

# Queer Supercrystal Structure for Increasing Factorizations of Fixed-Point-Free Involution Words

大阪市立大学・数学研究所\* 廣嶋 透也

Toya Hiroshima

OCAMI, Osaka City University

## 1 序

最近 Marberg [18] はシンプレクティック・シフト Hecke 挿入 (symplectic shifted Hecke insertion) を導入した. これは Grothendieck 多項式の研究のために Buch, Kresch, Shimozono, Tamvakis, および Yong [3] が導入した Hecke 挿入のシンプレクティック・シフト類似になっている. シンプレクティック・シフト Hecke 挿入のアルゴリズムを用いて, Marberg はシンプレクティック Hecke 語の増大列分解と同じ型 (shape) のシフト Young タブロー (tableau) の対 (1つは増大シフト・タブロー, もう1つは集合値 (set-valued) シフト・タブロー, それぞれ挿入タブローおよび記録タブローと呼ぶ) の間の全単射を構成した [18]. シンプレクティック Hecke 語をその簡約語 (reduced word) に制限した場合, それは固定点のない (fixed-point-free; FPF) 対合 (involution) 語と呼ばれ, シンプレクティック・シフト Hecke 挿入は FPF 対合 Coxeter-Knuth 挿入と呼ばれる. また集合値シフト・タブローはプライム付き (primed) タブローに置き換わる.

一方, Assaf と Oguz [1, 2] および筆者 [14] は独立にプライム付きタブローの集合が Grantcharov ら [6, 7, 8, 9] によって見出された奇妙な (queer) Lie 超代数に対するクリスタル (以下では奇妙な超クリスタルと呼ぶ) の構造を持つことを示した.

以上の結果を組み合わせると FPF 対合語の増大列分解の集合には奇妙な超クリスタル構造が入ることが期待され, 実際そうであることが示される. このため2つの FPF 対合語に対し, これらが Coxeter-Knuth 関係 ([18] では Coxeter braid 関係) を持つことの必要十分条件が, FPF 対合 Coxeter-Knuth 挿入において同じ挿入タブローを持つことであ

ることを示す. これにより FPF 対合語の集合とプライム付きタブローの集合の間に 1 対 1 対応を確立することができる.

本稿の構成は以下のようになっている. 第 2 節で奇妙な Lie 超代数に対するクリスタルについて概説する. 増大シフト・タブローとプライム付きタブローの定義は第 3 節で与える. 第 4 節では [18] で導入された FPF 対合 Coxeter-Knuth 挿入のアルゴリズムについて説明し, 2 つの FPF 対合語に対し, これらが Coxeter-Knuth 関係 ([18] では Coxeter braid 関係) を持つことの必要十分条件が, FPF 対合 Coxeter-Knuth 挿入において同じ挿入タブローを持つことを示す (定理 4.2). 第 5 節で FPF 対合語の増大列分解の集合が奇妙な超クリスタル構造を持つことを示す (定理 5.1).

## 2 奇妙な Lie 超代数に対するクリスタル

まず一般線型 Lie 代数  $\mathfrak{gl}(n)$  に対するクリスタル, 単に  $\mathfrak{gl}(n)$  クリスタル [4, 16, 17] について簡単に俯瞰する.  $P = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\epsilon_i$  をウェイト格子,  $P^\vee = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}k_i$  を双対ウェイト格子とし,  $\langle \epsilon_i, k_j \rangle = \delta_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) とする.  $\{\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1} \mid 1 \leq i < n\}$  を単純ルートの集合とし,  $\{h_i = k_i - k_{i+1} \mid 1 \leq i < n\}$  を単純コルートの集合とする.  $P^+ = \{\lambda \mid \lambda \in P, \langle \lambda, h_i \rangle \geq 0 \ (i = 1, \dots, n-1)\}$  を支配的整ウェイトの集合とする.

定義 2.1  $B$  を集合とし, 写像  $\text{wt} : B \rightarrow P$  と  $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i : B \rightarrow B \sqcup \{\mathbf{0}\}$  が与えられているものとする.  $B$  が  $\mathfrak{gl}(n)$ -crystal であるとは,  $i = 1, \dots, n-1$  に対し以下の性質が満たされるときをいう. まず  $b \in B$  に対し  $\varepsilon_i(b) := \max \{k \geq 0 \mid \tilde{e}_i^k b \in B\}$ ,  $\varphi_i(b) := \max \{k \geq 0 \mid \tilde{f}_i^k b \in B\}$  と定義する.

- (1)  $\varepsilon_i, \varphi_i : B \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  であり  $\varphi_i(b) = \varepsilon_i(b) + \langle \text{wt}(b), h_i \rangle$ ,
- (2) もし  $\tilde{e}_i b \neq \mathbf{0}$  ならば  $\text{wt}(\tilde{e}_i b) = \text{wt}(b) + \alpha_i$ ,  $\varepsilon_i(\tilde{e}_i b) = \varepsilon_i(b) - 1$  であり  $\varphi_i(\tilde{e}_i b) = \varphi_i(b) + 1$ ,
- (3) もし  $\tilde{f}_i b \neq \mathbf{0}$  ならば  $\text{wt}(\tilde{f}_i b) = \text{wt}(b) - \alpha_i$ ,  $\varepsilon_i(\tilde{f}_i b) = \varepsilon_i(b) + 1$  であり  $\varphi_i(\tilde{f}_i b) = \varphi_i(b) - 1$ ,
- (4)  $b, b' \in B$  に対して  $\tilde{f}_i b = b' \iff \tilde{e}_i b' = b$ .

写像  $\tilde{e}_i$  と  $\tilde{f}_i$  は柏原作用素と呼ばれる. また  $\text{wt}(b)$  は  $b$  のウェイトと呼ばれる. この定義において  $\mathbf{0}$  は形式的な記号であり,  $b = \mathbf{0}$  は  $b \notin B$  を意味する.

定義 2.2 (テンソル積規則)  $B_1$  と  $B_2$  を  $\mathfrak{gl}(n)$  クリスタルとする. テンソル積  $B_1 \otimes B_2$  とは集合  $B_1 \times B_2 = \{b_1 \otimes b_2 \mid b_1 \in B_1, b_2 \in B_2\}$  であって, そのクリスタル構造が以下

で与えられるものである.  $i = 1, \dots, n-1$  に対し

- (1)  $\text{wt}(b_1 \otimes b_2) = \text{wt}(b_1) + \text{wt}(b_2)$ ,
- (2)  $\varepsilon_i(b_1 \otimes b_2) = \max\{\varepsilon_i(b_2), \varepsilon_i(b_1) - \langle \text{wt}(b_2), h_i \rangle\}$ ,
- (3)  $\varphi_i(b_1 \otimes b_2) = \max\{\varphi_i(b_1), \varphi_i(b_2) + \langle \text{wt}(b_1), h_i \rangle\}$ ,
- (4)  $\tilde{e}_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} \tilde{e}_i b_1 \otimes b_2 & \varphi_i(b_2) < \varepsilon_i(b_1) \text{ のとき,} \\ b_1 \otimes \tilde{e}_i b_2 & \text{それ以外,} \end{cases}$
- (5)  $\tilde{f}_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} \tilde{f}_i b_1 \otimes b_2 & \varphi_i(b_2) \leq \varepsilon_i(b_1) \text{ のとき,} \\ b_1 \otimes \tilde{f}_i b_2 & \text{それ以外.} \end{cases}$

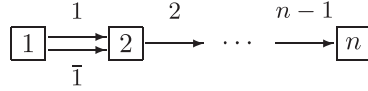
次に [7, 8] で導入された奇妙な Lie 超代数  $\mathfrak{q}(n)$  に対するクリスタル, 単に  $\mathfrak{q}(n)$  クリスタルについて説明する.

**定義 2.3** 集合  $B$  に写像  $\text{wt} : B \rightarrow P$  と  $i \in I := \{1, \dots, n-1, \bar{1}\}$  に対し, 写像  $\varepsilon_i, \varphi_i : B \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  と  $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i : B \rightarrow B \sqcup \{\mathbf{0}\}$  が与えられているとする.  $B$  が  $\mathfrak{q}(n)$  クリスタルであるとは以下の条件が満たされているときをいう.

- (1)  $B$  は  $i = 1, \dots, n-1$  に対し  $\text{wt}$ ,  $\varepsilon_i$ ,  $\varphi_i$ ,  $\tilde{e}_i$  および  $\tilde{f}_i$  に関して  $\mathfrak{gl}(n)$  クリスタルである,
- (2)  $b \in B$  に対して  $\text{wt}(b) \in \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_{\geq 0} \epsilon_i$ ,
- (3)  $b \in B$  に対して  $\text{wt}(\tilde{e}_{\bar{1}} b) = \text{wt}(b) + \alpha_1$  であり  $\text{wt}(\tilde{f}_{\bar{1}} b) = \text{wt}(b) - \alpha_1$ ,
- (4)  $b, b' \in B$  に対して  $\tilde{f}_{\bar{1}} b = b' \iff \tilde{e}_{\bar{1}} b' = b$ ,
- (5)  $3 \leq i \leq n-1$  に対して
  - (i)  $\tilde{e}_{\bar{1}}$  と  $\tilde{f}_{\bar{1}}$  は  $\tilde{e}_i$  や  $\tilde{f}_i$  と交換する,
  - (ii)  $\tilde{e}_{\bar{1}} b \in B$  ならば  $\varepsilon_i(\tilde{e}_{\bar{1}} b) = \varepsilon_i(b)$  であり  $\varphi_i(\tilde{e}_{\bar{1}} b) = \varphi_i(b)$ .

ここで  $\tilde{e}_{\bar{1}}$  と  $\tilde{f}_{\bar{1}}$  は奇型の柏原作用素と呼ばれ, それ以外は偶型の柏原作用素と呼ばれる.

$\mathfrak{q}(n)$  量子群  $U_q(\mathfrak{q}(n))$  上のテンソル表現のカテゴリ  $\mathcal{O}_{int}^{\geq 0}$  [6, 9] における既約最高ウェイト加群  $V(\lambda)$  に付随するクリスタルを  $B_n(\lambda)$  で表す. 例によって  $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \epsilon_i \in P^+$  と分割 (partition) を同一視する [16].  $B_n(\lambda)$  においては, 関係する分割  $\lambda$  は strict な分割  $\lambda = (\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_l > \lambda_{l+1} = 0)$  になる. ここで  $l \leq n$  である. クリスタル  $B$  は,  $\tilde{f}_i b = b'$  ( $b, b' \in B$ ) のとき  $b \xrightarrow{i} b'$  と定義することによって, 色  $i \in I$  の有向色付きグラフとみなすことができる. このグラフをクリスタル・グラフと呼ぶ.  $B_n(\square)$ , すなわち  $\lambda = \epsilon_1 \in P^+$  に対する  $B_n(\lambda)$  のクリスタル・グラフは次のように与えられる.



$q(n)$  クリスタル  $B_1$  と  $B_2$  に対して, テンソル積  $B_1 \otimes B_2$  は  $\mathfrak{gl}(n)$  クリスタルであるが,  $b_1 \otimes b_2$  ( $b_i \in B_i$ ) に対して  $\tilde{e}_{\bar{1}}$  と  $\tilde{f}_{\bar{1}}$  の作用を次のように定めれば  $B_1 \otimes B_2$  もまた  $q(n)$  クリスタルになる.

$$\tilde{e}_{\bar{1}}(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} b_1 \otimes \tilde{e}_{\bar{1}}b_2, & \langle \text{wt}(b_1), k_1 \rangle = \langle \text{wt}(b_1), k_2 \rangle = 0 \text{ のとき,} \\ \tilde{e}_{\bar{1}}b_1 \otimes b_2, & \text{それ以外,} \end{cases}$$

$$\tilde{f}_{\bar{1}}(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} b_1 \otimes \tilde{f}_{\bar{1}}b_2, & \langle \text{wt}(b_1), k_1 \rangle = \langle \text{wt}(b_1), k_2 \rangle = 0 \text{ のとき,} \\ \tilde{f}_{\bar{1}}b_1 \otimes b_2, & \text{それ以外.} \end{cases}$$

$B$  を  $q(n)$  クリスタルとし  $B$  が正規 (normal) な  $\mathfrak{gl}(n)$  クリスタル [4] のクラスに属しているとしよう, すなわち  $B$  のすべての連結成分が支配的整ウェイトと 1 対 1 に対応するとする. ここで  $B$  の連結成分とは,  $i = 1, \dots, n-1$  の柏原作用素ですべて繋がっている  $B$  の極大な部分クリスタル・グラフをいう.

### 3 シフト・タブロー

$\mathcal{P}^+$  を strict な分割  $\lambda = (\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_l > \lambda_{l+1} = 0)$  の集合とする.  $\lambda \in \mathcal{P}^+$  に対し,  $\lambda$  の長さ  $l(\lambda)$  とは  $\lambda$  の正の部分の個数をさす. 型  $\lambda \in \mathcal{P}^+$  のシフト図形 (shifted diagram) を次の集合で定義する.

$$S(\lambda) := \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i \leq j \leq \lambda_i + i - 1, 1 \leq i \leq l(\lambda)\}.$$

ここで  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ .  $S(\lambda)$  に文字を入れたものをシフト・タブロー  $T$  と呼ぶ. ここで  $T$  の  $(i, j)$  成分を  $T_{(i,j)}$  で表す.

**定義 3.1** 型  $\lambda$  の増大シフト・タブロー  $T$  とは,  $S(\lambda)$  にアルファベット  $\{1, 2, \dots\}$  の文字を各行各列ともに狭義単調増加になるように入れたものである.

型  $\lambda$  の増大シフト・タブロー  $T$  の行読み語 (row reading word) とは  $T$  の成分の列  $T_{l(\lambda)}T_{l(\lambda)-1} \cdots T_1$  で定義される. ここで  $T_i$  は  $T$  の第  $i$  行の成分を左から右へ拾っていったものである ( $i = 1, 2, \dots, l(\lambda)$ ).  $T$  の行読み語を  $\text{row}(T)$  で表す.

**例 3.1** 以下のタブロー  $T$

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 5 \\ \hline & 4 & 5 & \\ \hline & & 6 & \\ \hline \end{array}$$

の行読み語は  $\text{row}(T) = 6451345$ .

定義 3.2 型  $\lambda$  のプライム付きタブロー  $T$  とは  $S(\lambda)$  にアルファベット  $\{1' < 1 < 2' < 2 < \dots < n\}$  から文字を次の条件が満たされるように入れたものである.

- (1) 成分は各行各列ともに広義単調増加,
- (2) 各行は高々 1 個の  $i'$  を含む ( $i = 1, \dots, n$ ),
- (3) 各列は高々 1 個の  $i$  を含む ( $i = 1, \dots, n$ ),
- (4) 主対角線上にはプライム付きの文字がない.

型  $\lambda$  のプライム付きタブロー  $T$  の集合を  $\text{PT}_n(\lambda)$  で表す.

プライム付きタブローは, ある  $n$  に対しプライムをとった成分が  $1, 2, \dots, n$  の範囲でちょうど 1 回だけ現れるとき, 標準的 (standard) と呼ばれる.

## 4 FPF 対合 Coxeter-Knuth 挿入

まず, 単純置換  $s_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) で生成される対称群  $\mathfrak{S}_\infty$  の元の簡約語について復習する. 単純置換の積とそのインデックスの列 (語 (word) と呼ぶ) を同一視する. 語  $w$  に対して  $|w|$  で  $w$  の中の文字の数を表し,  $l(w) := \min\{l \mid \exists i_1, \dots, i_l, w = s_{i_1} \cdots s_{i_l}\}$  と定義する.  $|w| = l(w)$  を満たす語  $w$  を簡約語という. 2 つの簡約語  $w$  と  $w'$  が Coxeter-Knuth 同値 (equivalent) であるとは,  $w'$  が  $w$  から連続する 3 文字間の Coxeter-Knuth 関係,  $(a+1)a(a+1) \sim a(a+1)a$ ,  $bac \sim bca$ , および  $acb \sim cab$  ( $a < b < c$ ) [4] を用いて作られるときをいう. このとき  $w \stackrel{\text{CK}}{\sim} w'$  と表す.

$\Theta$  を単純置換の無限積  $(12)(34)(56) \cdots$  とし  $\mathfrak{F}_\infty := \{\pi^{-1}\Theta\pi; \pi \in \mathfrak{S}_\infty\}$  と定義する.  $n$  を偶数とし, 以下の処方で  $z \in \mathfrak{F}_\infty$  を語  $z_1 z_2 \cdots z_n$  と同一視する:  $i = 1, 2, \dots, n$  に対しては  $z(i) = z_i$  であり,  $i > n$  に対しては  $z(i) = \Theta(i)$ . このとき  $i = 1, 2, \dots, n$  に対して  $i \neq z_i$  が成り立つ (固定点がない).

例 4.1  $z = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots \\ 5 & 4 & 6 & 2 & 1 & 3 & 8 & 7 & \dots \end{pmatrix} \in \mathfrak{F}_\infty$  は 546213 と同一視される.

定義 4.1  $z \in \mathfrak{F}_\infty$  に対してシンプレクティック Hecke 語とは  $z = s_{i_1} \cdots s_{i_2} s_{i_1} \Theta s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_l}$

を満たす語  $i_1 i_2 \cdots i_l$  をいう.  $z \in \mathfrak{F}_\infty$  に対するシンプレクティック Hecke 語の集合を  $\mathcal{H}_{\text{Sp}}(z)$  と表す.  $\mathcal{H}_{\text{Sp}}(z)$  中の簡約語を FPF 対合語 [10, 11, 12] と呼び, その集合を  $\hat{\mathcal{R}}_{\text{FPF}}(z)$  と表す.

2つの FPF-対合語  $w$  と  $w'$  が同値であるとは,  $w'$  が  $w$  から連続する文字の関係  $ab \sim ba$  ( $|a - b| > 1$ ),  $a(a+1)a \sim (a+1)a(a+1)$ , および関係  $i_1(i_1-1)\cdots i_n \sim i_1(i_1+1)\cdots i_n$  ( $i_1 \geq 2$ ) を用いて作られるときをいう. このとき  $w \stackrel{\text{Sp}}{\sim} w'$  と表す.

$w = u_1 u_2 \cdots u_l \in \hat{\mathcal{R}}_{\text{FPF}}(z)$  とする.  $w$  からタブローの対の列

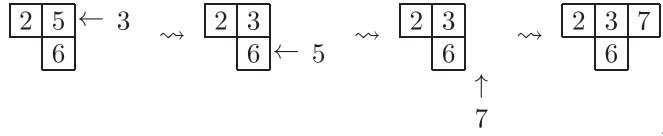
$$(\emptyset, \emptyset) = (P^{(0)}, Q^{(0)}), (P^{(1)}, Q^{(1)}), \dots, (P^{(l)}, Q^{(l)}) = (P_{\text{Sp}}(w), Q_{\text{Sp}}(w)),$$

を次のように構成する. ここで  $P^{(k)}$  は増大シフト・タブローであり  $Q^{(k)}$  はプライム付きタブローである.  $P^{(k)}$  は,  $P^{(k-1)}$  に文字  $u_k$  を次のように挿入することによって作られる. まず,  $u_k$  を  $P^{(k-1)}$  の第 1 行に挿入する. 文字  $a$  を増大シフト・タブロー  $T$  の行あるいは列 ( $L$  とする) に挿入する規則は次のとおりである. 最初に  $L$  の中で  $a \leq b$  を満たす最小の文字  $b$  を探す. そのような文字がなければ  $a$  を  $L$  の最後に付加し終了する. そうでなければ

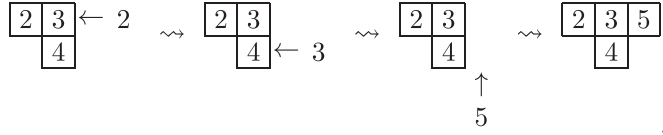
1.  $a = b$  ならば  $L$  はそのままにして,  $L$  が行ならば  $a + 1$  をすぐ下の行に挿入し,  $L$  が列ならば  $a + 1$  を右隣の列に挿入する.
2.  $L$  が行であり  $b$  が  $L$  の先頭の文字でかつ  $a \not\equiv b \pmod{2}$  ならば,  $L$  はそのままにして  $a + 2$  を右隣の列に挿入する.
3. それ以外の場合,  $L$  中の  $b$  を  $a$  で置き換える. 次に  $L$  が行ならば  $b$  を直下の行に挿入し,  $L$  が列あるいは  $b$  が主対角線上にあったならば  $b$  を右隣の列に挿入する.

$Q^{(k)}$  は  $Q^{(k-1)}$  に箱  $\boxed{k}$  あるいは  $\boxed{k'}$  を付け加えることで得られる.  $P^{(k)}$  が行挿入で終了した場合に箱  $\boxed{k}$  を, 列挿入で終了した場合に箱  $\boxed{k'}$  を付け加える.  $P_{\text{Sp}}(w)$  と  $Q_{\text{Sp}}(w)$  はそれぞれ挿入タブローおよび記録タブローと呼ばれる. このアルゴリズムは FPF-対合 Coxeter-Knuth 挿入 [18] と呼ばれ, 写像  $\text{H}_{\text{Sp}} : w \mapsto (P_{\text{Sp}}(w), Q_{\text{Sp}}(w))$  で表す. これは FPF-対合語に制限したシンプレクティック・シフト Hecke 挿入 [18] であり, また Edelman-Greene 挿入 [5] のシフト類似になっている. 増大シフト・タブロー  $T$  に文字  $x$  あるいは語  $u_1 u_2 \cdots$  を挿入する過程を  $T \stackrel{\text{Sp}}{\leftarrow} x$  あるいは  $T \stackrel{\text{Sp}}{\leftarrow} u_1 u_2 \cdots$  と表す. またこれは結果として得られるタブローも表すものとする.

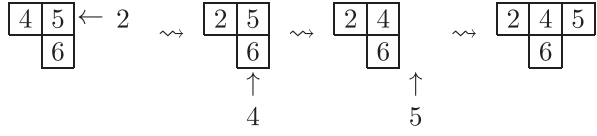
例 4.2  $\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 5 \\ \hline & 6 \\ \hline \end{array} \stackrel{\text{Sp}}{\leftarrow} 3$  の挿入過程は



$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array} \xleftarrow{Sp} 2$  の挿入過程は



$\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline 6 & \\ \hline \end{array} \xleftarrow{Sp} 2$  の挿入過程は



例 4.3 FPF-対合語 6241 の FPF-対合 Coxeter-Knuth 挿入.

$$P_{Sp}(6241) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} \quad \text{and} \quad Q_{Sp}(6241) = \begin{array}{|c|c'|c'|} \hline 1 & 2' & 4' \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$$

定理 4.1 ([18])  $w$  と  $w'$  を  $P_{Sp}(w) = P_{Sp}(w')$  を満たす FPF-対合語とする. このとき  $w \stackrel{Sp}{\sim} w'$  が成り立つ.

定理 4.1 の逆は成り立たない. 例えば  $26434 \stackrel{Sp}{\sim} 42346$  であるが

$$P_{Sp}(26434) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline 4 & 6 & \\ \hline \end{array} \quad \text{and} \quad P_{Sp}(42346) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 4 & 6 \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array}$$

しかし次のことが成り立つ.

定理 4.2 ([15, 19])  $w$  と  $w'$  を FPF-対合語とする.  $w \stackrel{CK}{\sim} w'$  であるための必要十分条件は  $P_{Sp}(w) = P_{Sp}(w')$  である.

これが主要結果の 1 つである. 証明は非常に長くなるので本稿では省略する. [15, 19] を参照してください.

定理 4.3 ([18])  $z \in \mathfrak{F}_\infty$  とする. このとき写像  $H_{Sp}$  は  $\hat{\mathcal{R}}_{FPF}(z)$  と対  $(P, Q)$  の集合の間

の全単射を与える. ここで,  $P$  は  $\mathbf{rot}(P) \in \hat{\mathcal{R}}_{\text{FPF}}(z)$  であるような増大シフト・タブローであり,  $Q$  は  $P$  と型が同じ標準的プライム付きタブローである.

$w \in \hat{\mathcal{R}}_{\text{FPF}}(z)$  が与えられたとき,  $w$  の増大列分解  $w^1 w^2 \cdots w^m$  とは  $w = w^1 w^2 \cdots w^m$ ,  $|w| = |w^1| + \cdots + |w^m|$  であって, 各因子  $w^i$  が狭義単調増加になっているものである. 以下では,  $w^1 w^2 \cdots w^m$  を  $w$  の増大列分解とも  $w$  そのものともみなす.  $\hat{\mathcal{R}}_{\text{FPF}}(z)$  の FPF-対合語のすべての増大列分解 ( $m$  因子) の集合を  $\text{RF}_{\text{FPF}}^m(z)$  で表す. 2つの分解  $w^1 w^2 \cdots w^m$  と  $\tilde{w}^1 \tilde{w}^2 \cdots \tilde{w}^m$  (ともに  $\text{RF}_{\text{FPF}}^m(z)$  の元) が同値であるとは, 2つの語  $w = w^1 w^2 \cdots w^m$  と  $\tilde{w} = \tilde{w}^1 \tilde{w}^2 \cdots \tilde{w}^m$  が同値 ( $w \stackrel{\text{Sp}}{\sim} \tilde{w}$ ) であるときをいう.

$w \in \hat{\mathcal{R}}_{\text{FPF}}(z)$  の増大列分解  $w^1 w^2 \cdots w^m$  に対して  $Q_{\text{Sp}}(w)$  から  $Q_{\text{Sp}}(w^1 w^2 \cdots w^m)$  を次の規則で作る:  $x$  を  $Q_{\text{Sp}}(w)$  の成分で,  $w^i$  の中の文字を増大シフト・タブローに挿入したときに新しく現れる成分とする. このとき,  $x$  がプライム無しの文字ならば  $x$  を  $i$  で置き換え,  $x$  がプライム付きの文字ならば  $x$  を  $i'$  で置き換える. この手続きを  $Q_{\text{Sp}}(w)$  のすべての成分について行う.

例 4.4 例 4.3 の FPF-対合語 6241 に対する増大列分解 (6)(24)(1) では

$$Q_{\text{Sp}}((6)(24)(1)) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2' & 3' \\ \hline & 2 & \\ \hline \end{array} .$$

$w \in \hat{\mathcal{R}}_{\text{FPF}}(z)$  の増大列分解  $w^1 w^2 \cdots w^m$  からタブローの対  $(P_{\text{Sp}}(w), Q_{\text{Sp}}(w^1 w^2 \cdots w^m))$  を構成するアルゴリズムを半標準 (semistandard) FPF-対合 Coxeter-Knuth 挿入と呼び, 写像  $H'_{\text{Sp}} : w^1 w^2 \cdots w^m \mapsto (P_{\text{Sp}}(w), Q_{\text{Sp}}(w^1 w^2 \cdots w^m))$  で表す.  $P_{\text{Sp}}(w)$  は前と同様に挿入タブローと呼ばれる.

定理 4.4 ([18])  $z \in \mathfrak{F}_\infty$  とする. このとき写像  $H'_{\text{Sp}}$  は  $\text{RF}_{\text{FPF}}^m(z)$  と対  $(P, Q)$  の集合の間の全単射を与える. ここで  $P$  は  $\mathbf{rot}(P) \in \hat{\mathcal{R}}_{\text{FPF}}(z)$  を満たす増大シフト・タブローであり,  $Q$  は  $P$  と型が同じプライム付きタブローである.

## 5 FPF 対合語の増大列分解に対する奇妙な超クリスタル構造

$\text{PT}_m(\lambda)$  が  $\mathfrak{q}(m)$  クリスタルの構造を持つことはすでに確立されている [1, 2, 14].  $\text{PT}_m(\lambda)$  の  $\mathfrak{gl}(m)$  クリスタルの構造および偶型の柏原作用素  $\tilde{e}_i^P$  and  $\tilde{f}_i^P$  ( $i = 1, \dots, m-1$ ) は Hawkes, Paramonov, および Schilling [13] と Assaf および Oguz [1, 2] によって与えられている.  $\text{PT}_m(\lambda)$  上の奇型の柏原作用素  $\tilde{f}_1^P$  および  $\tilde{e}_1^P$  は Assaf および Oguz [1, 2]



と筆者 [14] により与えられている.

$H'_{\text{Sp}}$  は全単射 (定理 4.4) であるから  $\text{PT}_m(\lambda)$  の  $\mathfrak{gl}(m)$  クリスタル構造を  $\text{RF}_{\text{FPF}}^m(z)$  のそれに翻訳することができる. すなわち,  $\text{RF}_{\text{FPF}}^m(z)$  上の柏原作用素  $\tilde{e}_i^F$  and  $\tilde{f}_i^F$  ( $i = 1, \dots, m-1, \bar{1}$ ) は  $P_{\text{Sp}}(w)$  を固定して次で与えられる.

$$\tilde{e}_i^F = (H'_{\text{Sp}})^{-1} \circ (\text{id}, \tilde{e}_i^P) \circ H'_{\text{Sp}}, \quad \tilde{f}_i^F = (H'_{\text{Sp}})^{-1} \circ (\text{id}, \tilde{f}_i^P) \circ H'_{\text{Sp}}, \quad (5.1)$$

また  $w^1 w^2 \cdots w^m \in \text{RF}_{\text{FPF}}^m(z)$  のウェイトは

$$\text{wt}(w^1 \cdots w^m) = \sum_{i=1}^m |w^i| \epsilon_i.$$

と定義される.

まず奇型の柏原作用素を構成しよう.  $\text{cont}(w^i)$  で  $w^i$  の中の文字の集合とする.

**補題 5.1**  $w^1 w^2 \cdots w^m \in \text{RF}_{\text{FPF}}^m(z)$  を  $z \in \mathfrak{F}_\infty$  に対する  $w \in \hat{\mathcal{R}}_{\text{FPF}}(z)$  の増大列分解とする. 奇型の柏原作用素  $\tilde{f}_1^F$  の  $w^1 w^2 \cdots w^m$  への作用は次の規則で与えられる.

$\tilde{f}_1^F$  は  $\tilde{f}_1^F(w^1 w^2 \cdots w^m) \neq \mathbf{0}$  ならば最初の 2 つの因子を変える. まず  $|w^2| \neq 0$  と仮定する.

1.  $|w^1| = 0.$

$$\tilde{f}_1^F(w^1 w^2 \cdots w^m) = \mathbf{0}.$$

2.  $|w^1| = 1.$

$w^1 = u_1 < \min(\text{cont}(w^2))$  ならば  $\tilde{f}_1^F(w^1 w^2 \cdots w^m) = \tilde{w}^1 \tilde{w}^2 \cdots w^m$ . ここで  $\tilde{w}^1 = ()$  and  $\text{cont}(\tilde{w}^2) = \text{cont}(w^2) \cup \{u_1\}$ . それ以外では  $\tilde{f}_1^F(w^1 w^2 \cdots w^m) = \mathbf{0}$ .

3.  $|w^1| \geq 2.$

$w^1 = u_1 u_2 \cdots$  と書く.  $u_2 > u_1 + 1$  かつ  $u_1 < \min(\text{cont}(w^2))$  ならば  $\tilde{f}_1^F(w^1 w^2 \cdots w^m) = \tilde{w}^1 \tilde{w}^2 \cdots w^m$ . ここで  $\text{cont}(\tilde{w}^1) = \text{cont}(w^1) \setminus \{u_1\}$  であり  $\text{cont}(\tilde{w}^2) = \text{cont}(w^2) \cup \{u_1\}$ .  $u_2 = u_1 + 1$  かつ  $u_1 < \min(\text{cont}(w^2))$  ならば  $\tilde{f}_1^F(w^1 w^2 \cdots w^m) = \tilde{w}^1 \tilde{w}^2 \cdots w^m$ . ここで  $\text{cont}(\tilde{w}^1) = \text{cont}(w^1) \setminus \{u_1 + 1\}$  であり  $\text{cont}(\tilde{w}^2) = \text{cont}(w^2) \cup \{u_1 - 1\}$ . それ以外では  $\tilde{f}_1^F(w^1 w^2 \cdots w^m) = \mathbf{0}$ .

$|w^2| = 0$  ならば条件  $u_1 < \min(\text{cont}(w^2))$  を落すだけでよい.

**補題 5.2**  $w^1 w^2 \cdots w^m \in \text{RF}_{\text{FPF}}^m(z)$  を  $z \in \mathfrak{F}_\infty$  に対する  $w \in \hat{\mathcal{R}}_{\text{FPF}}(z)$  の増大列分解とする. 奇型の柏原作用素  $\tilde{e}_1^F$  の  $w^1 w^2 \cdots w^m$  への作用は次の規則で与えられる.

$\tilde{e}_1^F$  は  $\tilde{e}_1^F(w^1 w^2 \cdots w^m) \neq \mathbf{0}$  ならば最初の 2 つの因子を変える.

1.  $|w^2| = 0$ .  
 $\tilde{e}_1^F(w^1 w^2 \cdots w^m) = \mathbf{0}$ .
2.  $|w^1| = 0$  and  $|w^2| \neq 0$ .  
 $\tilde{e}_1^F(w^1 w^2 \cdots w^m) = \tilde{w}^1 \tilde{w}^2 \cdots w^m$ . ここで,  $v_1$  を  $w_2$  の最初の文字として  $\tilde{w}^1 = v_1$  および  $\text{cont}(\tilde{w}^2) = \text{cont}(w^2) \setminus \{v_1\}$ .
3.  $|w^1| \neq 0$  and  $|w^2| \neq 0$ .  
 $w^1 = u_1 u_2 \cdots$  and  $w^2 = v_1 \cdots$  と書く.  $u_1 > v_1 + 1$  ならば  $\tilde{e}_1^F(w^1 w^2 \cdots w^m) = \tilde{w}^1 \tilde{w}^2 \cdots w^m$ . ここで  $\text{cont}(\tilde{w}^1) = \text{cont}(w^1) \cup \{v_1\}$  であり  $\text{cont}(\tilde{w}^2) = \text{cont}(w^2) \setminus \{v_1\}$ .  $u_1 = v_1 + 1$  ならば  $\tilde{e}_1^F(w^1 w^2 \cdots w^m) = \tilde{w}^1 \tilde{w}^2 \cdots w^m$ . ここで  $\text{cont}(\tilde{w}^1) = \text{cont}(w^1) \cup \{u_1 + 1\}$  であり  $\text{cont}(\tilde{w}^2) = \text{cont}(w^2) \setminus \{u_1 - 1\}$ . それ以外では  $\tilde{e}_1^F(w^1 w^2 \cdots w^m) = \mathbf{0}$ .

証明は簡単であるが省略する.

構成のやり方から  $\mathfrak{q}(m)$  クリスタル  $\text{RF}_{\text{PPF}}^m(z)$  の同じ連結成分において  $\tilde{f}_1^F$  や  $\tilde{e}_1^F$  で繋がった 2 つのヴァーテックスは同じ挿入タブロー  $P_{\text{Sp}}(w)$  を持ち,  $\tilde{f}_1^F$  や  $\tilde{e}_1^F$  は  $P_{\text{Sp}}(w)$  の選び方によらない.

偶型の柏原作用素については, Morse および Schilling [4, 20] が対称群の簡約語の減少列分解に対して与えたものと本質的に同等であることが最近示された [19]. Morse-Schilling の柏原作用素は (ここでの設定に必要な変更を加えて) 次のように与えられる.

柏原作用素  $\tilde{e}_i^F$  および  $\tilde{f}_i^F$  はブロック  $w^i w^{i+1}$  ( $i = 1, \dots, m-1$ ) だけに作用する. まず  $w^i$  と  $w^{i+1}$  のペアリングを次のように定義する:  $\text{cont}(w^{i+1})$  の最大の文字  $b$  をとり,  $\text{cont}(w^i)$  の中で  $a > b$  を満たす最小の文字  $a$  とペアにする. そのような  $a$  がなければ  $b$  はペアされない. この手続きを  $w^{i+1}$  の文字について減少順に行う. このとき  $w^i$  で既にペアされた文字は無視する.

$$R_i := \{b \in \text{cont}(w^{i+1}) \mid b \text{ is unpaired in the } w^i w^{i+1}\text{-pairing}\}$$

および

$$L_i := \{b \in \text{cont}(w^i) \mid b \text{ is unpaired in the } w^i w^{i+1}\text{-pairing}\}.$$

と定義する.  $\tilde{f}_i^F(w^1 \cdots w^m)$  はブロック  $w^i w^{i+1}$  を  $\tilde{w}^i \tilde{w}^{i+1}$  で置き換えたものになる. ここで  $c = \max L_i$  および  $s = \min \{j \geq 0 \mid c + j + 1 \notin \text{cont}(w^i)\}$  として  $\text{cont}(\tilde{w}^i) = \text{cont}(w^i) \setminus \{c\}$  および  $\text{cont}(\tilde{w}^{i+1}) = \text{cont}(w^{i+1}) \cup \{c + s\}$ .  $L_i = \emptyset$  ならば  $\tilde{f}_i^F(w^1 \cdots w^m) = \mathbf{0}$ . 同様に  $\tilde{e}_i^F(w^1 \cdots w^m)$  はブロック  $w^i w^{i+1}$  を  $\tilde{w}^i \tilde{w}^{i+1}$  で置き換えたものになる. ここで  $c = \min R_i$  および  $t = \min \{j \geq 0 \mid c - j - 1 \notin \text{cont}(w^{i+1})\}$  とし

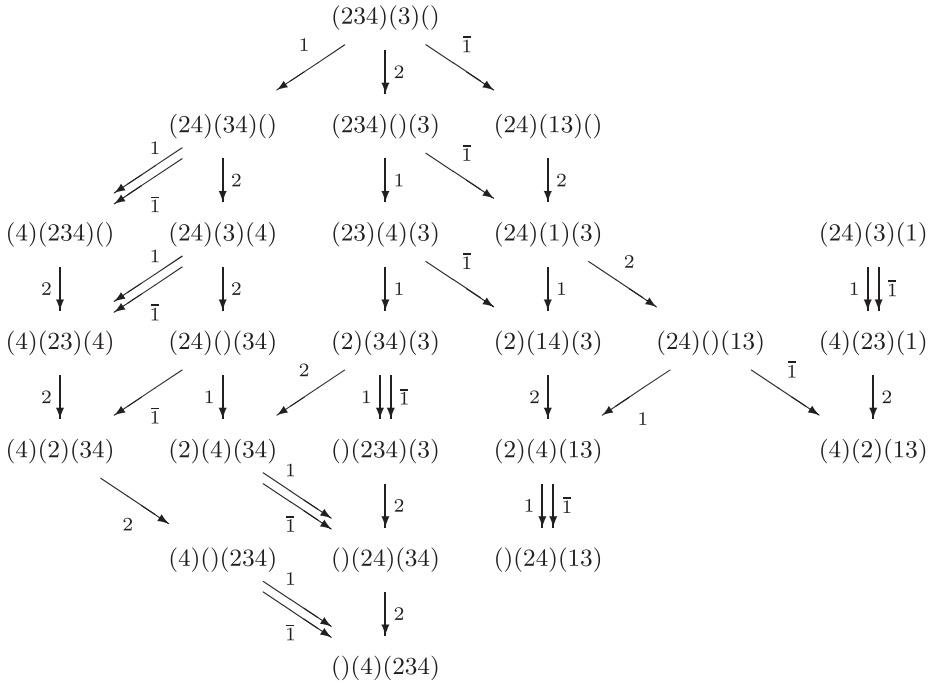


図 5.1 FPF-対合語 2143, 2343, 2413, 2431, 2434, 4213, 4231 および 4234 の増大列分解の  $q(3)$  クリスタル構造. これらの語の集合は  $\hat{\mathcal{R}}_{\text{FPF}}(546213)$ .

て  $\text{cont}(\tilde{w}^i) = \text{cont}(w^i) \cup \{c - t\}$  および  $\text{cont}(\tilde{w}^{i+1}) = \text{cont}(w^{i+1}) \setminus \{c\}$ .  $R_i = \emptyset$  ならば  $\tilde{e}_i^F(w^1 \dots w^m) = \mathbf{0}$ .

結局, 次の定理が得られた.

**定理 5.1** ([15, 19])  $z \in \mathfrak{F}_\infty$  とする. 集合  $\text{RF}_{\text{FPF}}^m(z)$  は  $q(m)$  クリスタルの構造を持つ. 偶型の柏原作用素  $\tilde{e}_i^F$  and  $\tilde{f}_i^F$  ( $i = 1, 2, \dots, m - 1$ ) は上に述べた Morse-Schilling の柏原作用素で与えられる. 奇型の柏原作用素は補題 5.1 と 5.2 で与えられる.

これが第 2 の主要結果である.

### 謝辞

有益な助言をいただきました Eric Marberg 氏と尾角正人先生に感謝いたします. 本研究は, 大阪市立大学数学研究所 (文科省共同利用・共同研究拠点「数学・理論物理の協働・

共創による新たな国際的研究・教育拠点」によって支援されました。

## 参考文献

- [1] S. Assaf and E. K. Oguz, Crystal graphs for shifted tableaux, arXiv:math/1802.07352v1.
- [2] S. Assaf and E. K. Oguz, A local characterization of crystals for the quantum queer superalgebra, arXiv:math/1803.06317v2.
- [3] A. S. Buch, A. Kresch, M. Shimozono, H. Tamvakis, and A. Yong, Stable Grothendieck polynomials and  $K$ -theoretic factor sequence, *Math. Ann.* **340** (2008) 359–382.
- [4] D. Bump and A. Schilling, “Crystal Bases: Representations and Combinatorics,” World Scientific Press (2017).
- [5] P. Edelman and C. Greene, Balanced tableaux, *Adv. Math.* **63** (1987), 42–99.
- [6] D. Grantcharov, J. H. Jung, S.-J. Kang, M. Kashiwara, and M. Kim, Quantum queer superalgebra and crystal bases, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **86** (2010), 177–182.
- [7] D. Grantcharov, J. H. Jung, S.-J. Kang, M. Kashiwara, and M. Kim, Crystal bases for the quantum queer superalgebra and semistandard decomposition tableaux, *Trans. Amer. Math. Soc.* **366** (2013), 457–489.
- [8] D. Grantcharov, J. H. Jung, S.-J. Kang, M. Kashiwara, and M. Kim, Crystal bases for the quantum queer superalgebra, *J. Europ. Math. Soc.* **17** (2015), 1593–1627.
- [9] D. Grantcharov, J. H. Jung, S.-J. Kang, and M. Kim, Highest weight modules over quantum queer superalgebra  $U_q(\mathfrak{q}(n))$ , *Comm. Math. Phys.* **296** (2010), 827–860.
- [10] Z. Hamaker, E. Marberg, and B. Pawlowski, Fixed-point-free 対合  $s$  and Schur  $P$ -positivity, arXiv:math/1706.06665v2.
- [11] Z. Hamaker, E. Marberg, and B. Pawlowski, Involution words: counting problems and connections to Schubert calculus for symmetric orbit closures, *J. Combin. Theory Ser. A* **160** (2018), 217–260.
- [12] Z. Hamaker, E. Marberg, and B. Pawlowski, Involution words II: braid relations and atomic structures, *J. Alg. Combin.* **45** (2017), 701–743.

- [13] G. Hawkes, K. Paramonov, and A. Schilling, Crystal analysis of the type  $C$  Stanley symmetric functions, *Electronic J. Combin.* **24** (2017) #P3.51.
- [14] T. Hiroshima,  $q$ -crystal structure on primed tableaux and on signed unimodal factorizations of reduced words of type B, *Publ. RIMS Kyoto Univ.* **55** (2019), 369–399.
- [15] T. Hiroshima, Queer supercrystal structure for increasing factorizations of fixed-point-free involution words, arXiv:math/1907.10836v1.
- [16] J. Hong and S.-J. Kang, “Introduction to quantum groups and crystal bases,” Graduate Studies in Mathematics **42**, Amer. Math. Soc, (2002).
- [17] M. Kashiwara, On crystal bases of the  $q$ -analogue of universal enveloping algebras, *Duke Math. J.* **63** (1991), 465–516.
- [18] E. Marberg, A symplectic refinement of shifted Hecke insertion, arXiv:math/1901.06771v3.
- [19] E. Marberg, Bumping operators and insertion algorithms for queer supercrystals arXiv:math/1910.02261v1.
- [20] J. Morse and A. Schilling, Crystal approach to affine Schubert calculus, *Int. Math. Res. Not.* **2016** (2016), 2239–2294.