Sum formula and Ohno's relation for the multiple zeta functions

九州大学　多重ゼータ研究センター　小野塚　友一
Tomokazu Onozuka
Multiple Zeta Research Center
Kyushu University

1 Introduction

Euler-Zagier 型多重ゼータ関数は次の級数で定義される多変数複素関数である。

$$\zeta(s_1,\ldots,s_r):=\sum_{1\le n_1<\cdots<n_r}\frac{1}{n_1^{s_1}\cdots n_r^{s_r}}$$

この級数は次の領域で絶対収束することが知られている [5]。

$$\{(s_1,\ldots,s_r)\in\mathbb{C}^r \mid \Re(s_j+\cdots+s_r)>r-j+1\ (1\le j\le r)\}$$

さらに全空間 $\mathbb{C}^r$ に有理型に接続されることも知られている [1][9]。

また Mordell-Tornheim ダブルゼータ関数は次の級数で定義される。

$$\zeta_{MT}(s_1,s_2;s_3):=\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{m^{s_1}n^{s_2}(m+n)^{s_3}}$$

この級数は

$$\{(s_1,s_2,s_3)\in\mathbb{C}^3 \mid \Re(s_1+s_3)>1,\ \Re(s_2+s_3)>1,\ \Re(s_1+s_2+s_3)>2\}$$

において絶対収束し、$\mathbb{C}^3$ に有理型に接続されることが知られている。

これらの関数はリーマンゼータ関数の多変数への拡張とみなすことができ、一般に多重ゼータ関数と呼ばれるものの代表的な例となっている。これらの関数の特殊値については代数的な構造が非常によく調べられており、Euler-Zagier 型多重ゼータ関数の特殊値の間の関係式は数多く知られている。例えば有名な関係式として次のようなものが挙げられる。

Theorem 1.1 (和公式; Granville [2], Zagier)**.** $k > r$ を満たす自然数 k, r に対して

$$\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_r=k \\ k_r\geq 2, k_i\geq 1(1\leq i\leq r-1)}} \zeta(k_1,\ldots,k_r) = \zeta(k)$$

が成り立つ。

このような特殊値の間の関係式が多く見つかる中で、松本 [4] は次のような問題を提唱した。

Question
多重ゼータ関数の特殊値の間の関係式はより広い範囲で成り立つ関係式の特別な場合か？

次の式のような調和積と呼ばれる関係式が知られている。

$$\zeta(s_1)\zeta(s_2) = \zeta(s_1,s_2) + \zeta(s_2,s_1) + \zeta(s_1+s_2)$$

これは和の範囲をうまく分割することによって得られる関係式であるが、この式は特殊値のみではなく複素数の範囲で成り立つ式である。このように特殊値の範囲を超えて成り立つ関係式が他にあるのだろうか？池田-松岡 [3] によると、Euler-Zagier 型多重ゼータ関数の特殊値の間の関係式はある条件の下では調和積の他にないということが証明されている。

では Euler-Zagier 型に限定しない場合はどうか?このときには複素の範囲で成り立つ関係式が存在することが知られている。例えば [8] では Mordell-Tornheim ダブルゼータ関数とリーマンゼータ関数の間の次のような関係式が証明されている。

$$\zeta_{MT}(1,s;3) - \zeta_{MT}(1,3;s) + \zeta_{MT}(3,s;1) = 4\zeta(s+4) - 2\zeta(2)\zeta(s+2)$$

また、Euler-Zagier 型に対しても無限和を含む関係式は存在する。例えば Mehta-Saha-Viswanadham[6] により

$$\zeta(s_1,\ldots,s_{r-2},s_{r-1}+s_r-1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s_r-1)s_r\cdots(s_r+k-1)}{(k+1)!}\zeta(s_1,\ldots,s_{r-1},s_r+k)$$

という関係が示されているが、これは複素の範囲で成り立つ式である。

今回は新しく発見した多重ゼータ関数の間の関係式について 2 つ紹介する。1 つ目は Euler-Zagier 型多重ゼータ関数の間の無限和を含む関係式である。この関係式は上で紹介した和公式の複素関数による補間となっている。もう 1 つはルート系に付随する多重ゼータ関数の間の関係式である。こちらは大野関係式という関係式の複素関数による補間となっている。

2 和公式

まずは簡単な場合として 2 重ゼータ関数 $(r=2)$ の和公式の補間についてみてみる。上で紹介した和公式は $r=2$ のとき

$$\sum_{\substack{k_1+k_2=k \\ k_2\geq 2, k_1\geq 1}} \zeta(k_1,k_2)=\zeta(k)$$

となる。この関係式を補間すると次のようになる。

Theorem 2.1 (広瀬-村原-小野塚)**.** $\Re(s)>1$ に対して次式が成り立つ。

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\zeta(s-n-2,n+2)-\zeta(-n,s+n))=\zeta(s)$$

s を整数とすると左辺は telescoping sum となり有限和にでき、和公式と一致することが分かる。これは和公式の k を複素変数に補間したとみなすことができる公式である。ちなみに左辺の 2 つの 2 重ゼータ関数は $s=2$ を極としてもつが、極の打ち消しあいが起き $\zeta(s-n-2,n+2)-\zeta(-n,s+n)$ は $s=2$ で正則になっていることに注意しておく。

r が 2 より大きい場合、和公式の複素関数による補間は複雑になる。その場合の結果を紹介するために $G_{a,b}(s_1,\ldots,s_a;s)$ を以下のように帰納的に定義する。(ただし $a\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $b\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$)

$$\begin{aligned}
G_{a,1}(s_1,\ldots,s_a;s) &:= \zeta(s_1,\ldots,s_a,s) \\
G_{a,b}(s_1,\ldots,s_a;s) &:= \sum_{n=0}^{\infty}(G_{a+1,b-1}(s_1,\ldots,s_a,s-n-b;n+b) \\
&\qquad - G_{a+1,b-1}(s_1,\ldots,s_a,-n;s+n))
\end{aligned}$$

この級数は次の不等式を満たす範囲で絶対収束している。

$$\begin{aligned}
&\Re(s)>b \\
&\Re(s+s_a)>1+b \\
&\Re(s+s_a+s_{a-1})>2+b \\
&\cdots \\
&\Re(s+s_a+\cdots+s_1)>a+b
\end{aligned}$$

定義より $G_{a,b}(s_1,\ldots,s_a;s)$ は $r=a+b$ 重多重ゼータ関数の和となっている。この関数を用いることで一般に和公式の補間は次のように書ける。

Theorem 2.2 (広瀬-村原-小野塚). $b \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ と $\Re(s) > b$ に対して次式が成り立つ。

$$G_{0,b}(s) = \zeta(s)$$

s を整数とすると左辺はやはり有限和にでき次のように書ける。

$$G_{0,b}(s) = \sum_{\substack{m_1+\cdots+m_b=s \\ m_1,\ldots,m_{b-1}\geq 1 \\ m_b \geq 2}} \zeta(m_1, \ldots, m_b)$$

これによりこの定理は和公式の複素関数による補間であることがわかる。

($r = 2$ かつ $\Re(s) > 2$ の場合の証明)
ここでは 1 番簡単な場合として $r = 2$ で $\Re(s) > 2$ の場合の証明をみてみる。$\Re(s) > 2$ より $\zeta(s-n-2, n+2)$ と $\zeta(-n, s+n)$ の級数は両方とも絶対収束しており

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}(\zeta(s-n-2, n+2) - \zeta(-n, s+n)) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{0<m_1<m_2} \left(\frac{1}{m_1^{s-n-2} m_2^{n+2}} - \frac{1}{m_1^{-n} m_2^{s+n}} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{0<m_1<m_2} \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^n \left(\frac{1}{m_1^{s-2} m_2^2} - \frac{1}{m_2^s} \right) \\
&= \sum_{0<m_1<m_2} \frac{1}{m_2^2 - m_1 m_2} \left(\frac{1}{m_1^{s-2}} - \frac{1}{m_2^{s-2}} \right) \\
&=: A_1 - A_2
\end{aligned}$$

と変形できる。さらに A_1 と A_2 をそれぞれ変形すると

$$\begin{aligned}
A_1 = \sum_{0<m_1<m_2} \frac{1}{m_2^2 - m_1 m_2} \frac{1}{m_1^{s-2}} &= \sum_{0<m_1} \frac{1}{m_1^{s-2}} \sum_{m_1<m_2} \frac{1}{m_2^2 - m_1 m_2} \\
&= \sum_{0<m_1} \frac{1}{m_1^{s-2}} \sum_{m_1<m_2} \frac{1}{m_1} \left(\frac{1}{m_2 - m_1} - \frac{1}{m_2} \right) \\
&= \sum_{0<m_1} \frac{1}{m_1^{s-1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m_1} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 = \sum_{0<m_1<m_2} \frac{1}{m_2^2 - m_1 m_2} \frac{1}{m_2^{s-2}} &= \sum_{1<m_2} \frac{1}{m_2^{s-1}} \sum_{0<m_1<m_2} \frac{1}{m_2 - m_1} \\
&= \sum_{0<m_2} \frac{1}{m_2^{s-1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m_2 - 1} \right)
\end{aligned}$$

よって最終的に次のように左辺が右辺と一致する。

$$A_1 - A_2 = \sum_{0<m} \frac{1}{m^{s-1}} \left(\frac{1}{m}\right) = \zeta(s)$$

3 大野関係式

大野関係式の複素関数による補間を与えるために大野関係式を紹介しよう。インデックス

$$\boldsymbol{k} := (\underbrace{1,\ldots,1}_{a_1-1}, b_1+1, \ldots, \underbrace{1,\ldots,1}_{a_l-1}, b_l+1) \quad (a_d, b_d \geq 1)$$

に対して、$\boldsymbol{k}$ の双対インデックスを

$$\boldsymbol{k}^\dagger := (\underbrace{1,\ldots,1}_{b_l-1}, a_l+1, \ldots, \underbrace{1,\ldots,1}_{b_1-1}, a_1+1)$$

により定める。

Theorem 3.1 (大野関係式 [7]). インデックス $(k_1,\ldots,k_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^r$ は $k_r \geq 2$ を満たすものとし $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とするとき次式が成り立つ。

$$\sum_{\substack{e_1+\cdots+e_r=m \\ e_i \geq 0\,(1\leq i\leq r)}} \zeta(k_1+e_1,\ldots,k_r+e_r) = \sum_{\substack{e'_1+\cdots+e'_{r'}=m \\ e'_i \geq 0\,(1\leq i\leq r')}} \zeta(k'_1+e'_1,\ldots,k'_{r'}+e'_{r'})$$

ただし $(k'_1,\ldots,k'_{r'})$ は $(k_1,\ldots,k_r)$ の双対インデックスとする。

この関係式を補間するために新たに関数 $I_{\boldsymbol{k}}(s)$ を導入する。$k_r \geq 2$ なるインデックス $\boldsymbol{k} = (k_1\ldots,k_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^r$ と $\Re(s) > -1$ を満たす複素数 s に対して

$$I_{\boldsymbol{k}}(s) := \sum_{i=1}^{r} \sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}} \cdot \frac{1}{n_i^s} \prod_{j\neq i} \frac{n_j}{n_j - n_i}$$

で定める。各 i に対して

$$\sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}} \cdot \frac{1}{n_i^s} \prod_{j\neq i} \frac{n_j}{n_j - n_i}$$

は A 型ルート系に付随する多重ゼータ関数となっている。ルート系に付随する多重ゼータ関数は全平面に有理系に接続されることが証明されているため $I_{\boldsymbol{k}}(s)$ も $\mathbb{C}$ 上有理型関数となる。このとき大野関係式の複素関数による補間は次のようになる。

Theorem 3.2 (広瀬-村原-小野塚)**.** $k_r \geq 2$ なるインデックス $\boldsymbol{k} = (k_1 \ldots, k_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^r$ と $\Re(s) > -1$ を満たす複素数 s に対して次式が成り立つ。

$$I_{\boldsymbol{k}}(s) = I_{\boldsymbol{k}^\dagger}(s)$$

これが大野関係式となっているのは $s = m$ が非負整数のとき

$$I_{\boldsymbol{k}}(m) = \sum_{\substack{e_1+\cdots+e_r=m \\ e_i \geq 0\,(1\leq i\leq r)}} \zeta(k_1+e_1, \ldots, k_r+e_r).$$

という関係が成り立つためである。この式は

$$\sum_{\substack{e_1+\cdots+e_r=m \\ e_i \geq 0\,(1\leq i\leq r)}} a_1^{e_1}\cdots a_r^{e_r} = \sum_{i=1}^r a_i^{m+r-1} \prod_{j\neq i} (a_i - a_j)^{-1} \quad (a_i \neq a_j \text{ for } i \neq j),$$

という書き換えを認めれば次のように簡単に示せる。

$$\begin{aligned} I_{\boldsymbol{k}}(m) &= \sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}} \sum_{i=1}^r \left(\frac{1}{n_i}\right)^{m+r-1} \prod_{j\neq i} \frac{n_i n_j}{n_j - n_i} \\ &= \sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}} \sum_{i=1}^r \left(\frac{1}{n_i}\right)^{m+r-1} \prod_{j\neq i} \left(\frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_j}\right)^{-1} \\ &= \sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}} \sum_{\substack{e_1+\cdots+e_r=m \\ e_i \geq 0\,(1\leq i\leq r)}} \left(\frac{1}{n_1}\right)^{e_1} \cdots \left(\frac{1}{n_r}\right)^{e_r} \\ &= \sum_{\substack{e_1+\cdots+e_r=m \\ e_i \geq 0\,(1\leq i\leq r)}} \zeta(k_1+e_1, \ldots, k_r+e_r) \end{aligned}$$

よってこれは大野関係式の m を複素変数に補間したとみなすことができる公式となっている。

参考文献

[1] S. Akiyama, S. Egami, and Y. Tanigawa, *Analytic continuation of multiple zeta-functions and their values at non-positive integers*, Acta Arithmetica **98** (2001), 107–116.

[2] A. Granville, *A decomposition of Riemann's zeta-function*, Analytic number theory (Kyoto, 1996), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 247, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1997), 95–101.

[3] S. Ikeda and K. Matsuoka, *On the functional relations for the Euler-Zagier multiple zeta-functions*, Tokyo J. Math. **41** (2018), 477–485.

[4] K. Matsumoto, *Analytic properties of multiple zeta-functions in several variables*, in Number Theory: Tradition and Modernization, by W. Zhang and Y. Tanigawa, Springer (2006), 153–173.

[5] K. Matsumoto, *On the analytic continuation of various multiple zeta-functions*, in Number Theory for the Millennium (Urbana, 2000), Vol. II, M. A. Bennett et. al. (eds.), A. K. Peters, Natick, MA, (2002), 417–440.

[6] J. Mehta, B. Saha, and G.K.Viswanadham, *Analytic properties of multiple zeta functions and certain weighted variants, an elementary approach* Journal of Number Theory **168** (2016), 487–508.

[7] Y. Ohno, *A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values*, J. Number Theory **74** (1999), 39–43.

[8] H. Tsumura, *On functional relations between the Mordell–Tornheim double zeta functions and the Riemann zeta function*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **142** (2007), 395–405.

[9] J. Zhao, *Analytic continuation of multiple zeta functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 1275–1283.

Multiple Zeta Research Center, Kyushu University
Motooka, Nishi-ku, Fukuoka 819-0395
Japan
E-mail: t-onozuka@math.kyushu-u.ac.jp