保型 L 関数の族の値分布について

東京工業大学理学院数学系　峰 正博

Masahiro Mine
Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology

1　導入

1.1　伊原・松本の M 関数

ゼータ関数や L 関数の値分布に関して，極限定理と呼ばれる一連の定理がある．Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の場合，極限定理は Bohr と Jessen [1] によって最初に証明され，その後様々な別証明や定式化がなされた．以下は Laurinčikas [5] による定式化である．

定理 1. 実数 $\sigma > 1/2$ を固定する．また $T > 0$ に対して $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ 上の確率測度 $\widetilde{P}_{T,\sigma}$ を

$$\widetilde{P}_{T,\sigma}(A) = \frac{1}{T}\mu_1\left(\{t \in [0,T] \mid \zeta(\sigma+it) \in A\}\right)$$

と定義する．ただし μ_1 は 1 次元 Lebesgue 測度である．このときある確率測度 $\widetilde{Q}_\sigma$ が存在して，$T \to \infty$ のとき $\widetilde{P}_{T,\sigma}$ は $\widetilde{Q}_\sigma$ に弱収束する．

極限定理においては，$\zeta(s)$ の代わりに $\log\zeta(s)$ を用いて定義される

$$P_{T,\sigma}(A) = \frac{1}{T}\mu_1\left(\{t \in [0,T] \mid \log\zeta(\sigma+it) \in A,\ \sigma+it \in G\}\right)$$

という確率測度について考察することも多い．この場合にも $T \to \infty$ のとき $P_{T,\sigma}$ が弱収束するような確率測度 Q_σ が存在するのだが，まずは $\log\zeta(\sigma+it)$ の分枝や集合 G について述べねばならない．右半平面 $D = \{s = \sigma+it \mid \sigma > 1/2\}$ の部分集合として，

$$G = D \setminus \bigcup_{\substack{\zeta(\rho)=0,\infty \\ \mathrm{Re}(\rho)>1/2}} \{\sigma + i\,\mathrm{Im}(\rho) \mid 1/2 < \sigma \leq \mathrm{Re}(\rho)\}$$

と定める．すると $\zeta(s)$ は単連結領域 G における非零な正則関数で，$\log\zeta(s)$ を G 上の正則多価関数として定義することができる．このとき $\log\zeta(s)$ の分枝を，$\mathrm{Re}(s) > 1$ での通常の Dirichlet 級数表示が成り立つように選ぶ．

極限測度 Q_σ は 2 次元 Lebesgue 測度 μ_2 に対して絶対連続であることが知られている．実際，ある非負値連続関数 M_σ が存在して，Q_σ は

$$Q_\sigma(A) = \int_A M_\sigma(z)\,|\mathrm{d}z|$$

と表示される．ただし Lebesgue 測度は $|\mathrm{d}z| = (2\pi)^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ と正規化している．関数 M_σ を用いると，定理 1 は $\log\zeta(\sigma+it)$ の平均値に関する公式

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \Phi(\log\zeta(\sigma+it)) = \int_{\mathbb{C}} \Phi(z)M_\sigma(z)\,|\mathrm{d}z|$$

が任意の有界連続関数 Φ に対して成り立つと言い換えることができる．伊原康隆氏と松本耕二氏 [2] は，この M_σ という関数が Dirichlet L 関数 $L(s,\chi)$ の平均値に関する類似の公式

$$\mathrm{Ave}_\chi\,\Phi(\log L(s,\chi)) = \int_{\mathbb{C}} \Phi(z)M_\sigma(z)\,|\mathrm{d}z| \tag{1.1}$$

を満たすことに着目し，このようにゼータ関数や L 関数の値分布から生じる確率密度関数を「M 関数」と名付けた．ここで Ave_χ は Dirichlet 指標 χ に関する平均を表すが，厳密な定義は [2, Section 2] を参照していただきたい．

1.2　ランダム Euler 積を用いた解釈

Riemann ゼータ関数の Euler 積表示

$$\zeta(\sigma+it) = \prod_p \left(1-p^{-(\sigma+it)}\right)^{-1} \tag{1.2}$$

を思い出しておこう．右辺に現れる各 p^{-it} を確率変数に見立てることにより，ランダム Euler 積と呼ばれる確率変数

$$\zeta(\sigma,X) = \prod_p \left(1-p^{-\sigma}X_p\right)^{-1} \tag{1.3}$$

が定義される．ただし，$X=(X_p)_p$ は $\mathcal{T} := \{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}$ に値をとる独立確率変数の無限列であり，各 X_p は $\mathcal{T}$ 上で一様に分布しているとする．Euler 積 (1.2) の絶対収束域は $\sigma>1$ であるが，ランダム Euler 積 (1.3) は almost surely の意味で $\sigma>1/2$ に対して収束することは特記すべき性質である．

前節の極限測度 Q_σ や M 関数 M_σ は，ランダム Euler 積 $\zeta(\sigma,X)$ の言葉で記述することもできる．実際 Q_σ は $\log\zeta(\sigma,X)$ の分布に一致することが証明できて，

$$\mathbb{P}(\log\zeta(\sigma,X)\in A) = Q_\sigma(A) = \int_A M_\sigma(z)\,|\mathrm{d}z|$$

あるいは

$$\mathbb{E}\left[\Phi(\log\zeta(\sigma,X))\right]=\int_{\mathbb{C}}\Phi\,\mathrm{d}Q_\sigma=\int_{\mathbb{C}}\Phi(z)M_\sigma(z)\,|\mathrm{d}z|$$

などといった関係が導かれる．ただし $\mathbb{P}(E)$ は事象 E の確率を表し，$\mathbb{E}[\mathcal{X}]$ は確率変数 $\mathcal{X}$ の期待値を表す．このような観点から考えると，$P_{T,\sigma}$ が Q_σ に弱収束するという事実は，$\zeta(\sigma+it)$ の値の振る舞いが $\zeta(\sigma,X)$ と深く関係していることの有力な証拠を与えていると言える．この方向性では最近出版された Lamzouri–Lester–Radziwiłł の論文 [6] で詳細な結果が得られている．

2　保型 L 関数に対する M 関数

以下 q を素数とし，$S_k(q)$ を $\Gamma_0(q)$ に対する重さ k の正則カスプ形式のなす空間とする．またその基底として primitive form 全体の集合 $B_k(q)$ をとる．Dirichlet L 関数の平均値に関する公式 (1.1) の保型 L 関数における類似として，$f\in B_k(q)$ を動かしたときの L 関数 $L(s,f)$ の値分布や対応する M 関数の研究が，Lebacque 氏と Zykin 氏 [7]，松本耕二氏と梅垣由美子氏 [8] によって近年進められた．彼らの研究の目標は，適切な意味で定められた平均 Ave_f と何らかの M 関数 $\mathcal{M}_s$ に対して，平均値公式

$$\mathrm{Ave}_f\,\Phi(\log L(s,f))=\int_{\mathbb{C}}\Phi(z)\mathcal{M}_s(z)\,|\mathrm{d}z| \tag{2.1}$$

を示すことであったが，様々な事情によって完全解決には至らなかった．結論から言えば，複素数 s が実数であるか否かによって M 関数 $\mathcal{M}_s$ の様相が大幅に変わるのであって，そこが問題を複雑化させていたように思える．本稿の主結果は (2.1) を完全な形で証明したものである．（ただし s が実数の場合は多少の修正が必要となる．）なお，以下の議論では $k=2$ とする．これには議論の簡略化のためという理由もあるが，証明中で保型 L 関数のある種の零点密度評価を用いていて，参照元 [4] ではこの場合にのみ示されているという事情もある．

2.1　ランダム Euler 積の構成

1.2 節に倣い，保型 L 関数 $L(s,f)$ に対応するランダム Euler 積 $L(s,Y)$ を構成することによって，目的の M 関数 $\mathcal{M}_s$ を得ることを目指す．一般に $f\in S_2(q)$ を

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_f(n)n^{1/2}e^{2\pi inz},\quad \lambda_f(1)=1$$

と Fourier 展開しておく．とくに $f\in B_2(q)$ の場合には保型 L 関数 $L(s,f)$ の Euler 積が

$$L(s,f)=\left(1-\lambda_f(q)q^{-s}\right)^{-1}\prod_{p\neq q}\det\left(I-p^{-s}A_p(f)\right)^{-1} \tag{2.2}$$

として与えられる．ただし $A_p(f)$ は，$p \neq q$ に対して $\lambda_f(p) = 2\cos\theta_p(f)$ とおいたとき，$A_p(f) = \mathrm{diag}(e^{i\theta_p(f)}, e^{-i\theta_p(f)})$ として定義される対角行列である．また $I = \mathrm{diag}(1,1)$ は単位行列である．ランダム Euler 積を適切に構成するには，$A_p(f)$ の分布に関する考察が重要となる．具体的には行列 $A_p(f)$ が，f を動かしたとき独立な確率変数であるかのように振舞っていることを期待したい．定義から $A_p(f)$ の分布を調べるには偏角 $\theta_p(f)$ の分布を調べればよいが，これに関しては 次の補題が Petersson formula を用いると証明できる．

補題 2. 素数 $p_1, \dots, p_r$ を固定する．このとき任意の r 変数連続関数 F に対して，

$$\lim_{q\to\infty} \sum_{f\in B_2(q)} \omega_f F(\theta_{p_1}(f), \dots, \theta_{p_r}(f)) = \int_{[0,\pi]^r} F(\theta_1, \dots, \theta_r)\, \mathrm{d}\mu_{ST}(\theta_1) \cdots \mathrm{d}\mu_{ST}(\theta_r)$$

が成り立つ．ただし $\omega_f = \frac{1}{4\pi||f||}$ は harmonic weight で，μ_{ST} は Sato–Tate 測度である．

すなわち偏角の組 $(\theta_{p_1}(f), \dots, \theta_{p_r}(f))$ は，ω_f で重み付けると，$[0,\pi]^r$ 上で μ_{ST} の直積測度に関して一様に分布しているのである．そこで $[0,\pi]$ に値をとる独立確率変数の無限列 $(\Theta_p)_p$ で，各 Θ_p が Sato–Tate 測度に関して一様に分布するものを考える．さらにこの Θ_p を用いて，$Y = (Y_p)_p$ を各 p に対して $Y_p = \mathrm{diag}(e^{i\Theta_p}, e^{-i\Theta_p})$ とおくことによって定める．以上の準備のもと，

$$L(s, Y) = \prod_p \det\left(I - p^{-s} Y_p\right)^{-1} \tag{2.3}$$

と定義する．このランダム Euler 積が本当に元々の L 関数の値分布と結びついているかの検証は後に回すことにして，先にその性質を以下に列挙しておく．

命題 3. 無限積 (2.3) は almost surely で $\mathrm{Re}(s) > 1/2$ に対して収束する．また $L(s,Y)$ は複素数値の確率変数を定めるが，とくに s が実数の場合は実数値の確率変数となる．

命題 4. 複素数 $s = \sigma + it$ が実数でないとき，$\log L(s,Y)$ の分布は 2 次元 Lebesgue 測度 μ_2 に対して絶対連続である．さらに，非負値連続関数 $\mathcal{M}_s$ が存在し，

$$\mathbb{P}(\log L(s,Y) \in A) = \int_A \mathcal{M}_s(z)\, |\mathrm{d}z|$$

が任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ に対して成立する．

命題 5. 複素数 $s = \sigma$ が実数であるとき，$\log L(\sigma, Y)$ を実数値の確率変数と見れば，その分布は 1 次元 Lebesgue 測度 μ_1 に対して絶対連続である．さらに，非負値連続関数 $\mathcal{M}_\sigma$ が存在し，

$$\mathbb{P}(\log L(\sigma,Y) \in A) = \int_A \mathcal{M}_\sigma(x)\, |\mathrm{d}x|$$

が任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して成立する．ただし $|\mathrm{d}x| = (2\pi)^{-1/2}\mathrm{d}x$ とする．

2.2　主結果，および証明の方針

主結果を述べる前に，平均の取り方を適切に定めておく必要がある．まず 1.1 節の領域 G と同様に，$f \in B_2(q)$ に対して

$$G_f = D \setminus \bigcup_{\substack{L(\rho,f)=0 \\ \mathrm{Re}(\rho)>1/2}} \{\sigma + i\,\mathrm{Im}(\rho) \mid 1/2 < \sigma \le \mathrm{Re}(\rho)\}$$

と定める．また G_f における $\log L(s,f)$ の分枝も $\log\zeta(s)$ と同様に決める．このとき補題 2 の重さ ω_f を用いて，公式 (2.1) を次のように定式化する：

$$s=\sigma+it\notin\mathbb{R} \text{ のとき} \qquad \lim_{q\to\infty}\sum_{\substack{f\in B_2(q)\\ s\in G_f}} \omega_f \Phi(\log L(s,f)) = \int_{\mathbb{C}} \Phi(z)\mathcal{M}_s(z)\,|\mathrm{d}z|, \tag{2.4}$$

$$s=\sigma\in\mathbb{R} \text{ のとき} \qquad \lim_{q\to\infty}\sum_{\substack{f\in B_2(q)\\ \sigma\in G_f}} \omega_f \Phi(\log L(\sigma,f)) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x)\mathcal{M}_\sigma(x)\,|\mathrm{d}x|. \tag{2.5}$$

ここで $\mathcal{M}_s$ と $\mathcal{M}_\sigma$ はそれぞれ，上述の命題 4 と命題 5 での非負値連続関数である．さらにテスト関数のクラスとして，$E=\mathbb{C}$ または $\mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} C_b(E) &= \{\Phi : E \to \mathbb{C} \mid \Phi \text{ は有界な連続関数 }\}, \\ \mathcal{I}(E) &= \{1_A \mid A \text{ は } E \text{ 上の Lebesgue 測度に対する continuity set}\} \\ &\qquad \cup \{1_B \mid B \text{ または } E\setminus B \text{ は } E \text{ におけるコンパクト集合 }\} \end{aligned}$$

と定める．このとき主結果は以下の通りである．

定理 6. 複素数 $s=\sigma+it$ を $\sigma>1/2$ として固定する．

(i) $t\neq 0$ とする．このとき (2.4) は，任意の $\Phi \in C_b(\mathbb{C}) \cup \mathcal{I}(\mathbb{C})$ に対して成立する．
(ii) $t=0$ とする．このとき (2.5) は，任意の $\Phi \in C_b(\mathbb{R}) \cup \mathcal{I}(\mathbb{R})$ に対して成立する．

とくに長方形 $R=[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{C}$ や区間 $J=[a,b]\subset\mathbb{R}$ について $1_R\in\mathcal{I}(\mathbb{C})$ および $1_J\in\mathcal{I}(\mathbb{R})$ が成り立つが，この場合には (2.4) や (2.5) の誤差項の評価も得られる．詳細な主張は [10] をご覧いただきたい．

以下，定理 6 の証明の大まかな方針を述べる．まず $F(q)=\sum_{f\in B_2(q),\, s\in G_f}\omega_f$ とおき，$(\mathbb{C},\mathcal{B}(\mathbb{C}))$ 上の確率測度 $\mathcal{P}_{q,s}$ および $\mathcal{Q}_s$ を

$$\mathcal{P}_{q,s}(A)=\frac{1}{F(q)}\sum_{\substack{f\in B_2(q)\\ s\in G_f}}\omega_f 1_A(\log L(s,f)), \qquad \mathcal{Q}_s(A)=\mathbb{P}(\log L(s,Y)\in A)$$

によって定める．$q \to \infty$ のとき $F(q) \to 1$ であることは比較的容易に示されるので，$\mathcal{P}_{q,s}$ が $q \to \infty$ のとき $\mathcal{Q}_s$ に弱収束することさえ示せれば，$\Phi \in C_b(\mathbb{C})$ に対して

$$\lim_{q\to\infty} \sum_{\substack{f\in B_2(q)\\ s\in G_f}} \omega_f \Phi(\log L(s,f)) = \int_{\mathbb{C}} \Phi \,\mathrm{d}\mathcal{Q}_s$$

が従う．命題 4 により，$s = \sigma + it \notin \mathbb{R}$ ならこれは (2.4) の $\Phi \in C_b(\mathbb{C})$ の場合にほかならない．また $\Phi \in \mathcal{I}(\mathbb{C})$ の場合も，伊原・松本による [3, Lemma A] の議論から (2.4) が従う．一方 $s = \sigma \in \mathbb{R}$ のときは，$\mathcal{P}_{q,\sigma}$ や $\mathcal{Q}_\sigma$ は確かに $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ 上の確率測度を定めるが，実際には $A \cap \mathbb{R} = \emptyset$ なら $\mathcal{P}_{q,\sigma}(A) = \mathcal{Q}_\sigma(A) = 0$ が成り立つことに注意する．すなわち $\mathcal{P}_{q,\sigma}$ と $\mathcal{Q}_\sigma$ は $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度でもあり，同様の議論で (2.5) を示すことができる．

$q \to \infty$ のとき $\mathcal{P}_{q,s}$ が $\mathcal{Q}_s$ に弱収束することを証明するには，それらの特性関数

$$f_{q,s}(w) = \frac{1}{F(q)} \sum_{\substack{f\in B_2(q)\\ s\in G_f}} \omega_f \psi_w(\log L(s,f)), \qquad g_s(w) = \mathbb{E}\left[\psi_w(\log L(s,Y))\right]$$

を用いるとよい．ただし $z, w \in \mathbb{C}$ に対して $\psi_w(z) = \exp(i\,\mathrm{Re}(z\overline{w}))$ と定める．このとき，

$$\lim_{q\to\infty} f_{q,s}(w) = g_s(w) \tag{2.6}$$

が各点 $w \in \mathbb{C}$ で成り立つことを示せば，$q \to \infty$ で $\mathcal{P}_{q,s}$ が $\mathcal{Q}_s$ に弱収束することが従う．差 $f_{q,s}(w) - g_s(w)$ を評価するために，(2.2)，(2.3) を有限で打ち切った

$$L(s,f;y) = \prod_{p<y} \det\left(I - p^{-s}A_p(f)\right)^{-1}, \qquad L(s,Y;y) = \prod_{p<y} \det\left(I - p^{-s}Y_p\right)^{-1}$$

を考える．なお，最終的には $y = \log q$ ととるので $p = q$ の項は考えなくてよい．このとき

$$\begin{aligned} f_{q,s}(w) &= \frac{1}{F(q)} \sum_{\substack{f\in B_2(q)\\ s\in G_f}} \omega_f \psi_w(\log L(s,f;y)) + \text{誤差項}, \\ g_s(w) &= \mathbb{E}\left[\psi_w(\log L(s,Y;y))\right] + \text{誤差項} \end{aligned}$$

の形の近似式が成り立つことが証明できるので，結局は

$$\frac{1}{F(q)} \sum_{\substack{f\in B_2(q)\\ s\in G_f}} \omega_f \psi_w(\log L(s,f;y)) - \mathbb{E}\left[\psi_w(\log L(s,Y;y))\right]$$

を評価することに問題は帰着される．ここで，固定された y に対しては

$$\lim_{q\to\infty} \frac{1}{F(q)} \sum_{\substack{f\in B_2(q)\\ s\in G_f}} \omega_f \psi_w(\log L(s,f;y)) = \mathbb{E}\left[\psi_w(\log L(s,Y;y))\right]$$

が成り立つことは補題 2 を用いて示せることに注意する．また補題 2 の証明が Petersson formula によることを思い出し，誤差項の評価を詳しく行うと，次の結果が得られる．

補題 7. 複素数 $s=\sigma+it$ を $\sigma>1/2$ として固定する．また十分大きい素数 q に対して $y=\log q$ とする．このとき任意の $R>0$ に対して，

$$\sum_{\substack{f\in B_2(q)\\ s\in G_f}} \omega_f \psi_w(\log L(s,f;y)) = \mathbb{E}\left[\psi_w(\log L(s,Y;y))\right] + O\left(q^{-1/2}(\log q)^2\right)$$

が $|w|\le R$ の範囲で成り立つ．ただし implied constant は σ と R にのみ依存する．

この補題によって (2.6) が示され，$q\to\infty$ のとき $\mathcal{P}_{q,s}$ が $\mathcal{Q}_s$ に弱収束することが従う．以上が定理 6 の証明の方針である．定理 6 の精緻化として，(2.4) や (2.5) の具体的な誤差評価を得るには，補題 7 における R も q に依存させて考えることになる．結論としては，だいたい $\ll R^{-1}$ 程度の評価が得られることが分かる．

2.3　いくつかの補足

2.3.1　$\mathcal{M}_s$ と $\mathcal{M}_\sigma$ の関係性

本稿では述べなかったが，M 関数 $\mathcal{M}_s$ および $\mathcal{M}_\sigma$ には Schwartz distribution の無限個の畳み込みとしての構造が入る．$\mathcal{M}_s$ は $\mathbb{C}$ 上の関数であり，$\mathcal{M}_\sigma$ は $\mathbb{R}$ 上の関数であるが，これらには Schwartz distribution としての次のようなシンプルな関係性がある：

$$t\to 0 \text{ のとき，} \mathcal{M}_{\sigma+it}(z)\to\mathcal{M}_\sigma(x)\delta(y).$$

ただし $\delta(y)$ は Dirac のデルタである．

2.3.2　平均の取り方

本稿では harmonic wight を用いた平均を考えたが，$f\in B_k(q)$ にわたる平均としては

$$\frac{1}{|B_k(q)|}\sum_{f\in B_k(q)}\cdots \tag{2.7}$$

を考えるのも自然である．この場合にも同様の結果を示すことができる．変わるのは補題 2 だけで，(2.7) の形の平均に対しては

$$\lim_{q\to\infty}\frac{1}{|B_k(q)|}\sum_{f\in B_2(q)} F(\theta_{p_1}(f),\dots,\theta_{p_r}(f)) = \int_{[0,\pi]^r} F(\theta_1,\dots,\theta_r)\,\mathrm{d}\mu_{p_1}(\theta_1)\cdots\mathrm{d}\mu_{p_r}(\theta_r)$$

が成り立つ．ただし各 μ_p は

$$\mathrm{d}\mu_p(\theta)=\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{1}{p}\right)\frac{\sin^2\theta}{(1-\frac{1}{p})^2+\frac{4}{p}\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

として定義される p 進 Plancherel 測度である．これは Serre [11] による結果であり，証明には Peterssom formula の代わりに Eichler–Selberg の跡公式が用いられる．

2.3.3　他のゼータ関数・L 関数の場合

保型 L 関数 $L(s,f)$ の場合その Euler 積の因子は $\theta_p(p)$ によって決まるのであって，その分布を記述したのが補題 2 である．一般にゼータ関数や L 関数の Euler 積を決める要素に対して，もし補題 2 のような結果が適切な形で成り立つのであれば，定理 6 の類似の主張が証明できると期待される．この方針での成功例の一つに，3 次体から生じる Artin L 関数の場合 [9] がある．非 Galois な 3 次体 K に対して，Dedekind ゼータ関数 $\zeta_K(s)$ を

$$\zeta_K(s) = \zeta(s)L(s,\rho_K)$$

と分解する 2 次既約表現 ρ_K の Artin L 関数 $L(s,\rho_K)$ がある．3 次体 K を動かしたときの平均値を考えると，適切な M 関数を構成できて，それが (2.5) の類似を満たすことが証明できるのである．補題 2 に対応する結果としては，谷口隆氏と F. Thorne 氏によって証明された 3 次体の数え上げ公式 [12, Theorem 1.3] が用いられる．さらにこの場合には，(2.5) の第 2 主要項が特殊な Φ について存在するなど，これまで見られなかった現象が明らかになった．詳しくは [9] をご覧いただきたい．

謝辞． 本稿は 2019 年度 RIMS 共同研究（公開型）「解析的整数論とその周辺」における筆者の講演を基に作成されたものです．代表者である鈴木正俊先生には日頃からお世話になっております．深く感謝いたします．また本研究は，JSPS 科研費 JP19J12037 の助成を受けたものです．

参考文献

[1] H. Bohr and B. Jessen, *Über die Werteverteilung der Riemannschen Zetafunktion*, Acta Math. **54** (1930), no. 1, 1–35.

[2] Y. Ihara and K. Matsumoto, *On certain mean values and the value-distribution of logarithms of Dirichlet L-functions*, Q. J. Math. **62** (2011), no. 3, 637–677.

[3] Y. Ihara and K. Matsumoto, *On* $\log L$ *and* L'/L *for L-functions and the associated "M-functions": connections in optimal cases*, Mosc. Math. J. **11** (2011), no. 1, 73–111.

[4] E. Kowalski and P. Michel, *The analytic rank of* $J_0(q)$ *and zeros of automorphic L-functions*, Duke Math. J. **100** (1999), no. 3, 503–542.

[5] A. Laurinčikas *Limit theorems for the Riemann zeta-function in the complex space*, in: Probability Theory and Mathematical Statistics, vol. 2, Proc. 5th Vilnius Conf., B. Grigelionis et al. (eds.), VSP/TEV, 1994, 457–483.

[6] Y. Lamzouri, S. Lester, and M. Radziwiłł, *Discrepancy bounds for the distribution of the Riemann zeta-function and applications*, J. Anal. Math. **139** (2019), no. 2, 453–494.

[7] P. Lebacque and A. Zykin, *On M-functions associated with modular forms*, Mosc. Math. J. **18** (2018), no. 3, 437–472.

[8] K. Matsumoto and Y. Umegaki, *On the value-distribution of the difference between logarithms of two symmetric power L-functions*, Int. J. Number Theory **14** (2018), no. 7, 2045–2081.

[9] M. Mine, *Discrete value-distribution of Artin L-functions associated with cubic fields*, preprint, `https://arxiv.org/abs/1905.11851`.

[10] M. Mine, *Probability density functions attached to random Euler products for automorphic L-functions*, in preparation.

[11] J.-P. Serre, *Répartition asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Hecke T_p*, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), no. 1, 75–102.

[12] T. Taniguchi and F. Thorne, *Secondary terms in counting functions for cubic fields*, Duke Math. J. **162** (2013), no. 13, 2451–2508.