)}(i, i+l) = \begin{cases} 1 & (0 \leq k \leq l \text{ のとき}), \\ \frac{\theta(0, l-k; r, s-k)}{\theta(r+l-k+1, s-k+1; r, s)} & (l+1 \leq k \leq l+r \text{ のとき}), \\ \theta(0, s-k+1; r, r+s+l-k+1) & (l+r+1 \leq k \leq s+1 \text{ のとき}), \\ \frac{\theta(0, 0; r+s-k+1, r+s+l-k+1)}{\theta(r+s-k+2, r+s+l-k+2; r, s)} & (s+2 \leq k \leq r+s+1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

(b) $s - r \leq l \leq s$ のとき,

$$\prod_{i=0}^{s-l} X^{(k+i+1)}(i, i+l) = \begin{cases} 1 & (0 \leq k \leq l \text{ のとき}), \\ \frac{\theta(0, l-k; r, s-k)}{\theta(r+l-k+1, s-k+1; r, s)} & (l+1 \leq k \leq s \text{ のとき}), \\ \frac{\theta(0, 0; r+l-k, s-k)}{\theta(r+l-k+1, 0; r+s-k+1, s)} & (s+1 \leq k \leq r+l \text{ のとき}), \\ \frac{\theta(0, 0; r+s-k+1, r+s+l-k+1)}{\theta(r+s-k+2, r+s+l-k+2; r, s)} & (r+l+1 \leq k \leq r+s+1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

補題 4.1 の証明. 例えば, $0 \leq k \leq l \leq s - r$ のとき, 定理 2.3 より

$$\left(\rho^{k+i+1} X\right)(i, i+l) = \frac{\varphi_i(0, l-k; r, s-k)}{\varphi_{i+1}(0, l-k; r, s-k)}$$

となるから,

$$\prod_{i=0}^r \left(\rho^{k+i+1} X\right)(i, i+l) = \frac{\varphi_0(0, l-k; r, s-k)}{\varphi_{r+1}(0, l-k; r, s-k)}.$$

ここで, $\varphi_0(0, l-k; r, s-k) = 1/\theta(0, l-k; r, s-k)$, $\varphi_{r+1}(0, l-k; r, s-k) = 1$ であることに注意すると, 求める結論が得られる. 他の場合も複雑にはなるが同様である. \square

この補題を用いて, 定理 1.1 (c) の証明を完成させる. $0 \leq i \leq r$ または $0 \leq j \leq s$ をみたす $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ に対して, $Z'(i, j)$ を

$$Z'(i, j) = \begin{cases} Z(i, j) & (0 \leq i \leq r, 0 \leq j \leq s \text{ のとき}), \\ 1 & (0 \leq i \leq r, s+1 \leq j \leq r+s+1 \text{ のとき}), \\ 1 & (r+1 \leq i \leq r+s+1, 0 \leq j \leq s \text{ のとき}) \end{cases}$$

と周期性 $Z'(i+r+s+2, j) = Z'(i, j+r+s+2) = Z'(i, j)$ によって定義する. そして,

$$\theta'(a, b; c, d) = \prod_{i=a}^c \prod_{j=b}^d Z'(i, j)$$

とおくと, 補題 4.1 の主張は,

$$\prod_{(i, i+l) \in P^l} \left(\rho^{k+i+1} X\right)(i, j) = \frac{\theta'(r+l-k, 0; r+s-k+1, s)}{\theta'(0, l-k; r, s-k)} \quad (l \geq 0, 0 \leq k \leq r+s+1)$$

と書き直すことができる. ここで, $Z'(i, j)$ の周期性を用いると,

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{r+s+1} \prod_{v \in P^l} \left(\rho^k X\right)(v) &= \frac{\prod_{k=0}^{r+s+1} \theta'(r+l-k, 0; r+s-k+1, s)}{\prod_{k=0}^{r+s+1} \theta'(0, l-k; r, s-k)} \\ &= \frac{(\theta'(0, 0; r, s))^{s-l+1}}{(\theta'(0, 0; r, s))^{s-l+1}} = 1 \end{aligned}$$

となり, 証明が完成する. \square

次に、定理 1.2 (d) の証明を与える。(定理 1.2 (c) は、補題 3.3 と定理 1.1 (c) からすぐわかる.)

定理 1.2 (d) の証明. $P = S_r$ とおき, $P^{0,\text{even}}$ の場合を示す. ($P^{0,\text{odd}}$ についても同様である.)

まず, $r = 2m$ が偶数である場合を考える. この場合は, 定理 1.2 (a) より

$$\prod_{k=0}^{2r+1} (\rho^k X)(i, i) \cdot \prod_{k=0}^{2r+1} (\rho^k X)(r-i, r-i) = 1$$

となることを用いればよい.

次に, $r = 2m - 1$ が奇数である場合を考える. 定理 1.2 (b) の周期性より,

$$\prod_{k=0}^{2r+1} \prod_{v \in P^{0,\text{even}}} (\rho^k X)(v) = \prod_{k=0}^{2r+1} \prod_{i=0}^{m-1} (\rho^{k+2i+1} X)(2i, 2i).$$

そこで, 右辺の内側の積を計算する.

補題 4.2. $P = S_r$ とし, $r = 2m - 1$ は奇数であるとする. $0 \leq a \leq c \leq r$ に対して,

$$\theta^{\leq}(a; c) = \prod_{a \leq i \leq j \leq c} Z(i, j), \quad \theta^{<}(a; c) = \prod_{a \leq i < j \leq c} Z(i, j)$$

とおく. このとき,

$$\prod_{i=0}^{m-1} (\rho^{2i+k+1})(2i, 2i) = \begin{cases} \theta^{\leq}(0; 2m-1) & (k=0 \text{ のとき}), \\ \frac{\theta^{\leq}(0; 2m-2q-1)}{\theta^{<}(2m-2q; 2m-1)} & (k=2q \ (1 \leq q \leq m-1) \text{ のとき}), \\ \frac{\theta^{<}(0; 2m-2q)}{\theta^{\leq}(2m-2q+1; 2m-1)} & (k=2q-1 \ (1 \leq q \leq m) \text{ のとき}), \\ \frac{1}{\theta^{<}(0; 2m-1)} & (k=2m \text{ のとき}), \\ \frac{\theta^{\leq}(2m-2q; 2m-1)}{\theta^{<}(0; 2m-2q-1)} & (k=2q+2m \ (1 \leq q \leq m-1) \text{ のとき}), \\ \frac{\theta^{<}(2m-2q+1; 2m)}{\theta^{\leq}(0; 2m-2q)} & (k=2q+2m-1 \ (1 \leq q \leq m) \text{ のとき}). \end{cases}$$

補題 4.2 の証明. $k=0$ のときは, 定理 3.3 より $(\rho^{2i+1} X)(2i, 2i) = \psi_i^{\leq}(0; r) / \psi_{i+1}^{\leq}(0; r)$ となるから,

$$\prod_{i=0}^{m-1} (\rho^{2i+1})(2i, 2i) = \frac{\psi_0^{\leq}(0; 2m-1)}{\psi_m^{\leq}(0; 2m-1)}$$

ここで, $\psi_0^{\leq}(0; 2m-1) = \theta^{\leq}(0; 2m-1)$, $\psi_m^{\leq}(0; 2m-1) = 1$ だから, 求める結論が得られる. 残りの場合も同様にして確かめることができる. \square

この補題を用いて定理 1.2 (d) の証明を完成させる. $\Pi_k = \prod_{i=0}^{m-1} (\rho^{k+2i+1})(2i, 2i)$ ($0 \leq k \leq 2m+1$) とおくと, 上の補題から,

$$\Pi_0 \cdot \Pi_{2m} = \frac{\theta^{\leq}(0; 2m-1)}{\theta^{>}(0; 2m-1)} = \prod_{i=0}^{2m-1} Z(i, i)^{-1}.$$

同様にして,

$$\begin{aligned} \Pi_{2q-1} \cdot \Pi_{2q+2m-1} &= \prod_{i=0}^{2m-1} Z(i, i) \quad (1 \leq q \leq m), \\ \Pi_{2q} \cdot \Pi_{2q+2m} &= \prod_{i=0}^{2m-1} Z(i, i)^{-1} \quad (1 \leq q \leq m-1) \end{aligned}$$

となるから, (9) が得られる. □

明示公式の他の応用として, 定理 2.3 を用いることによって, [7, Theorem 27] の双有理版を与えることができる. $0 \leq i \leq r, 0 \leq j \leq s$ に対して, $R_{r,s}$ の部分集合 $M_{i,\bullet}, M_{\bullet,j}$ を

$$M_{i,\bullet} = \{(i, 0), \dots, (i, s)\}, \quad M_{\bullet,j} = \{(0, j), \dots, (r, j)\}$$

とおいて定める.

定理 4.3. $P = R_{r,s}$ とする. 部分集合 $M \subset P$ と $F \in \mathcal{K}(P)$ に対して,

$$\Psi_M(F) = \prod_{v \in M} \frac{F(v)}{\sum_{w \in \hat{P}, w < v} F(w)}$$

と定義する. このとき,

$$\prod_{k=0}^{r+s+1} \Psi_{M_{i,\bullet}}(\rho^k F) = \prod_{k=0}^{r+s+1} \Psi_{M_{\bullet,j}}(\rho^k F) = 1.$$

この定理の超離散化を考えると, 組合せ論版 rowmotion に対する次の結果が導かれる.

系 4.4. (Propp–Roby [7, Theorem 27]) $P = R_{r,s}$ とおく. このとき, 任意の $I \in \mathcal{J}(P)$ に対して,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r+s+2} \sum_{k=0}^{r+s+1} \# \left(\max \rho^k(I) \cap M_{i,\bullet} \right) &= \frac{s}{r+s+2}, \\ \frac{1}{r+s+2} \sum_{k=0}^{r+s+1} \# \left(\max \rho^k(I) \cap M_{\bullet,j} \right) &= \frac{r}{r+s+2}. \end{aligned}$$

ここで, $\max J$ は順序イデアル J の極大元全体のなす集合である.

参考文献

- [1] A. E. Brouwer and A. Schrijver, On the period of an operator, defined on antichains, Math. Centr. Report ZW24, 1974.
- [2] D. Einstein and J. Propp, Combinatorial, piecewise-linear, and birational homomesy for products of two chains, [arXiv:1310.5294](https://arxiv.org/abs/1310.5294).
- [3] D. Grinberg and T. Roby, Iterative properties of birational rowmotion I: Generalities and skeletal posets, *Electron. J. Combin.* **23** (2016), P1.33.
- [4] D. Grinberg and T. Roby, Iterative properties of birational rowmotion II: Rectangles and triangles, *Electron. J. Combin.* **22** (2015), P3.40.
- [5] G. Musiker and T. Roby, Paths to understanding birational rowmotion on products of two chains, *Algebr. Comb.* **2** (2019), 275–304.
- [6] 岡田 聡一, Birational Coxeter-motion on minuscule posets, 第 5 回 Algebraic Lie Theory and Representation Theory 報告集, 2019, pp. 219–233.
- [7] J. Propp and T. Roby, Homomesy in products of two chains, *Electron. J. Combin.* **22** (2015), P3.4.
- [8] T. Roby, Dynamical algebraic combinatorics and the homomesy phenomenon, in “Recent Trends in Combinatorics” (eds. A. Beveridge, J. Griggs, L. Hogben, G. Musiker, P. Tetali), *IMA Vol. Math. Appl.* **159**, Springer, 2016, pp. 619–652.
- [9] J. Striker, Dynamical algebraic combinatorics: promotion, rowmotion, and resonance, *Notices Amer. Math. Soc.* **64** (2017), 543–549.
- [10] J. Striker and N. Williams, Promotion and rowmotion, *European J. Combin.* **33** (2012), 1919–1942.