Nandi の予想の証明

滝聞 太基 （東京工業大学情報理工学院）*
Motoki Takigiku
School of Computing, Tokyo Institute of Technology

概要

Nandi は 2014 年に $A_2^{(2)}$ 型アフィンリー環のレベル 4 標準加群の頂点作用素を用いた構成から、ある Rogers–Ramanujan 型の分割定理を予想した。[TT] でこの予想の（分割の組合せ論と q-級数の手法による）証明を与えたので、予想の背景と証明の概要について紹介する。本稿の内容は土岡俊介氏（東京工業大学情報理工学院）との共同研究による。

1 Rogers–Ramanujan 分割定理

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l)$ が分割とは各 λ_i (パートと呼ぶ) が整数で、$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_l \geq 1$ となることをいう。分割の集合を Par と書き、$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l) \in \mathsf{Par}$ に対し $l = l(\lambda)$ でその長さを, $|\lambda| = \sum_i \lambda_i$ でそのサイズを, $m_i(\lambda) = |\{j \mid \lambda_j = i\}|$ で i (≥ 1) の重複度を表す。$|\lambda| = n$ であるとき λ は n の分割であると言い、n の分割の集合を $\mathsf{Par}(n)$ と書く。$\mathcal{C}, \mathcal{D} \subset \mathsf{Par}$ が**分割論的に同値** ($\mathcal{C} \overset{\mathrm{PT}}{\sim} \mathcal{D}$ と書く) とは、$\forall n \geq 0$ について $|\mathcal{C} \cap \mathsf{Par}(n)| = |\mathcal{D} \cap \mathsf{Par}(n)|$ であることを言う。

Rogers–Ramanujan 分割定理とは以下のものである（以下、Rogers–Ramanujan = RR と略する）。まず、一般に

$$T^{(n)}_{a_1,\cdots,a_k} := \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid 1 \leq \forall i \leq l(\lambda), \exists j,\ \lambda_i \equiv a_j \pmod{n}\} \tag{1}$$

とおく。このとき

定理 1.1 (RR 分割定理)**.**

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid 1 \leq \forall i < l(\lambda),\ \lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 2\}, \\ \mathcal{R}' &= \{\lambda \in \mathcal{R} \mid m_1(\lambda) = 0\} \end{aligned} \tag{2}$$

とおく。このとき $\mathcal{R} \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(5)}_{1,4}$, $\mathcal{R}' \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(5)}_{2,3}$.

分割の集合 $\mathcal{C} \subset \mathsf{Par}$ に対し、母関数

$$f_{\mathcal{C}}(x, q) = \sum_{\lambda \in \mathcal{C}} x^{l(\lambda)} q^{|\lambda|}$$

を考える。明らかに、$\mathcal{C} \overset{\mathrm{PT}}{\sim} \mathcal{D}$ は $f_{\mathcal{C}}(1, q) = f_{\mathcal{D}}(1, q)$ と同値であり、特に定理 1.1 は以下の q-級数の恒等式として言い換えられる。まず、$n \in \{0, 1, 2, \cdots, \} \sqcup \{\infty\}$ に対して

$$(x; q)_n := \prod_{i=0}^{n-1} (1 - xq^i), \qquad (x_1, \cdots, x_m; q)_n := (x_1; q)_n \cdots (x_m; q)_n$$

* email: takigiku.m.aa@m.titech.ac.jp

と定める (q-Pochhammer symbol) [*1]。このとき

定理 1.2 (RR 恒等式)**.**

$$\sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n}=\frac{1}{(q,q^4;q^5)_\infty},\qquad \sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_n}=\frac{1}{(q^2,q^3;q^5)_\infty}. \tag{3}$$

$f_{T^{(5)}_{1,4}}(1,q)$ と $f_{T^{(5)}_{2,3}}(1,q)$ が (3) の右辺の無限積に等しいことは積の意味から明らかであり、$f_{\mathcal{R}}(1,q)$ と $f_{\mathcal{R}'}(1,q)$ が (3) の左辺に等しいことも全単射による証明があり難しくない。定理 1.1 と 1.2 を合わせると、

- (2) にあるような、「パート同士の差の条件」によって定義された分割の母関数、
- (3) の左辺にあるような q-級数の無限和、
- (3) の右辺にあるような q-級数の無限積（あるいは、(1) にあるような「各パートの mod の条件」によって定義された分割の母関数）

という 3 つのものが等しい、と言っていることになる。そこで、（定義ではないが）以下この 3 つを「**分割サイド**」「**無限和サイド**」「**無限積サイド**」と呼ぶことにする。一般に、このような「分割サイド」＝「無限積サイド」（あるいは「無限和サイド」＝「無限積サイド」）の形の等式を RR 型分割定理（あるいは恒等式）と呼ぶことが多い（例えば [Sla52] では 100 個以上の「無限和＝無限積」の形の恒等式のリストが与えられている。[Sil18, Appendix A.1] も参照)。また、$\mathcal{R}$ と $\mathcal{R}'$ に対応する 2 つの主張を見比べると

$$\begin{cases}\text{分割サイドでは、「パート同士の差の条件」は同じで「}m_i(\lambda)\text{ に関する条件」だけが違い、}\\ \text{無限和サイドでは、summand の分子の }q\text{ の肩に乗っている 2 次式の 1 次の項だけが違い、}\\ \text{無限積サイドでは、(1) での }n\text{ と }k\text{ は同じで }a_1,\dots,a_k\text{ だけが違う}\end{cases} \tag{4}$$

という観察ができる。

2 Andrews–Gordon–Bressoud 分割定理

RR 型分割定理の中で、特に Gordon(1961) と Andrews(1974) による RR 分割定理の一般化を述べておく（これらは今では Andrews–Gordon 分割定理あるいは恒等式と呼ばれる)。

定理 2.1 (Gordon)**.** 任意の整数 $k\geq 2$ と $1\leq i\leq k$ について、

$$\{\lambda\in\mathsf{Par}\mid\forall j,\ \lambda_j-\lambda_{j+k-1}\geq 2,\ m_1(\lambda)\leq i-1\}\overset{\mathrm{PT}}{\sim}\{\lambda\in\mathsf{Par}\mid\forall j,\ \lambda_j\not\equiv 0,\pm i\ (\mathrm{mod}\ 2k+1)\}.$$

定理 2.2 (Andrews)**.** 任意の整数 $k\geq 2$ と $1\leq i\leq k$ について、

$$\sum_{n_1,\cdots,n_{k-1}\geq 0}\frac{q^{N_1^2+\cdots+N_{k-1}^2+N_i+\cdots+N_{k-1}}}{(q;q)_{n_1}(q;q)_{n_2}\cdots(q;q)_{n_{k-1}}}=\frac{(q^i,q^{2k+1-i},q^{2k+1};q^{2k+1})_\infty}{(q;q)_\infty}.$$

ただし $N_i:=n_i+\cdots+n_{k-1}$ とおいた.

特に $k=2$ のときそれぞれ RR 分割定理と恒等式になっている。また、k を固定すると i の値ごとに k 個の等式が与えられているが、ここでも (4) の「観察」が成り立っていることがわかる。

また、無限積サイドが $(q^i,q^{2k-i},q^{2k};q^{2k})_\infty/(q;q)_\infty$ になるような一般化も Andrews (1967), Bressoud (1979, 1980) によって与えられている（Andrews–Bressoud 分割定理あるいは恒等式と呼ばれる)。ここではこれ以上の詳細は述べないが、例えば [Sil18, Chapter 3] に詳しい解説がある。

[*1] 本稿では級数は全て形式的なものとして扱う。

3　アフィンリー環との関係

RR 分割定理ないし恒等式はいくつもの証明が知られており、ここではその詳細や歴史には深く立ち入らないが（例えば [And76, §7], [And86, §1], [Sil18, §2] を参照)、特筆すべきは Lepowsky らによって見出されたアフィンリー環との関係である。Lepowsky–Milne [LM78] は定理 1.1 のリー理論的な証明の存在を示唆し、後に Lepowsky–Wilson [LW78, LW81, LW82, LW84] は頂点作用素の理論を用いて、定理 1.1 が $A_1^{(1)}$ 型アフィンリー環のレベル 3 標準加群の principal character（ここでは説明しない）を 2 通りに見て得られるものであることを示した。さらに、$A_1^{(1)}$ 型アフィンリー環のレベル l ($l \geq 4$) の標準加群からは Andrews–Gordon–Bressoud による一般化（の別証明）が得られることもわかった。

型	レベル	分割定理
$A_1^{(1)}$	3	Rogers–Ramanujan (mod 5)
$A_1^{(1)}$	$2k+1$	Andrews–Gordon (mod $2k+3$)
$A_1^{(1)}$	$2k$	Andrews–Bressoud (mod $2k+2$)

(5)

（上の表で、(mod n) と書いて無限積サイド (1) の n が何であるかを表している）

3.1　$A_2^{(2)}$

$A_1^{(1)}$ の次のステップとして、$A_2^{(2)}$ 型アフィンリー環の標準加群について調べるのは自然な試みと言える。$A_2^{(2)}$ のレベル 2 標準加群からは RR 恒等式（で q に q^2 を代入したもの）が得られる。Lepowsky と Wilson の学生だった Capparelli [Cap93] は $A_2^{(2)}$ のレベル 3 標準加群から分割定理の予想を得た（後に [And94, TX95, Cap96] などによって証明された)。

その 20 年ほど後に、Wilson の学生だった Nandi はその学位論文 [Nan14] の中で $A_2^{(2)}$ のレベル 4 標準加群の頂点作用素による構成から新しい分割定理の予想（予想 4.1）を得た。本稿ではこの予想の証明 [TT] について解説する。

型	レベル	分割定理 (予想)
$A_2^{(2)}$	2	Rogers–Ramanujan$\|_{q\mapsto q^2}$ (mod 10)
$A_2^{(2)}$	3	Capparelli's identities (mod 12)
$A_2^{(2)}$	4	*Nandi's conjectures* (mod 14)
$A_2^{(2)}$	≥ 5	unknown

(6)

4　Nandi の予想

予想の主張は以下の通りである。以下の (N1)-(N6) をみたす分割の集合を $\mathcal{N}$ とおく。

(N1) $\lambda_i - \lambda_{i+1} \neq 1$,

(N2) $\lambda_i - \lambda_{i+2} \geq 3$,

(N3) $\lambda_i - \lambda_{i+2} = 3 \implies \lambda_i \neq \lambda_{i+1}$,

(N4) $\lambda_i - \lambda_{i+2} = 3$ and $2 \nmid \lambda_i \implies \lambda_{i+1} \neq \lambda_{i+2}$,

(N5) $\lambda_i - \lambda_{i+2} = 4$ and $2 \nmid \lambda_i \implies \lambda_i \neq \lambda_{i+1}$ and $\lambda_{i+1} \neq \lambda_{i+2}$,

(N6) $\Delta(\lambda) := (\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \cdots, \lambda_{l(\lambda)-1} - \lambda_{l(\lambda)})$ とおくとき、$\Delta(\lambda)$ はパターン $(3, 2^*, 3, 0)$ にマッチしない（連続した部分列として含まない)。ここで 2^* は 2 の 0 個以上の繰り返しを表す。

さらに、$\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3$ を以下のように定める。

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_1 &= \{\lambda \in \mathcal{N} \mid m_1(\lambda) = 0\},\\
\mathcal{N}_2 &= \{\lambda \in \mathcal{N} \mid m_i(\lambda) \le 1 \text{ for } i = 1,2,3\},\\
\mathcal{N}_3 &= \{\lambda \in \mathcal{N} \mid m_1(\lambda) = m_3(\lambda) = 0,\ m_2(\lambda) \le 1 \text{ and } P(\lambda)\}.
\end{aligned}$$

ただし条件 $P(\lambda)$ は「任意の $k \ge 1$ に対し、λ は $(2k+3, 2k, 2k-2, \cdots, 4, 2)$ を含まない」とする。

予想 4.1 (Nandi [Nan14])**.**

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_1 &\overset{\text{PT}}{\sim} T^{(14)}_{2,3,4,10,11,12},\\
\mathcal{N}_2 &\overset{\text{PT}}{\sim} T^{(14)}_{1,4,6,8,10,13},\\
\mathcal{N}_3 &\overset{\text{PT}}{\sim} T^{(14)}_{2,5,6,8,9,12}.
\end{aligned}$$

5　証明の概要

予想 4.1 を示す際に、同時に以下の無限和サイドを与える。$a = 1,2,3$ に対し

$$N_a := \sum_{i,j \ge 0} \frac{(-1)^j q^{\binom{i}{2} + 2\binom{j}{2} + 2ij + A_a(i,j)}}{(q;q)_i (q^2;q^2)_j} \tag{7}$$

とおく。ただし

$$A_1(i,j) = i + j, \qquad A_2(i,j) = i + 3j, \quad A_3(i,j) = 2i + 3j.$$

このとき

定理 5.1 ([TT])**.**

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda \in \mathcal{N}_1} q^{|\lambda|} &= N_1 = \frac{1}{(q^2, q^3, q^4, q^{10}, q^{11}, q^{12}; q^{14})_\infty}, \qquad (8)\\
\sum_{\lambda \in \mathcal{N}_2} q^{|\lambda|} &= N_2 = \frac{1}{(q^1, q^4, q^6, q^8, q^{10}, q^{13}; q^{14})_\infty},\\
\sum_{\lambda \in \mathcal{N}_3} q^{|\lambda|} &= N_3 = \frac{1}{(q^2, q^5, q^6, q^8, q^9, q^{12}; q^{14})_\infty}.
\end{aligned}$$

予想 4.1 は明らかに定理 5.1 から従う。また、(くどいようだが) ここでも (4) の「観察」は成り立っている。定理 5.1 の証明の概要は以下のようになる。

Step 1: 分割サイドの母関数 $f_{\mathcal{N}_a}(x,q) = \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_a} x^{l(\lambda)} q^{|\lambda|}$ がみたす q-差分方程式を求める。
Step 2: Step 1 で求めた q-差分方程式を解き、$f_{\mathcal{N}_a}(1,q) = N_a$ を示す。
Step 3: q-級数の定理を使い、無限和サイド N_a と無限積サイドが等しいことを示す。

注意 5.2. Step 1 で分割サイドの (x,q)-母関数の q-差分方程式を立てる際に、最終的には $x = 1$ とするので x の肩は原理的にはなんでもよい。しかし x の肩を分割の長さ関数 $l(\lambda)$ とすると §5.1 で述べるリンク分割イデアルの理論が援用できて、今回はそうして立てた q-差分方程式によって証明が上手くいく。

5.1　ステップ 1

一般に分割の集合 $\mathcal{C} \subset \mathrm{Par}$ が**リンク分割イデアル** [And76, §8] というものになっていると、その母関数 $f_{\mathcal{C}}(x,q)$ がみたす q-差分方程式を 1 つ具体的に求めることができる [And76, §8.4]。既知の RR 型分割定理 (or

予想）のほとんど（例えば表 (5), (6) と後で述べる表 (19) で Nandi の予想以外の全て）で分割サイドはリンク分割イデアルになっている。

今考えたい分割の集合 $\mathcal{N}$ は「だいたい」リンク分割イデアルなのだが、特徴的な条件 (N6) が原因で直接 Andrews のアルゴリズムを使える形ではなく、そこを工夫して回避するのが 1 つのポイントになる。これについて以下で概要を説明する。

まず、分割 $\lambda \in \mathsf{Par}$ と各パートの重複度の列 $(m_1(\lambda), m_2(\lambda), m_3(\lambda), \cdots)$ を同一視すると便利である。この対応で全単射 $\mathsf{Par} \simeq \{(f_1, f_2, \cdots) \mid f_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \sum_i f_i < \infty\}$ ができるので、右辺の集合を $\widehat{\mathsf{Par}}$ と書いて、$\lambda \in \mathsf{Par}$ や $\mathcal{C} \subset \mathsf{Par}$ の $\widehat{\mathsf{Par}}$ における像をここでは単に $\widehat{\lambda}$ や $\widehat{\mathcal{C}}$ と書くことにする。

$\lambda \in \mathcal{N}$ に対応する列を $\widehat{\lambda} = (f_1, f_2, f_3, \dots) \in \widehat{\mathcal{N}}$ とするとき、各 $k \geq 1$ について (f_{2k-1}, f_{2k}) は

$$\pi_0 = (0,0), \qquad \pi_1 = (0,1), \qquad \pi_2 = (0,2), \qquad \pi_3 = (1,0), \qquad \pi_4 = (2,0)$$

のいずれかであることが (N1)-(N6) から standard な議論によっていえる。そこで、

$$\widehat{\lambda} = (\underbrace{f_1, f_2}_{\pi_{i_1}}, \underbrace{f_3, f_4}_{\pi_{i_2}}, \underbrace{f_5, f_6}_{\pi_{i_3}}, \dots)$$

のようにして $\lambda \in \mathcal{N}$ を $I := \{0,1,2,3,4\}$ の列 $\vec{i} = (i_1, i_2, i_3, \dots)$ にエンコードできるので、このとき

$$\lambda = \pi^*(\vec{i}) = \pi^*(i_1, i_2, i_3, \dots), \qquad \mathsf{code}\,\lambda = \vec{i} = (i_1, i_2, i_3, \dots)$$

と書くことにする。

このとき逆に、I の列 $\vec{i} = (i_1, i_2, i_3, \dots)$ について $\pi^*(\vec{i}) \in \mathcal{N}$ であるための条件が「$\vec{i}$ の隣り合った 2 項についての条件」で書けていると都合がよい（後で見るように、実際にはそうではない）。すなわち、もしある $L\colon I \longrightarrow 2^I$ (i.e., $\forall i \in I,\ L(i) \subset I$) があって

$$\pi^*(i_1, i_2, \dots) \in \mathcal{N} \iff \begin{cases} \forall j \geq 1,\ i_{j+1} \in L(i_j) \\ \exists j \geq 1,\ j' \geq j \implies i_{j'} = 0 \end{cases} \tag{9}$$

だったとすると（2 つ目の条件は $\pi^*(\vec{i}) \in \mathsf{Par}$ に必要）、

$$\mathcal{N}(A) := \{\lambda \in \mathcal{N} \mid \mathsf{code}\,\lambda = (i_1, i_2, \dots) \text{ とおくとき } i_1 \in A\} \qquad \text{for } A \subset I,$$
$$j \cdot S := \{(j, i_1, i_2, \dots) \mid (i_1, i_2, \dots) \in S\}$$

とおくとき

$$\mathsf{code}\,\mathcal{N}(L(j)) = \bigsqcup_{k \in L(j)} k \cdot \mathsf{code}\,\mathcal{N}(L(k)) \qquad \text{for } j \in I$$

が確かめられ、これから連立の q-差分方程式

$$f_{\mathcal{N}(L(j))}(x,q) = \sum_{k \in L(j)} \mathrm{wt}(\pi_k) f_{\mathcal{N}(L(k))}(xq^2, q) \qquad \text{for } j \in I \tag{10}$$

が得られる[*2]（ただし $\pi_k = (a,b)$ のとき $\mathrm{wt}(\pi_k) := x^{a+b} q^{a+2b}$ とする）。大雑把にいうと、条件 (9) が成り立つような分割の集合のことをリンク分割イデアルという。（詳しくは [And74] や [And76, §8] を参照）

そして、もし連立 q-差分方程式 (10) が得られたら任意の $j \in I$ について $f_{\mathcal{N}(L(j))}(x,q)$ 単独の q-差分方程式を導くことができる [And76, Lemma 8.10]。よって、もし

$$\text{ある } j \in I \text{ があって } \mathcal{N}_1 = \mathcal{N}(L(j)) \tag{11}$$

なら、$f_{\mathcal{N}_1}(x,q)$ のみたす q-差分方程式を得られることになる（$\mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3$ についても同様）。そして、既知の RR 型分割定理ではほぼいつでも（奇跡的に）そうなっている。

[*2] ここで x の肩が $l(\lambda)$ であることが必要

5.1.1 Nandi の予想への応用

さて、実際には $\mathcal{N}$ について (9) は成り立たない。具体的には、$\mathcal{N}$ の定義に現れる $\lambda \in \mathsf{Par}$ についての条件 (N1)-(N6) を $(f_a)_{a\geq 1} \in \widehat{\mathsf{Par}}$ の言葉で書き直すと次のようになる。

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{N1}') \ \nexists a \geq 1 \text{ s.t.} (f_a, f_{a+1}) \geq (1,1),\\
&(\mathrm{N2}') \ \nexists a \geq 1 \text{ s.t.} f_a + f_{a+1} + f_{a+2} \geq 3,\\
&(\mathrm{N3}') \ \nexists a \geq 1 \text{ s.t.} (f_a, f_{a+1}, f_{a+2}, f_{a+3}) \geq (1,0,0,2),\\
&(\mathrm{N4}') \ \nexists a \geq 1 \text{ s.t.} (f_{2a}, f_{2a+1}, f_{2a+2}, f_{2a+3}) \geq (2,0,0,1),\\
&(\mathrm{N5a}') \ \nexists a \geq 1 \text{ s.t.} (f_{2a-1}, f_{2a}, f_{2a+1}, f_{2a+2}, f_{2a+3}) \geq (2,0,0,0,1),\\
&(\mathrm{N5b}') \ \nexists a \geq 1 \text{ s.t.} (f_{2a-1}, f_{2a}, f_{2a+1}, f_{2a+2}, f_{2a+3}) \geq (1,0,0,0,2),\\
&(\mathrm{N6}') \ \nexists a \geq 1 \text{ s.t.} \exists k \geq 0, \ (f_a, f_{a+1}, \cdots, f_{a+2k+6}) \geq (2,0,0,\underbrace{1,0,1,0,\cdots,1,0}_{2k},1,0,0,1).
\end{aligned}$$

ただし $(f_i)_i \leq (g_i)_i$ は $f_i \leq g_i$ $(\forall i)$ と定義する。

これをさらに翻訳すると、I の列 $\vec{i} = (i_1, i_2, \cdots)$ に対して $\pi^*(\vec{i}) \in \mathcal{N}$ となる条件は $\vec{i}$ が以下のパターンにマッチしない (連続した部分列として含まない) ことと同値である:

$$\begin{gathered}
(1,\{2,3,4\}), \quad (2,\{1,2,3,4\}), \quad (3,\{2,4\}), \quad (4,\{2,3,4\}),\\
(1,0,4), \quad (2,0,\{3,4\}), \quad (3,0,4), \quad (4,0,4), \quad (4,1^*,0,3).
\end{gathered} \tag{12}$$

ただし、$\{a,b,\cdots\}$ は $a,b,\cdots$ のどれかちょうど 1 つにマッチし、a^* は a の 0 個以上の繰り返しにマッチするものとする。さらに、$\pi^*(\vec{i}) \in \mathcal{N}_s$ $(s=1,2,3)$ となる条件は

$$\begin{aligned}
\pi^*(\vec{i}) \in \mathcal{N}_1 &\iff \vec{i} \text{ が } (12) \text{ にマッチしない and } \vec{i} \text{ が } (3),(4) \text{ で始まらない}\\
\pi^*(\vec{i}) \in \mathcal{N}_2 &\iff \vec{i} \text{ が } (12) \text{ にマッチしない and } \vec{i} \text{ が } (2),(4),(0,4) \text{ で始まらない}\\
\pi^*(\vec{i}) \in \mathcal{N}_3 &\iff \vec{i} \text{ が } (12) \text{ にマッチしない and } \vec{i} \text{ が } (2),(3),(4),(0,4),(1^*,0,3) \text{ で始まらない}
\end{aligned} \tag{13}$$

となることがチェックできる。

さて、(9) の条件と比較すると (12) では要するに 0 や 1 の次に来られるものが 0 や 1 の前に何があったかに依存しており、これを解消するには 0 や 1 の前に何があったかという状態を記憶するように 0 と 1 を複製すればよい。（これは例えば、(a,b), (b,c) というパターンは許されているが (a,b,c) が禁止されているとき、a の次に来る b を b' と書くことにすれば、(a,b'), (b,c) を許して (a,b), (b',c) を禁止するというルールに書き換えられるといった具合である）

今の場合、具体的には次のようにすればよい。列 $\vec{i}$ の中に現れる 1 が

- *bad* とは、4 の次に現れる、または bad 1 の次に現れること、
- *good* とは、bad でないこと

と（再帰的に）定義し、また列 $\vec{i}$ の中に現れる 0 が

- *bad* とは、good 1 または 3 の次に現れること、
- *very bad* とは、bad 1 または 2 または 4 の次に現れること、
- *good* とは、bad でも very bad でもないこととする。

さて、good 0, bad 0, very bad 0, good 1, bad 1 をそれぞれ $0, 0', 0'', 1, 1'$ と書くことにすれば、(12) は

$$\begin{gathered}
(0,\{0',0'',1'\}), \quad (0',\{0',0'',1',4\}), \quad (0',\{0',0'',1',3,4\}), \quad (1,\{0,0'',1',2,3,4\}),\\
(1',\{0,0',1,2,3,4\}), \quad (2,\{0,0',1,1',2,3,4\}), \quad (3,\{0,0'',1',2,4\}), \quad (4,\{0,0',1,2,3,4\})
\end{gathered}$$

を禁止することと言い換えられる。すなわち、$I' = I \sqcup \{0', 0'', 1'\}$ とおいて $L' \colon I' \longrightarrow 2^{I'}$ を

$$\begin{aligned} &L'(0) = \{0,1,2,3,4\}, && L'(0') = \{0,1,2,3\}, && L'(0'') = \{0,1,2\}, && L'(1) = \{0',1\}, \\ &L'(1') = \{0'',1'\}, && L'(2) = \{0''\}, && L'(3) = \{0',1,3\}, && L'(4) = \{0'',1'\} \end{aligned}$$

で定めれば (9)（を少し修正したもの）が成立して以下同様に連立 q-差分方程式が立つ。この議論はアドホックに見えるが、実は一般に (12) の禁止パターンが（形式言語理論における）正規表現を使って書ける時には自動的にこのような構成を与えることができる。

さらに、(13) の追加条件はそれぞれ $i_1 \in L'(0'')$, $i_1 \in L'(3)$, $i_1 \in L'(4)$ と言い換えられることがわかり((11) に対応する事実)、よって [And76, Lemma 8.10] のアルゴリズムにより $f_{\mathcal{N}_s}(x,q)$ $(s = 1,2,3)$ のみたす q-差分方程式が求まる。

命題 5.3.

$$0 = \sum_{i=0}^{5} p_{2i}(x,q) f_{\mathcal{N}_1}(xq^{2i}, q), \tag{14}$$

$$\begin{aligned} p_0(x,q) &= 1, \\ p_2(x,q) &= -1 + \left(-q^2 - q^3 - q^4\right) x, \\ p_4(x,q) &= q^4 x + \left(-q^4 + q^7 + q^8 + q^9\right) x^2, \\ p_6(x,q) &= -q^6 x^2 + \left(q^{10} + q^{11} + q^{12} - q^{15}\right) x^3, \\ p_8(x,q) &= \left(q^{13} + q^{14} + q^{15}\right) x^3 + \left(-q^{19} - q^{20} - q^{21}\right) x^4, \\ p_{10}(x,q) &= q^{17} x^3 + \left(-q^{23} - q^{25}\right) x^4 + q^{31} x^5. \end{aligned}$$

($\mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3$ については省略)

5.2　ステップ 2

一般に級数 $F(x) = \sum_{M \geq 0} f_M x^M$ の q-差分方程式

$$0 = \cdots + x^a q^b F(xq^c) + \cdots$$

は、(両辺の x^M の係数を比較することで) その係数 $(f_M)_M$ の漸化式

$$0 = \cdots + q^{c(M-a)+b} f_{M-a} + \cdots \qquad (\forall M \in \mathbb{Z})$$

(ただし $f_n = 0$ for $n < 0$) と同値であることに注意する。

(14) を解く。以下単に $F(x) = f_{\mathcal{N}_1}(x,q)$ と書く。計算の詳細は省くが、

$$G(x) = \sum_{M \geq 0} g_M x^M := \frac{F(x)}{(x;q^2)_\infty}, \tag{15}$$

$$H(x) = \sum_{M \geq 0} h_M x^M \quad \text{where} \quad h_M := \frac{g_M}{(-q;q)_{2M}}, \tag{16}$$

$$I(x) = \sum_{M \geq 0} i_M x^M := H(x)(x;q^2)_\infty \tag{17}$$

と順に変換すると q-差分方程式 (14) は $\{i_M\}_{M \geq 0}$ の 2 項間漸化式

$$i_M = \frac{-q^{2M-1}}{(1+q^{2M-1})(1-q^{4M})} i_{M-1}$$

に変換されることがわかる。また $i_0 = h_0 = g_0 = F(0) = 1$ が容易に確認でき、したがって

$$I(x) = \sum_{M\geq 0} \frac{(-1)^M q^{M^2}}{(-q;q^2)_M (q^4;q^4)_M} x^M$$

が言える。ここから (15), (16), (17) の変換を逆に辿って行くと、まず $H(x)$ について Euler の公式

$$\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(q;q)_n} = \frac{1}{(x;q)_\infty}$$

([GR04, (II.1)]) から

$$H(x) = \frac{I(x)}{(x;q^2)_\infty} = \sum_{N\geq 0} \frac{x^N}{(q^2;q^2)_N} \sum_{M\geq 0} \frac{(-1)^M q^{M^2}}{(-q;q^2)_M (q^4;q^4)_M} x^M$$

となり、(16) より

$$G(x) = \sum_{N\geq 0} \frac{x^N}{(q^2;q^2)_N} \sum_{M\geq 0} \frac{(-1)^M q^{M^2}}{(-q;q^2)_M (q^4;q^4)_M} x^M (-q;q)_{2(M+N)},$$

したがって $L \geq 0$ に対し x^L の係数を見ると

$$g_L = \sum_{0\leq M\leq L} \frac{(-1)^M q^{M^2} (-q;q)_{2L}}{(q^2;q^2)_{L-M} (-q;q^2)_M (q^4;q^4)_M}$$

となる。

ここで、実は $F(x) = (x;q^2)_\infty G(x) = (1-x)(xq^2;q^2)_\infty G(x)$ から、$g_\infty = \lim_{L\to\infty} g_L$ の存在をいえば $F(1) = (q^2;q^2)_\infty g_\infty$ であることがいえる（詳細略）。実際に

$$\lim_{L\to\infty} g_L = \lim_{L\to\infty} \sum_{0\leq M\leq L} \frac{(-1)^M q^{M^2} (-q;q)_{2L}}{(q^2;q^2)_{L-M} (-q;q^2)_M (q^4;q^4)_M} = \sum_{M\geq 0} \frac{(-1)^M q^{M^2} (-q;q)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty (-q;q^2)_M (q^4;q^4)_M}$$

なので、

$$\begin{aligned} F(1) &= (q^2;q^2)_\infty g_\infty = (-q;q)_\infty \sum_{M\geq 0} \frac{(-1)^M q^{M^2}}{(-q;q^2)_M (q^4;q^4)_M} = (-q;q)_\infty \sum_{M\geq 0} \frac{(-1)^M q^{M^2}}{(-q;q)_{2M} (q^2;q^2)_M} \\ &= \sum_{M\geq 0} (-q^{2M+1};q)_\infty \frac{(-1)^M q^{M^2}}{(q^2;q^2)_M} = \sum_{M,K\geq 0} \frac{q^{\binom{K}{2}+(2M+1)K}}{(q;q)_K} \frac{(-1)^M q^{M^2}}{(q^2;q^2)_M} = N_1. \end{aligned}$$

ここで、最後から 2 番目の等号は Euler の公式 [GR04, (II.2)]

$$\sum_{n\geq 0} \frac{q^{\binom{n}{2}} x^n}{(q;q)_n} = (-x;q)_\infty \tag{18}$$

による。

5.3 ステップ 3

最後に無限和サイド N_1 が無限積サイドに等しいことを示す。まず N_1 の 2 重和 (7) における j についての和を (18) を使って消去することができる:

$$N_1 = \sum_{i\geq 0}(q^{1+2i};q^2)_\infty \frac{q^{(i^2+i)/2}}{(q;q)_i} = (q;q^2)_\infty \sum_{i\geq 0} \frac{q^{(i^2+i)/2}}{(q;q)_i(q;q^2)_i}.$$

したがって (8) は

$$\sum_{i\geq 0} \frac{q^{(i^2+i)/2}}{(q;q)_i(q;q^2)_i} = \frac{(q^6,q^8,q^{14};q^{14})_\infty}{(q;q)_\infty(q^3,q^{11};q^{14})_\infty}$$

と同値になるが、これは既知の q-超幾何級数の和公式 ([Sla52, (81)], [Sil18, (A.124)])

$$\sum_{n\geq 0} \frac{q^{n(n+1)/2}(-q;q)_n}{(q;q)_{2n}} = \frac{(q,q^6,q^7;q^7)_\infty(q^5,q^9;q^{14})_\infty}{(q,q,q^2;q^2)_\infty}$$

と同じものである。N_2, N_3 については代わりに [Sla52, (80),(82)] (or [Sil18, (A.125),(A.126)]) を使えばよい。よって定理 5.1 が示された。

6 Kanade–Russell 予想

最後に、周辺の話題として Kanade–Russell による予想について触れておく。Capparelli や Nandi がアフィンリー環の標準加群を調べて分割定理の予想を得たのと対照的に、Kanade–Russell [KR15] は「分割サイド」の条件を様々に変えてその母関数が良い無限積表示を持つものをコンピュータを使って探索し[*3] 、以下を含むいくつかの予想を得た。

予想 6.1 (Kanade–Russell)**.**

$$\begin{aligned}
\mathcal{KR}_1 &= \left\{\lambda \in \mathsf{Par} \,\middle|\, \begin{array}{c} \forall i,\ \lambda_i - \lambda_{i+2} \geq 3, \\ \forall i,\ \lambda_i - \lambda_{i+1} \leq 1 \implies \lambda_i + \lambda_{i+1} \equiv 0 \pmod 3 \end{array}\right\}, \\
\mathcal{KR}_2 &= \{\lambda \in \mathcal{KR}_1 \mid m_1(\lambda) = 0\}, \\
\mathcal{KR}_3 &= \{\lambda \in \mathcal{KR}_1 \mid m_1(\lambda) = m_2(\lambda) = 0\}
\end{aligned}$$

とおく。このとき $\mathcal{KR}_1 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(9)}_{1,3,6,8}$, $\mathcal{KR}_2 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(9)}_{2,3,6,7}$, $\mathcal{KR}_3 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(9)}_{3,4,5,6}$.

この予想の無限積サイドは、$D_4^{(3)}$ 型アフィンリー環のレベル 3 標準加群の principal character と級数として一致している。また、この予想に対応する無限和サイドが Kurşungöz (2018) により与えられている:

定理 6.2 ([Kur])**.** $i = 1,2,3$ に対し

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{KR}_i} q^{|\lambda|} = \sum_{n,m\geq 0} \frac{q^{n^2+3m^2+3nm+A_i(n,m)}}{(q;q)_n(q^3;q^3)_m}.$$

ただし $A_1(n,m) = 0,\ A_2(n,m) = n+3m,\ A_3(n,m) = 2n+3m.$

---

*3 分割サイドの母関数 $f(q) = 1 + \sum_{n>0} a_n q^n$ $(a_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ が与えられたとき、$f(q) = \prod_{n>0}(1-q^n)^{b_n}$ となる整数列 $(b_n)_{n>0}$ が高速に求められるので、$(b_n)_n$ が周期的か見ればよい

特に予想 6.1 は $\displaystyle\sum_{n,m\geq 0}\frac{q^{n^2+3m^2+3nm+A_i(n,m)}}{(q;q)_n(q^3;q^3)_m}=\frac{1}{(q,q^3,q^6,q^8;q^9)_\infty}$ などと同値である。また、ここでも (4) の「観察」が成り立っていることがわかる。

Nandi の予想 (= 定理 5.1) に比べて、予想 6.1 は一見シンプルに見える。しかし、例えば定理 5.1 の証明と同じ筋書きを適用しようとしても上手くいかないことを注意しておく: $\mathcal{KR}_1$ はリンク分割イデアルになっており、$f_{\mathcal{KR}_i}(x,q)$ $(i=1,2,3)$ の q-差分方程式を立てることができるが、それを解くと無限和サイドになってしまう（つまり、定理 6.2 の別証明が得られるだけに留まる）。多くの場合で「分割サイド＝無限和サイド」は比較的容易で「分割サイド＝無限積サイド」と「無限和サイド＝無限積サイド」は同じくらい難しい、という経験則があり[*4]、予想 6.1 の証明にはあまり近づいていないのではないかと思われる。

6.1 $A^{(2)}_{\text{奇数}}$

続く論文 [KR19] で、Kanade–Russell は同様の search により無限積サイドが $A_9^{(2)}$ 型アフィンリー環のレベル 2 標準加群の principal character になっている分割定理の予想を得た（ここでは詳細は述べない。また、[BJSM, Ros] によって証明された)。

より一般に、$A^{(2)}_{\text{奇数}}$ のレベル 2 標準加群のそれぞれに対応して分割定理が存在しそうなことが観察でき、実際 $A_9^{(2)}$ まででは対応する分割定理が既に知られている。そして、（理由はわからないが）Nandi の予想の無限積サイドは $A_{11}^{(2)}$ のレベル 2 標準加群の principal character にもなっている。([KR19, §1.1] も参照)

型	レベル	分割定理
$A_3^{(2)}$	2	Schur (mod 6)
$A_5^{(2)}$	2	Göllnitz–Gordon (mod 8)
$A_7^{(2)}$	2	Rogers–Ramanujan (mod 10)
$A_9^{(2)}$	2	[KR19, BJSM, Ros] (mod 12)
$A_{11}^{(2)}$	2	無限積サイドは Nandi の予想と一致 (mod 14)
$A_{\geq 13}^{(2)}$	2	unknown

(19)

（$A_7^{(2)}$ については、$T^{(5)}_{1,4}=T^{(10)}_{1,4,6,9}$ のようにして無限積サイドを mod 10 と思ったもの）

$A_{13}^{(2)}$ 以降については、筆者の知る限りでは対応する分割定理（予想）は知られておらず、今後の研究課題といえる。

参考文献

[And74] George E. Andrews, *A general theory of identities of the Rogers-Ramanujan type*, Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 1033–1052. MR387178

[And76] ______, *The theory of partitions*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Amsterdam, 1976. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 2. MR0557013

[And86] ______, *q-series: their development and application in analysis, number theory, combinatorics, physics, and computer algebra*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 66, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1986. MR858826

[And94] ______, *Schur's theorem, Capparelli's conjecture and q-trinomial coefficients*, The Rademacher legacy to mathematics (University Park, PA, 1992), 1994, pp. 141–154. MR1284057

[BJSM] Kathrin Bringmann, Chris Jennings-Shaffer, and Karl Mahlburg, *Proofs and reductions of various conjectured partition identities of Kanade and Russell*, J. Reine Angew. Math. to appear.

[Cap93] Stefano Capparelli, *On some representations of twisted affine Lie algebras and combinatorial identities*, J. Algebra **154** (1993), no. 2, 335–355. MR1206124

[*4] ただし、定理 5.1 はこの法則にあてはまっていない。このことから、別の（より自然な）無限和サイドが存在する可能性も考えられる

[Cap96] ———, *A construction of the level 3 modules for the affine Lie algebra $A_2^{(2)}$ and a new combinatorial identity of the Rogers-Ramanujan type*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), no. 2, 481–501. MR1333389

[GR04] George Gasper and Mizan Rahman, *Basic hypergeometric series*, Second, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 96, Cambridge University Press, Cambridge, 2004. With a foreword by Richard Askey. MR2128719

[KR15] Shashank Kanade and Matthew C. Russell, `IdentityFinder` *and some new identities of Rogers-Ramanujan type*, Exp. Math. **24** (2015), no. 4, 419–423. MR3383473

[KR19] ———, *Staircases to analytic sum-sides for many new integer partition identities of Rogers-Ramanujan type*, Electron. J. Combin. **26** (2019), no. 1, Paper 1.6, 33. MR3904822

[Kur] Kağan Kurşungöz, *Andrews-Gordon type series for Kanade-Russell conjectures*. arXiv:1808.01432.

[LM78] J. Lepowsky and S. Milne, *Lie algebraic approaches to classical partition identities*, Adv. in Math. **29** (1978), no. 1, 15–59. MR501091

[LW78] James Lepowsky and Robert Lee Wilson, *Construction of the affine Lie algebra $A_1(1)$*, Comm. Math. Phys. **62** (1978), no. 1, 43–53. MR573075

[LW81] ———, *A new family of algebras underlying the Rogers-Ramanujan identities and generalizations*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **78** (1981), no. 12, part 1, 7254–7258. MR638674

[LW82] ———, *A Lie theoretic interpretation and proof of the Rogers-Ramanujan identities*, Adv. in Math. **45** (1982), no. 1, 21–72. MR663415

[LW84] ———, *The structure of standard modules. I. Universal algebras and the Rogers-Ramanujan identities*, Invent. Math. **77** (1984), no. 2, 199–290. MR752821

[Nan14] Debajyoti Nandi, *Partition identities arising from the standard $A_2^{(2)}$-modules of level 4*, Ph.D. Thesis, 2014.

[Ros] Hjalmar Rosengren, *Proofs of some partition identities conjectured by Kanade and Russell*. arXiv:1912.03689.

[Sil18] Andrew V. Sills, *An invitation to the Rogers-Ramanujan identities*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2018. With a foreword by George E. Andrews. MR3752624

[Sla52] L. J. Slater, *Further identities of the Rogers-Ramanujan type*, Proc. London Math. Soc. (2) **54** (1952), 147–167. MR0049225

[TT] Motoki Takigiku and Shunsuke Tsuchioka, *A proof of conjectured partition identities of Nandi*. arXiv:1910.12461.

[TX95] Manvendra Tamba and Chuan Fu Xie, *Level three standard modules for $A_2^{(2)}$ and combinatorial identities*, J. Pure Appl. Algebra **105** (1995), no. 1, 53–92. MR1364151