（ 続紙 1 ）

京都大学	博士（理　学）	氏名	角濱　寛隆
論文題目	FORMAL DEGREES AND LOCAL THETA CORRESPONDENCE: QUATERNIONIC CASE （形式次数と局所テータ対応: 四元数ユニタリ群の場合）		

（論文内容の要旨）

本論文では局所体上定義された古典群の二乗可積分表現に対し、その形式次数を考察している。

F を標数 0 の p 進体とする。G を F 上の連結簡約群とし、その中心は非等方的と仮定する。π を $G(F)$ の二乗可積分表現、すなわち $G(F)$ の既約スムーズ表現でその行列係数が二乗可積分になるものとする。このとき π の形式次数 $\deg \pi$ は、$G(F)$ の Haar 測度 dg にに依存する正の実数で、Schur 直交関係式

$$\int_{G(F)} (\pi(g)v_1, v_2)\overline{(\pi(g)v_3, v_4)}\, dg = \frac{1}{\deg \pi}(v_1, v_3)\overline{(v_2, v_4)}, \quad v_1, \ldots, v_4 \in \pi$$

をみたすものとして定義される。ただし $(\cdot, \cdot)$ は π 上の $G(F)$ 不変な内積である。

一方で簡約双対ペア (G, H) に対し、テータ対応とよばれる写像

$$\theta : \{G(F) \text{ の既約スムーズ表現 }\} \to \{H(F) \text{ の既約スムーズ表現 }\} \cup \{0\}$$

がある。π を $G(F)$ の二乗可積分表現とし、$\sigma = \theta(\pi)$ が $H(F)$ の二乗可積分表現になると仮定する。このとき Gan・市野の先行結果により、G と H が四元数ユニタリ群でなければ、形式次数の比 $\deg \pi / \deg \sigma$ が標準 γ 因子の特殊値で表せることが知られていた。

本論文では、G と H が四元数ユニタリ群になる場合を考察した。特に G と H の階数がほぼ等しいとき、等式

$$\frac{\deg \pi}{\deg \sigma} = \alpha \cdot \omega_\pi(-1) \cdot \gamma(0, \sigma, \chi, \psi)$$

を証明した。ただし α は G と H より定まる具体的な定数、ω_π は π の中心指標、$\gamma(s, \sigma, \chi, \psi)$ は σ の標準 γ 因子、χ は G より定まる $F^\times$ の二次指標、ψ は F の非自明な指標であり、形式次数を定義する $G(F)$ と $H(F)$ の Haar 測度は ψ より定まる標準的なものとする。またこの等式の応用として、二次一般斜交群と二次斜交群の内部形式に対し、形式次数予想、すなわち二乗可積分の形式次数をその随伴 γ 因子の特殊値で表す等式を証明した。

以上が本論文の主要結果である。

（ 続紙 2 ）

（論文審査の結果の要旨）

本論文では局所体上定義された古典群の二乗可積分表現に対し、その形式次数を考察している。

局所体 F 上定義された連結簡約群 G の二乗可積分表現に π 対し、形式次数とよばれる正の実数 $\deg\pi$ が定義される。$G(F)$ がコンパクトであれば $\deg\pi$ は π の次元で表せるため、これは非常に基本的な π の不変量である。一方で平賀・市野・池田により $\deg\pi$ は π の随伴 γ 因子の特殊値 $\gamma(0,\pi,\mathrm{Ad},\psi)$ で表されると予想されている。これはコンパクト Lie 群の表現に対する Weyl の次元公式の一般化であり、表現論的不変量が数論的不変量で表せることを示唆している。

形式次数予想は定式化に表現の分類を仮定するため、その証明は一般には困難であると考えられている。一方で形式次数予想と表現論的操作の整合性を考察し、この問題を表現の分類を仮定せずに定式化することができる。実際に Gan・市野は簡約双対ペア (G,H) に対し、G と H が四元数ユニタリ群ではなくその階数がほぼ等しいとき、テータ対応における形式次数の比が、具体的な定数 C と標準 γ 因子の特殊値の積で表せることを証明した。

本論文ではこの先行結果を G と H が四元数ユニタリ群になる場合に拡張した。まず先行結果と同様に局所 Siegel-Weil 公式を使う。すなわちテータ対応を定める Weil 表現上の線型汎関数を二通りの方法で構成し、それらが比例することを示す。この比例定数を C' とすると、上記の定数 C が存在することが直ちに従い、さらに C と C' の間の具体的な関係式を証明することができる。

よって C を具体的に決定することが問題となる。先行研究においては、まず極小な (G,H) に対し C を決定し、それより一般の (G,H) に対し C を決定することができた。一方で G と H が四元数ユニタリ群になる場合は、極小な (G,H) に対しても C を決定することは非常に困難である。そこで本論文では、先行研究にはない独自の計算をもとにして、極小な (G,H) に対して C' を決定することに成功した。これより極小な (G,H) に対し C が決定され、あとは先行研究と同様に一般の (G,H) に対し C を決定することができる。

よって、本論文は博士 (理学) の学位論文として価値あるものと認める。また、論文内容とそれに関連した事項について令和 3 年 1 月 22 日に試問を行った結果、合格と認めた。

要旨公開可能日：　　　　年　　　月