L^2 拡張定理に関する最近の話題

東京大学大学院数理科学研究科 細野元気
Genki Hosono
Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

1 はじめに

本稿の目的は、**大沢-竹腰の L^2 拡張定理**に関する最近の進展のうち、主に最良係数に関する話題を紹介することである。まずは、L^2 拡張定理の主張を紹介する。

Ω を $\mathbb{C}^n$ 内の擬凸領域とする。$\mathbb{C}^n$ の座標を $(z_1, ..., z_n)$ と書くことにする。Ω が z_n 軸の方向に有界で、z_n 軸方向の半径が 1 以下であるとする。すなわち、

$$\Omega \subset \mathbb{C}^{n-1} \times \Delta$$

であると仮定する。ここで、Δ は $\mathbb{C}$ 内の単位円盤である。Ω の部分多様体 V を、$V := \Omega \cap \{z_n = 0\}$ で定める。V が空のときは定理の結論は自明となるので、V が空でない場合を考える。φ を Ω 上の多重劣調和関数とする。$\varphi|_V \equiv -\infty$ のときはまたしても定理の結論は自明となるので、φ の V への制限が恒等的に $-\infty$ ではないような場合を考える。

以上の設定のもとで、以下のような L^2 正則関数からなるふたつの Hilbert 空間を考えることができる[*1]：

$$A^2(\Omega, \varphi) := \left\{ f \in \mathcal{O}(\Omega) : \int_\Omega |f|^2 e^{-\varphi} d\lambda < +\infty \right\}$$

$$A^2(V, \varphi) := \left\{ f \in \mathcal{O}(V) : \int_V |f|^2 e^{-\varphi} d\lambda_V < +\infty \right\}$$

ここで、$d\lambda$, $d\lambda_V$ はそれぞれ $\mathbb{C}^n$, V 上の Lebegue 測度である。

大沢-竹腰の L^2 拡張定理は、$A^2(V, \varphi)$ に属する正則関数を一様な L^2 評価つきで $A^2(\Omega, \varphi)$ の元に拡張するという定理である：

定理 1 [OT]

$\Omega \subset \mathbb{C}^{n-1} \times \Delta$ を擬凸領域とする。$V := \Omega \cap \{z_n = 0\}$ とおく。$\varphi \in PSH(\Omega)$ を Ω 上の多重劣調和関数とする。このとき、正則関数 $f \in \mathcal{O}(V)$ であって、

$$\int_V |f|^2 e^{-\varphi} d\lambda_V < +\infty$$

*1 このような空間を考えるときは、多重劣調和関数 φ に対し $e^{-\varphi}$ という形のウェイトを用いることが多い。複素多様体上の直線束のような幾何的な状況では、この項は非負曲率を持つ (特異)Hermite 計量に対応する。

を満たすものに対して、$F|_V = f$ を満たす Ω 上の正則関数 $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ であって、

$$\int_\Omega |F|^2 e^{-\varphi} d\lambda \leq C \int_V |f|^2 e^{-\varphi} d\lambda_V$$

を満たすものが存在する。ここで、C は n, Ω, φ, f のいずれにも依存しない定数である。

定数 C がほかの情報に依存せずに取れることが重要な点である。

$n = 1$ で $\Omega = \Delta$ の場合を考えよう。このとき、V は 1 点集合 $\{0\}$ である。この場合、定理 1 は、中心での値を決めたとき、その値をとるような円盤上の L^2 正則関数が存在することを主張している。ウェイト関数 φ を任意に取ることができるので、この場合でも主張は非自明である。

ウェイト関数が最も簡単な場合、すなわち、$\varphi \equiv 0$ の場合を考えよう。中心での値として、例えば 1 を選ぶことにする。中心での値が 1 であるような正則関数 F のうち、L^2 ノルム (の 2 乗) $\int_\Delta |F|^2 d\lambda$ が最小になるものは、定数関数 $F \equiv 1$ である。このことは、正則関数に対する平均値の不等式から確かめることができる。$F \equiv 1$ のとき、$\int_\Delta |F|^2 d\lambda = \pi$ となる。したがって、定理 1 における C の下界として、$C \geq \pi$ が得られる。

実は、定理 1 において、$C = \pi$ とした主張が成り立つことが、Błocki [Blo], Guan-Zhou [GZ] によって証明されている (より詳細な主張については次節参照)。これが、**最良係数の L^2 拡張定理**と呼ばれる定理である。最良係数の L^2 拡張定理は、正則関数のなす Hilbert 空間の変動に関する理論や、(多重複素)Green 関数の極付近での挙動など、多変数関数論における話題と関係がある。そのため、最良係数の L^2 拡張定理を調べることは、見かけの印象よりもはるかに興味深く重要だと感じられる。本稿では、そのようないくつかの話題を紹介したのち、筆者による結果 [Hos1], [Hos2] を紹介する。

本稿の内容以外にも、L^2 拡張定理には様々な一般化や応用がある。そのような話題は、[Ohs-book] にまとめられている。また、本稿で取り上げる話題のうちいくつかに関する解説は、最近発行された大沢先生の著書 [大沢] にも盛り込まれている。こちらは雑誌の連載記事をまとめたもので、数学の解説にとどまらず、数学者の様々なエピソードも盛り込まれており興味深い。

2　最良係数の拡張定理と吹田予想

本節では、最良係数の拡張定理の主張を紹介する。ここで述べるのは、主張が比較的簡潔な Błocki [Blo] による結果である。Guan-Zhou [GZ] による結果はさらに一般の状況に適用可能だが、仮定や結論が複雑である。

定理 2 [Blo]

$D \subset \mathbb{C}$ は $0 \in D$ を満たす有界領域とし、$\Omega \subset \mathbb{C}^{n-1} \times D$ を擬凸領域、$V = \Omega \cap \{z_n = 0\}$ とする。$\varphi \in PSH(\Omega)$ を Ω 上の多重劣調和関数とする。$G = G_{0,D}$ を、0 において極を持つ D 上の Green 関数とする。すなわち、G は D 上の劣調和関数で、D 上で $G < 0$ かつ ∂D 上で $G = 0$ であり、ある調和関数 B を用いて

$$G(z) = \log |z|^2 - B(z)$$

と書かれるものとする[a]。このとき、$f \in \mathcal{O}(\Omega)$ であって、

$$\int_V |f|^2 e^{-\varphi} d\lambda_V < +\infty$$

を満たすものに対して、ある $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ であって、$F|_V = f$ かつ、

$$\int_\Omega |F|^2 e^{-\varphi} d\lambda \leq \pi e^{B(0)} \int_V |f|^2 e^{-\varphi} d\lambda_V$$

を満たすものが存在する。

[a] この記法と正規化の流儀は、のちに述べる Berndtsson-Lempert の結果に合わせたものである。

(正規化の違いがあるが、)$B(0)$ は $(D, 0)$ に対する **Robin 定数**と呼ばれる値である。$c_D := e^{-B(0)/2}$ を、0 に関する $\mathbb{C} \setminus D$ の**対数容量**と呼ぶ。これを使うと、評価は、

$$\int_\Omega |F|^2 e^{-\varphi} d\lambda \leq \frac{\pi}{c_D^2} \int_V |f|^2 e^{-\varphi} d\lambda_V$$

とも書ける。

$\Omega = \Delta$ のときは、Green 関数は $G = \log|z|^2$ である。このとき、$B = 0$ であるから、定理 1 の定数 C として π を取ることができる。

最良性について注意を述べる。定理 2 の結論の「π」の部分は、任意の n, D, Ω, φ, f に対して成り立つ評価として最良であり、それよりも真に小さい値に変えると定理の主張は成り立たない。定理 2 を最良係数の拡張定理と呼ぶのは、この意味においてである。一方、例えば Ω や φ を固定したとき、任意の f に対して、さらに良い評価を得ることが可能な場合がある。6 節では、そのような方向の結果を紹介する。

最良係数の L^2 拡張定理を用いて、**吹田予想**と呼ばれる予想が解決された。これは、対数容量と Bergman 核の関係についての主張である：

定理 3(吹田予想, [Sui])

$\Omega \subset \mathbb{C}$ を有界領域とし、$0 \in \Omega$ と仮定する。G を 0 に極を持つ Ω 上の Green 関数とし、定理 2 と同様に、

$$G(z) = \log|z|^2 - B(z)$$

と書く。このとき、Ω 上の Bergman 核 $K_\Omega(z)$ と $B(0)$ について、以下の関係式が成立する：

$$e^{-B(0)} \leq \pi K_\Omega(z)$$

ここで、Ω 上の **Bergman 核** $K_\Omega(z)$ は、

$$K_\Omega(z) := \sup\left\{ |f(z)|^2 : f \in \mathcal{O}(\Omega), \int_\Omega |f|^2 d\lambda \leq 1 \right\}$$

によって定義されるものである。

定理 3 の証明 最良係数の拡張定理を $V = \{0\} \subset \Omega$ に対して適用する。これにより、$F \in \mathcal{O}(\Omega)$ であって、$F(0) = 1$, $\int_\Omega |F|^2 \leq \pi e^{B(0)}$ を満たすものをとることができる。このとき、$F/\sqrt{\pi e^{B(0)}}$ は L^2 ノルムが 1 以下なので、Bergman 核の定義から

$$K_\Omega(z) \geq |F(0)|^2/\pi e^{B(0)} = 1/\pi e^{B(0)}$$

である。 □

Błocki, Guan-Zhou による最良係数の拡張定理の証明は、大沢-竹腰による元々の議論を巧妙化したものである。補助の関数として特別な常微分方程式の解を書き下したものを用いるなど、精緻な議論が必要となっている。その後に、Berndtsson-Lempert によって正則関数の空間の変動理論を用いた別証明が得られている [BL]。次の節では、この新しい証明で用いられた理論について解説する。その次の節で、Berndtsson-Lempert の証明を開設する。

3 正則関数の空間の変動理論

Berndtsson-Lempert の証明で使われたのは、Berndtsson によって得られた次の結果である。

定理 4 [Ber]

$U \subset \mathbb{C}^m$ を開集合、$\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を有界擬凸領域とする。$\varphi \in PSH(U \times \Omega) \cap C^\infty(\overline{U \times \Omega})$ を境界まで滑らかな多重劣調和関数とする。$t \in U$ に対して、

$$A_t^2 := \left\{ f \in \mathcal{O}(\Omega) : \|f\|_t^2 := \int_\Omega |f|^2 e^{-\varphi(t,\cdot)} < +\infty \right\}$$

とおく。このとき、Hilbert 空間をファイバーとする U 上のベクトル束 $(A_t^2, \|\cdot\|_t)$ が得られるが、これは中野の意味で正の曲率を持つ。

この状況でも、ランクが有限の正則ベクトル束の場合と同様に、曲率 $\Theta = \sum_{jk} \Theta_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k$ $(\Theta_{jk} \in \mathrm{End}(A_t^2))$ が定義される。A_t^2 が中野の意味で正の曲率を持つとは、任意の $u_1, \ldots, u_m \in A_t^2$ に対して、

$$\sum_{j,k} \langle \Theta_{jk} u_j, u_k \rangle \geq \epsilon \sum_j \|u_j\|^2$$

が成り立つことをいう。このとき、A_t^2 は Griffiths の意味でも正の曲率を持つ。特に、以下が成り立つ:

系 5

$\xi = \xi_t \in (A_t^2)^*$ を、A^2 上の有界線形汎関数の族であって、t に関して正則なものとする。このとき、次の関数

$$t \mapsto \log \|\xi\|_{(A_t^2)^*}$$

は、多重劣調和関数である。

$z \in \Omega$ を固定する。系 5 における ξ として、

$$f \in A^2 \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$$

という形のものを取ることを考える。この汎関数を ξ_z と書くと、$\|\xi_z\|_{A_t^2}$ は、ウェイト $\varphi(t,\cdot)$ に関する Bergman 核 $K_{\varphi(t,\cdot)}$ の z における値と等しいことが知られている。したがって、

$$t \mapsto \log K_{\varphi(t,\cdot)}$$

という関数が多重劣調和関数であることがわかる。このようにして Bergman 核の対数多重劣調和性が得られる。

Bergman 核の対数多重劣調和性は、米谷-山口 [MY] によって Riemann 面の場合に示されている。米谷-山口の議論は、Robin 定数の変動公式を用いるものである。

Guan-Zhou [GZ, Corollary 3.7] によって、最良係数の L^2 拡張定理からも Bergman 核の対数多重劣調和性が従うことが示されている。同様の議論により、系 5 も示すことができる。一方、次の節で見るように、Berndtsson-Lempert による最良係数の L^2 拡張定理の証明には系 5 が本質的に使われている。この意味で、L^2 拡張定理の最良性と系 5 は同値であると言える。

4 Berndtsson-Lempert による証明

Berndtsson-Lempert による、最良係数の拡張定理の新しい証明について解説する。定理の主張は以下のとおりである。

定理 6 [BL]

$\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を擬凸領域とし、$V \subset \Omega$ を余次元 k の部分多様体とする。$\varphi \in PSH(\Omega)$ とする。$G \in PSH(\Omega)$ を、以下の条件を満たすような関数とする ("Green 型関数")。

- $G < 0$ である。
- Ω 上の連続関数 A, B が存在して、以下の評価が成り立つ：

$$\log d_V^2 + A \geq G \geq \log d_V^2 - B$$

ただし、$d_V = \mathrm{dist}(V, \cdot)$ は、V との距離を表す関数である。

このとき、$f \in \mathcal{O}(V)$ であって、$\int_V |f|^2 e^{-\varphi + kB} < +\infty$ を満たすものに対して、ある $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ であって、$F|_V = f$,

$$\int_\Omega |F|^2 e^{-\varphi} \leq \sigma_k \int_V |f|^2 e^{-\varphi + kB}$$

を満たすものが存在する。ただし、σ_k は、$\mathbb{C}^k$ 内の単位球の体積を表す。

有界領域 $D \subset \mathbb{C}$ に対して $\Omega \subset \mathbb{C}^{n-1} \times D$、$V = \Omega \times \{z_n = 0\}$ のときは、G として 0 に極を持つ D の Green 関数を選ぶことにより、定理 2 が従うことに注意する。したがって、定理 6 は、定理 2 の一般化である。

証明の概略 適切な平滑化をとって、$\phi \in C^\infty(\Omega)$ としてよい。まず、f の Ω 上への L^2 拡張 F_0 を任意にとって固定する[*2]。すると、任意の f の L^2 拡張は、ある $h \in A^2(\Omega, \varphi) \cap H^0(\Omega, \mathcal{I}_V)$ を用いて、

$$F_0 + h$$

の形で書ける ($\mathcal{I}_V$ は、V に対応するイデアル層である)。評価したいものは、h を動かしたときのこの形の関数の L^2 ノルムの最小値であるが、それは、商空間 $A^2(\Omega, \varphi)/A^2(\Omega, \varphi) \cap \mathcal{I}_V$ における F_0 の像の商ノルムの値と等しい (商ノルムの定義である)。この空間における商ノルムを $\|F_0\|_{\mathrm{quot}}$ と書くことにすると、Hilbert 空間の双対を考えることにより、以下のように記述できる：

$$\|F_0\|_{\mathrm{quot}}^2 = \sup \left\{ \frac{|(\xi, F_0)|^2}{\|\xi\|_{A^2(\Omega,\varphi)^*}^2} : \xi \in A^2(\Omega, \varphi)^*, \xi|_{A^2 \cap \mathcal{I}_V} \equiv 0 \right\}$$

[*2] そのためには既知の L^2 拡張定理を使うか、Ω を少し縮めておいて Stein 多様体の理論を用いる。

ここで、$(\cdot,\cdot)$ は、Hilbert 空間とその双対空間の間の標準的なペアリングである。

右辺の値を調べるために、ξ の動く範囲を稠密な部分線形空間に制限しよう。そこで、$g \in C_0^\infty(V)$ を、コンパクト台を持つ V 上の滑らかな関数とする。線形汎関数 ξ_g を、V 上の正則関数 h に対して、

$$(\xi_g, h) := \sigma_k \int_V h\overline{g}e^{-\varphi+kB} d\lambda_V$$

により定める。すると、ξ_g は $A^2(\Omega,\varphi)$ 上有界である。すなわち、ξ_g は $A^2(\Omega,\varphi)^*$ の元であって、$\mathcal{I}_V$ 上で恒等的に 0 であるようなものになる。一方、ξ_g は $A^2(V,\varphi-kB)$ 上の有界線形汎関数でもある。Riesz の表現定理から、対応する $A^2(V,\varphi-kB)$ の元 $\widetilde{g}$ を取ることができる。

以上のように ξ_g を定めたとき、考えている値は、

$$\|F_0\|_{\mathrm{quot}}^2 = \sup_g \frac{|(\xi_g, F_0)|^2}{\|\xi_g\|_{A^2(\Omega,\varphi)^*}^2}$$

と書ける。分子は、

$$|(\xi_g, F_0)|^2 = \left|\sigma_k \int_V F_0\widetilde{g}e^{-\varphi+kB}\right|^2 \le \|f\|_V^2\|g\|_V^2$$

のように評価できる。ここで、$\|\cdot\|_V := \sigma_k \int_V |\cdot|^2 e^{-\varphi+kB}$ とおいた。結局、

$$\|F_0\|_{\mathrm{quot}}^2 \le \sup_g \frac{\|f\|_V^2\|g\|_V^2}{\|\xi_g\|_{A^2(\Omega,\varphi)^*}^2}$$

となる。したがって、次の主張を示せば十分である：

主張

$\|g\|_V^2 \le \|\xi_g\|_{A^2(\Omega,\varphi)^*}^2$ である。

主張を示すために、変動理論を用いて右辺のノルムを取り換え、極限として左辺の値が現れるようにする(ただし、極限をとる部分は本稿では詳しくは説明しない)。

$t \le 0$ と $z \in \Omega$ に対して、関数 $\psi(t,z)$ を、

$$\psi(t,z) := \max(G(z)-t, 0)$$

で定める。$\psi(t,\cdot)$ は、G の値を $-t$ だけ持ち上げ、値が 0 以下の部分を切り落として 0 にしたものである。$t \to -\infty$ とすると、$\Omega \setminus V$ 上では $\psi(t,z) \to +\infty$ となるが、V 上ではつねに 0 である。ψ を使って、以下のようにウェイトを取り換える。$t \le 0, p > 0$ に対して、

$$A_{t,p}^2 := A^2(\Omega, \varphi + p\psi(t,\cdot))$$

とおく。$t = 0$ のとき、$A_{t,p}^2$ はもともと考えていた空間 $A^2(\Omega,\varphi)$ と一致することに注意する。固定した t に対して、$\psi(t,\cdot)$ は有界なので、$A_{t,p}^2$ はベクトル空間としてはすべて同じである。また、任意の t,p に対して $\xi \in (A_{t,p}^2)^*$ が成り立つ。前節で紹介した変動理論 (系 5) を $A_{t,p}^2$ に対して適用することにより、関数

$$t \mapsto \log \|\xi_g\|_{(A_{t,p}^2)^*}^2$$

が凸関数であることが従う。

この関数の挙動を調べよう。まず、$t = 0$ のとき、右辺は $\|\xi_g\|_{A^2(\Omega,\varphi)^*}^2$ である。次の補題を示すことができる：

補題

$t \to -\infty$ のとき、$kt + \log \|\xi_g\|^2_{(A^2_{t,p})^*}$ は上に有界である。

$\mathbb{R}_{\leq 0}$ 上の凸関数 $kt + \log \|\xi_g\|^2_{(A^2_{t,p})^*}$ が $t \to -\infty$ のとき上に有界なので、t に関して単調増加であることが分かる。あとは、$t \to -\infty$ のとき、p に依存した小さい誤差項を除いてこれが $\|\widetilde{g}\|^2_V$ に収束することを示せばよい。この議論はここでは省略する。 □

定理 6 では、定理 2 における Green 関数の一般化として、V に沿って log 型の特異性を持つ多重劣調和関数が用いられている。V が 1 点のときには、このような G のうち最大のものは多重複素 Green 関数 (pluricomplex Green function) と呼ばれている。多重複素 Green 関数はある種の Monge-Ampère 方程式の解であり、多重ポテンシャル論の観点から研究されている。また、定理 6 に登場する Green 型関数 G も、その一般化として研究がなされている (例えば、[LS])。そのような観点から定理 6 の評価について (特に、Robin 定数に対応する関数 B の評価について) なにか言えることがあれば興味深いと思われる。

5 ジェットに対する最良係数の L^2 拡張定理

この節では、ジェットに対する最良係数の拡張定理を紹介する。ここでいうジェットとは、部分多様体の法方向の微分係数のことであり、それらを指定した拡張を考える。

ジェットの拡張定理は、Popovici [Pop] や Demailly [Dem16] などによって研究がなされているが、それぞれの定式化には次のように違いがある：

		拡張前	拡張後
[OT]		$\mathcal{O}/\mathcal{I}_V$	$\mathcal{O}$
[Pop]		$\mathcal{O}/\mathcal{I}_V^p$	$\mathcal{O}$
[Dem16]	(単純な場合)	$\mathcal{I}_V^{p-1}/\mathcal{I}_V^p$	$\mathcal{I}_V^{p-1}$
	(一般的な場合)	$\mathcal{I}(m_{p-1}G)/\mathcal{I}(m_pG)$	$\mathcal{I}(m_{p-1}G)$

それぞれ、左側の層の V 上の L^2 正則切断を、右側の層の Ω 上の L^2 正則切断に L^2 評価付きで拡張するというものである。[Dem16] では、イデアル層よりさらに一般に、ある種の解析的特異性を持つ多重劣調和関数 $G < 0$ に対して、$\mathcal{I}(m_{p-1}G)/\mathcal{I}(m_pG)$ という層に関する拡張定理を示している。ここで、多重劣調和関数 φ に対して $\mathcal{I}(\varphi)$ は乗数イデアル層を表す。m_p は jumping number と呼ばれるもので、m を動かしたときに乗数イデアル層 $\mathcal{I}(mG)$ が不連続に変化するような m の値を並べたものである。

本節では、Demailly による定式化の最も単純な場合として、ジェットの拡張定理の最良係数版を紹介する [Hos1]。設定は以下のとおりである。まず、$\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を擬凸領域とする。$V \subset \Omega$ を余次元 k の部分多様体とする。$\varphi \in PSH(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ を連続な多重劣調和関数とする。$G \in PSH(\Omega)$ を、以下を満たす関数とする：

- $G < 0$ である。
- 任意の点 $p \in V$ に対して、p の近傍上の座標 $(w_1, \ldots, w_n)$ が存在して、p の周りで $V = \{w_1 = \cdots = w_k = 0\}$ かつ、ある連続関数 h に対して

$$G = \log(|w_1|^2 + \cdots + |w_k|^2) + h,$$

の形で書ける。

このもとで、ジェットのなす正則ベクトル束 $J^{(p-1)} := \mathcal{I}_V^{p-1}/\mathcal{I}_V^p$ に適切な Hermite 計量を定義する。そのために、f, g を、V 上の $J^{(p-1)}$ の滑らかな切断であって、コンパクトな台を持つものとする。それらの Ω への滑らかな拡張 $\widetilde{f}, \widetilde{g}$ をとる。このとき、

$$\int_V \langle f, g\rangle_{J^{(p-1)}} d\lambda_V = \lim_{t\to-\infty} \int_{\{t<G<t+1\}} \widetilde{f}\overline{\widetilde{g}} e^{-\varphi-(p+k-1)G} d\lambda_{\mathbb{C}^n}$$

が成り立つように、$J^{(p-1)}$ 上の Hermite 計量 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{J^{(p-1)}}$ を定めることが可能である。ここで、定義の右辺の $p+k-1$ は、G の p 番目の jumping number m_p と一致していることに注意する。

このような計量の構成は、例えば [Ohs], [Dem16] でも用いられている。それらの論文においては、右辺の極限の存在は仮定されておらず、上極限が用いられている。今回は、Hilbert 空間の理論を用いる証明の都合で、極限の存在が重要である。そのため、ここでは φ の連続性や、G が特別な形で書けるといった極限の存在を示すための条件を仮定している。

以上の設定のもと、ジェットに対する最良係数の L^2 拡張定理が成り立つ：

定理 7 [Hos1]

任意の $f \in H^0(V, J^{(p-1)})$ であって、$\|f\|_{J^{(p-1)}} < +\infty$ を満たすものに対して、ある $F \in H^0(\Omega, \mathcal{I}_V^{p-1})$ であって、$F|_{J^{(p-1)}} = f$ かつ、

$$\int_\Omega |F|^2 e^{-\varphi-(p+k-1)G} d\lambda \leq \|f\|^2_{J^{(p-1)}}$$

を満たすものが存在する。

評価の最良性は、$n=1, \Omega=\Delta, V=\{0\}, G=\log|z|^2$ ととることによって確かめることができる。

証明は Berndtsson-Lempert による最良係数の L^2 拡張定理の証明とほとんど同様であるが、定式化の違いに合わせて議論を変える必要がある。特に、変動理論 (系 5) を用いる箇所については、定理 4 の φ として特異性をもつものを考える必要がある。そのため、[Hos1] では定理 4 を用いるのを避けて、Guan-Zhou による議論を用いて系 5 を示している。つまり、すでに知られている最良係数の L^2 拡張定理を用いて系 5 を示し、そこからジェットに対する最良係数の L^2 拡張定理を示している。

Demailly の定式化においては、$\mathcal{O}/\mathcal{I}_V^p$ ではなく、$\mathcal{I}_V^{p-1}/\mathcal{I}_V^p$ を考えている。すなわち、拡張する前のジェットについて、いちばん高い次数の微分係数以外が 0 になっていることを仮定している。そのため、ジェットのなすベクトル束上に Hermite 計量を構成することが可能となっている。Popovici の定式化では、類似の構成は難しいと思われる。

一方、McNeal-Varolin [MV] は、Berndtsson-Lempert の証明法を用いて、Popovici の定式化のもとでジェットに対する L^2 拡張定理の係数の改善に成功している。[MV] の証明は、[BL] の議論における「$t\to-\infty$」のパートを別の手法で行うものである。そのため、上に述べたような Hermite 計量の構成は不要となっている。一方、[MV] では係数の最良性は示されていない。

6 係数のさらなる改良

ここまでに取り上げた最良係数の拡張定理は、ウェイト関数 φ によらない評価だった。以下では、φ を固定して、それに応じてより詳しい評価を行う。以下では、元の領域 Ω より 1 次元高い領域 $\widetilde{\Omega}$ を考えることにより、実際にそれが可能であるということを示す。

$\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を擬凸領域とする。$V \subset \Omega$ を余次元 k の部分多様体、$\varphi \in PSH(\Omega)$ とする。$n+1$ 次元の領域 $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ を以下のように定義する：

$$\widetilde{\Omega} := \{(z,w) \in \Omega \times \mathbb{C} : |w|^2 < e^{-\varphi}\}$$

このタイプの領域は、Hartogs 領域と呼ばれている。φ が Ω 上の多重劣調和関数なので、$\widetilde{\Omega}$ も擬凸領域になる。この構成の利点は、Ω 上のウェイト付きの積分が、$\widetilde{\Omega}$ 上の積分で書けることである：

$$\int_\Omega F(z)e^{-\varphi(z)}d\lambda(z) = \int_{\widetilde{\Omega}} F(z)d\lambda(z,w)$$

このことを使えば、Ω 上のウェイト付き L^2 ノルムを、$\widetilde{\Omega}$ 上の積分を用いて記述できる。

$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^n$ を射影 $(z,w) \mapsto z$ とし、$\widetilde{V} := \pi^{-1}(V) \cap \widetilde{\Omega}$ とおく。$\widetilde{\Omega}$ 上の "Green 型関数" $\widetilde{G}$ の存在を仮定する。すなわち、$\widetilde{G} \in PSH(\widetilde{\Omega})$ であって、$\widetilde{G} < 0$ かつ、$\widetilde{\Omega}$ 上で

$$\log d_{\widetilde{V}}^2 + \widetilde{A} \geq \widetilde{G} \geq \log d_{\widetilde{V}}^2 - \widetilde{B}$$

が成り立つものが存在することを仮定する。ただし、$\widetilde{A}, \widetilde{B}$ は $\widetilde{\Omega}$ 上の連続関数で、$d_{\widetilde{V}}$ は $\widetilde{V}$ との距離を表す。

以上の設定の下で、$\widetilde{V} \subset \widetilde{\Omega}$ に対して定理 6 を適用することにより、以下のような結論を得る。

定理 8 [Hos2]

$f \in \mathcal{O}(V)$ であって、

$$\int_V |f(z)|^2 \int_{|w|^2 < e^{-\varphi(z)}} e^{k\widetilde{B}(z,w)} < +\infty$$

を満たすものに対して、その拡張 $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ であって、

$$\int_\Omega |F(z)|^2 e^{-\varphi(z)} \leq \frac{\sigma_k}{\pi} \int_{z \in V} |f(z)|^2 \int_{|w|^2 < e^{-\varphi(z)}} e^{k\widetilde{B}(z,w)}$$

を満たすものが存在する。

証明 $\pi^* f := f \circ \pi$ とおくと、これは $\widetilde{V}$ 上の正則関数である。その L^2 ノルム

$$\int_{\widetilde{V}} |\pi^* f(z,w)|^2 e^{k\widetilde{B}(z,w)} d\lambda(z,w) = \int_V \left[|f(z)|^2 \int_{|w|^2 < e^{-\varphi(z)}} e^{k\widetilde{B}(z,w)} d\lambda(w) \right] d\lambda(z)$$

が有限の値をとるとき、定理 6 から、$\widetilde{\Omega}$ 上への拡張 $\widetilde{F}$ が存在する。すなわち、$\widetilde{F} \in \mathcal{O}(\widetilde{\Omega})$ であって、以下の条件を満たすものがとれる：

- $\widetilde{F}|_{\widetilde{V}} = \pi^* f$ である。

- 次の評価

$$\int_{\widetilde{\Omega}} |\widetilde{F}(z,w)|^2 \leq \sigma_k \int_V |f(z)|^2 \int_{|w|^2<e^{-\varphi(z)}} e^{k\widetilde{B}(z,w)}$$

が成り立つ。

$F(z) := \widetilde{F}(z,0)$ と定めると、V 上で $F(z) = \widetilde{F}(z,0) = \pi^* f(z,0) = f(z)$ である。また、正則関数に対する平均値の不等式から、

$$\pi \int_\Omega |F(z)|^2 e^{-\varphi(z)} \leq \int_{\widetilde{\Omega}} |\widetilde{F}(z,w)|^2$$

を得る。したがって、

$$\int_\Omega |F(z)|^2 e^{-\varphi(z)} \leq \frac{\sigma_k}{\pi} \int_V |f(z)|^2 \int_{|w|^2<e^{-\varphi(z)}} e^{k\widetilde{B}(z,w)}$$

を得る。 □

定理 8 が、定理 6 よりも良い評価を与えていることを説明する。定理 6 の仮定にあるような G があれば、$\widetilde{G} = \pi^* G$、$\widetilde{B} = \pi^* B$ と取ることができる。この場合、定理 8 は定理 6 と同じものである。また、そのような G が存在する場合は、別の $\widetilde{G}$ に対しても、$\widetilde{G}$ と $\pi^* G$ の最大値を考えることにより、つねに $\pi^* G \leq \widetilde{G}$ であると仮定してよい。この場合、$\pi^* B \geq \widetilde{B}$ となるように $\widetilde{B}$ を取ることができるので、定理 8 は定理 6 よりも良い評価を与えている。

ここで行った 1 次元高い領域を考える手法は、[BL] や [MV] においては、定理 6 における Green 型関数の条件を緩めるために用いられている。それと同じ手法で、結論の L^2 評価も改善できるのは興味深い。

参考文献

[Ber] B. Berndtsson, *Curvature of vector bundles associated to holomorphic fibrations*, Ann. of Math. (2), 169 2 (2009), 531–560.

[BL] B. Berndtsson and L. Lempert, *A proof of the Ohsawa-Takegoshi theorem with sharp estimates*, J. Math. Soc. Japan, 68 4 (2016), 1461–1472.

[Blo] Z. Błocki, *Suita conjecture and the Ohsawa-Takegoshi extension theorem*, Invent. Math. 193 1 (2013), 149–158.

[Dem16] J.-P. Demailly, *Extension of holomorphic functions defined on non reduced analytic subvarieties*, In *The legacy of Bernhard Riemann after one hundred and fifty years. Vol. I*, volume 35 of *Adv. Lect. Math. (ALM)*, 191–222. Int. Press, Somerville, MA, 2016.

[GZ] Q. Guan and X. Zhou, *A solution of an L^2 extension problem with an optimal estimate and applications*, Ann. of Math. (2) 181 3 (2015), 1139–1208.

[Hos1] G. Hosono, *The optimal jet L^2 extension of Ohsawa-Takegoshi type*, `arXiv:1706.08725`.

[Hos2] G. Hosono, *On sharper estimates of Ohsawa-Takegoshi L^2-extension theorem*, `arXiv:1708.08269`.

[LS] F. Lárusson, R. Sigurdsson, *Plurisubharmonic extremal functions, Lelong numbers and coherent ideal sheaves*, Indiana Univ. Math. J. 48 (1999), no. 4, 15131534.

[MV] J. D. McNeal and D. Varolin., *Extension of Jets With L^2 Estimates, and an Application*, `arXiv:1707.04483`.

[MY] F. Maitani and H. Yamaguchi, *Variation of Bergman metrics on Riemann surfaces*, Math. Ann. 330 3 (2004), 477-489.

[Ohs] T. Ohsawa, *On the extension of L^2 holomorphic functions. V. Effects of generalization*, Nagoya Math. J. 161 (2001), 1–21.

[Ohs-book] T. Ohsawa, *L^2 approaches in several complex variables. Development of Oka-Cartan theory by L2 estimates for the $\overline{\partial}$ operator*, Springer Monographs in Mathematics. Springer, Tokyo, 2015.

[OT] T. Ohsawa and K. Takegoshi, *On the extension of L^2 holomorphic functions*, Math. Z., 195 2 (1987), 197–204.

[Pop] D. Popovici, *L^2 extension for jets of holomorphic sections of a Hermitian line bundle*, Nagoya Math. J., 180 (2005), 1–34.

[Sui] N. Suita, *Capacities and kernels on Riemann surfaces*, Arch. Rational Mech. Anal. 46 (1972), 212217.

[大沢] 大沢健夫, **現代複素解析への道標 レジェンドたちの射程**, 現代数学社, 2017.