

## 強擬凹境界をもつケーラーでない複素曲面

粕谷 直彦 (京都産業大学理学部)\*

本稿では、筆者が Antonio J. Di Scala (Politecnico di Torino), Daniele Zuddas (University of Bayreuth) との共著論文 [2] において構成した  $\mathbb{R}^4$  に微分同相な non-Kähler complex surface およびその強擬凹境界に関する解説を行う。

まず以下のような素朴な問題を考えよう。

問題 1.  $\mathbb{R}^{2n}$  上に non-Kähler complex structure は存在するか？

これに対する回答は以下の通りである。

- (1)  $n = 1$  のときは存在しない (任意の complex curve は Kähler であるから)。
- (2)  $n = 2$  のとき, 非可算無限個存在する (Di Scala-Kasuya-Zuddas [2])。
- (3)  $n \geq 3$  のとき, 非可算無限個存在する (Calabi-Eckmann [1])。

(2), (3) において重要になるのが以下の簡単な補題である。

補題 1. ホモロジカルに自明な compact holomorphic curve を含む複素多様体は non-Kähler である。

(3) については所謂 Calabi-Eckmann 多様体の簡単な応用として,  $\mathbb{R}^{2n}$  ( $n \geq 3$ ) に微分同相かつ楕円曲線を含む複素多様体が構成される [1]。構成された  $\mathbb{R}^{2n}$  上の complex structures は, 補題 1 より non-Kähler であることが分かる。

一方, (2) については全く異なる方法によって  $\mathbb{R}^4$  に微分同相かつ楕円曲線を含む複素曲面が構成される [2]。構成においてまず重要となるのが, 松本幸夫氏と深谷賢治氏によって発見された  $S^4$  から  $S^2$  への genus-one achiral Lefschetz fibration の例 [7] である。それは以下のようなものである。まず Hopf fibration  $H: S^3 \rightarrow \mathbb{C}P^1$  とその suspension  $\Sigma H: S^4 \rightarrow S^3$  を用意し, その合成  $f_{MF} := H \circ \Sigma H$  をとる。すると,  $f_{MF}$  の regular fiber は 2-torus となり, suspension の 2 つの pinched point がちょうど正と負の Lefschetz singularity となる。この torus fibration  $f_{MF}: S^4 \rightarrow S^2$  を Matsumoto-Fukaya fibration と呼ぶことにする。

$f_{MF}$  にはただ 2 つの singular fiber がある。Positive singularity を持つ方を  $F_1$ , negative singularity を持つ方を  $F_2$  としよう。すると,  $S^4$  は  $F_1$  の tubular neighborhood  $N_1$  と  $F_2$  の tubular neighborhood  $N_2$  の貼り合わせとして表せることが分かる。即ち,  $N_1 \cup N_2 = S^4$  である。 $N_1$  は  $D^2$  上の Lefschetz fibration の全空間,  $N_2$  は  $D^2$  上の achiral Lefschetz fibration の全空間となっている。ここでは議論を省くが  $\partial N_1$  と  $\partial N_2$  の貼り合わせは絵で表すと図 1 のようになる。

さて  $N_1 \cup N_2 = S^4$  であることが分かったから, 今度は  $N_2$  から negative singularity の近傍  $X \cong B^4$  を取り除くことを考える。当然その補集合  $N_1 \cup (N_2 \setminus X)$  は  $\mathbb{R}^4$  と微分同相になる。 $N_2 \setminus X$  は特異点のない  $D^2$  上の annulus fibration の全空間であるから annulus

\*e-mail: nkasuya@cc.kyoto-su.ac.jp

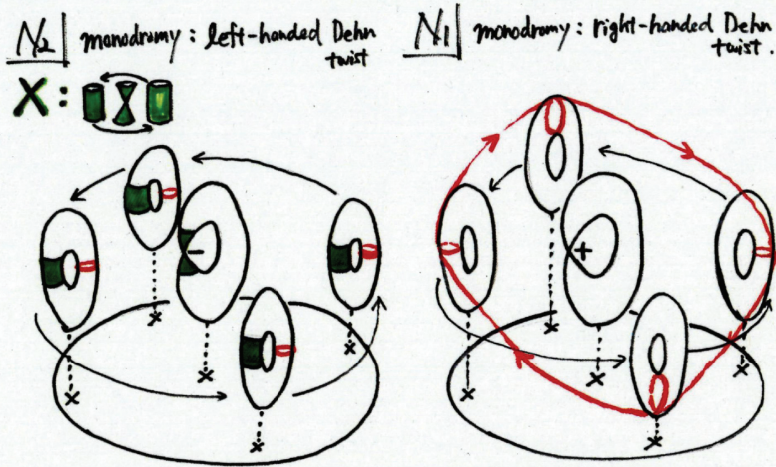


図 1:  $N_1$  と  $N_2$  の貼り合わせ

と disk の直積と微分同相である。従って、 $\mathbb{R}^4$  を  $N_1$  と  $A \times D^2$  ( $A$  は annulus) の和という形で非自明に分解することが出来る。このようにして得られた  $\mathbb{R}^4$  のトポロジカルな分解をもとに以下のように複素曲面の構成を行う。

まず、 $N_1$  と  $A \times D^2$  に相当する複素多様体のピースを用意する。以下、次のような記号を用いる。

$$\Delta(r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}, \quad \Delta(r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z| < r_2\}.$$

また、 $\rho_0, \rho_1, \rho_2$  は  $0 < \rho_0 < \rho_1 < 1 < \rho_2 < \rho_1^{-1}$  という条件を満たす実数とする。 $A \times D^2$  に対応するピースは直積  $\Delta(1, \rho_2) \times \Delta(\rho_0^{-1})$  である。一方、 $N_1$  に対応するのは小平の  $I_1$  型 singular fiber の近傍モデルである ([5])。それは以下のようなものである。まず、 $\Delta(0, \rho_1)$  上の elliptic fibration

$$\pi: \mathbb{C}^* \times \Delta(0, \rho_1) / \mathbb{Z} \rightarrow \Delta(0, \rho_1)$$

を考える。ただし、 $n \in \mathbb{Z}$  の作用は

$$n \cdot (z, w) = (zw^n, w)$$

で与えられている。これを  $\Delta(\rho_1)$  上に延長することによって、singular elliptic fibration  $g_1: W \rightarrow \Delta(\rho_1)$  が得られる。この  $W$  が  $N_1$  の holomorphic model である。

この  $W$  と直積  $\Delta(1, \rho_2) \times \Delta(\rho_0^{-1})$  を以下のように複素解析的に貼り合わせることによって、複素曲面  $E(\rho_1, \rho_2)$  を構成する。直積の方からは  $\Delta(1, \rho_2) \times \Delta(\rho_1^{-1}, \rho_0^{-1})$  を貼り合せ領域として取り、 $W$  の方からは  $\Delta(1, \rho_2) \times \Delta(\rho_0, \rho_1)$  と双正則な貼り合せ領域を以下の

ようにして取る. 多価正則関数  $\varphi: \Delta(\rho_0, \rho_1) \rightarrow \mathbb{C}^*$  を

$$\varphi(w) = \exp\left(\frac{1}{4\pi i}(\log w)^2 - \frac{1}{2}\log w\right)$$

によって定めると,  $\varphi$  は  $1 \in \mathbb{Z}$  の  $\mathbb{C}^*$  への作用と両立し,  $\pi$  の正則切断を定める. そこで, この  $\varphi$  を用いて

$$V := \{(z\varphi(w), w) \in W \mid z \in \Delta(1, \rho_2), w \in \Delta(\rho_0, \rho_1)\}$$

と定義すれば,  $V$  は  $\varphi$  の定める正則切断に沿った  $\Delta(1, \rho_2) \times \Delta(\rho_0, \rho_1)$  と双正則な領域となる. これが  $W$  内の貼り合せ領域である. 貼り合せ領域同士の双正則写像  $j$  は

$$j: V \cong \Delta(1, \rho_2) \times \Delta(\rho_0, \rho_1) \rightarrow \Delta(1, \rho_2) \times \Delta(\rho_1^{-1}, \rho_0^{-1}); (z, w) \mapsto (z, w^{-1})$$

によって与える. あとは

$$E(\rho_1, \rho_2) := W \cup_j (\Delta(1, \rho_2) \times \Delta(\rho_0^{-1}))$$

と定義すればこれは  $\mathbb{R}^4$  に微分同相な複素曲面となる. なぜなら, 貼り合わせ領域  $V$  の取り方がトポロジカルには Matsumoto-Fukaya fibration の貼り合わせに対応しているからである. さらに,  $W$  は無限個の楕円曲線を含んでおり, 補題 1 より確かに  $E(\rho_1, \rho_2)$  は non-Kähler である.

次に,  $E(\rho_1, \rho_2)$  の境界の性質について述べる. 上記の構成そのままでは実は複素曲面  $E(\rho_1, \rho_2)$  の境界は滑らかなではなく, two tori を角に持つ piecewise smooth 3-sphere となっている. このことは  $E(\rho_1, \rho_2)$  の境界はもともと  $S^4$  から negative singularity の近傍  $X$  を取り除いたときにできたものであることを思い出せば, 図 1 から分かる. しかし,  $E(\rho_1, \rho_2)$  の境界のカラー近傍を取り除くことによって滑らかな境界を持った複素曲面に整形することは極めて容易である. それどころかその境界は強擬凹となるようにできる. そしてその時境界上に complex tangency によって定まる negative contact structure は negative Hopf band を page とし, その core curve に沿った left-handed Dehn twist を monodromy とする open book に付随する  $S^3$  上の overtwisted structure である. このことはやはり図 1 を見れば自然に推測されることである. なぜなら,  $\partial X$  は上記の open book 分解の全空間そのものになっており,  $\partial E(\rho_1, \rho_2)$  はその向きを逆にしたものだからである.

実際の構成の概略は以下の通りである. まず, 複素曲面の境界が強擬凸/強擬凹であることと complex tangency によって境界が positive contact manifold / negative contact manifold になることは同値である, ということがよく知られている. さらに回転対称性がある場合には, 次の補題が適用できる.

**補題 2.** 滑らかな関数  $p: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  によって定義される  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$  内の超曲面  $S = \{(z_1, z_2) \mid |z_2| = p(|z_1|)\}$  は  $T^2 \times (0, 1)$  に微分同相であり, complex tangency によって  $S$  上に positive (resp. negative) standard contact structure が誘導されることと関数  $\log p(e^x)$  が strictly concave (resp. strictly convex) であることは同値である.

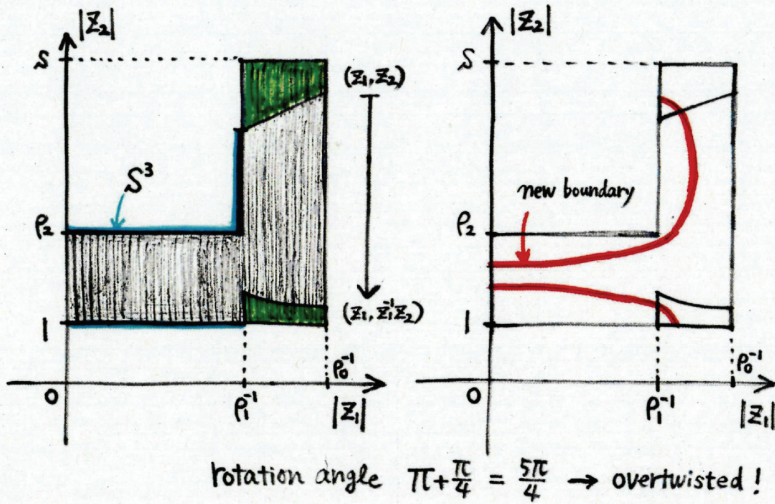


図 2: 新たな強擬凹境界の取り方

つまり境界の強擬凸性/強擬凹性はある関数の狭義凸性/狭義凹性に帰着させることができるということである。このことに注意すれば強擬凹境界の構成はもはや絵を描くことで行うことができる。

実際、図2の左側は  $\Delta(1, \rho_2) \times \Delta(\rho_0^{-1})$  と  $\mathbb{C}^* \times \Delta(\rho_0, \rho_1)/\mathbb{Z}$  の貼り合わせで得られる  $\partial E(\rho_1, \rho_2)$  の近傍を表しており、右側はその近傍内の  $S^3$  に微分同相な強擬凹超曲面の取り方を表している。これは別の言い方をすると、もともと holomorphic open book の構造を持っていた piecewise smooth 3-sphere である  $\partial E(\rho_1, \rho_2)$  を複素曲面  $E(\rho_1, \rho_2)$  の内側へ摂動することによって新たに強擬凹境界が得られるということである。詳しくは [4] を参照されたい。

さて、このようにして overtwisted contact 3-sphere を強擬凹境界を持つ4次元球体に微分同相な複素曲面が得られたので、次のような自然な問いが発生する。

問題 2. (境界が連結である) 複素曲面の強擬凹境界となる closed co-oriented contact 3-manifold を決定せよ。

Lisaca-Matić [6] により、任意の Stein fillable contact 3-manifold はある複素曲面の強擬凹境界となる、ということはすでに知られている。一方で、overtwisted contact 3-manifold については上記の  $E(\rho_1, \rho_2)$  を使った例が初めて構成されたものなので、他に知られていることはない。もちろん、上記の構成を少し変える ( $I_1$  型 singular fiber の代わりに  $I_n$  型 singular fiber を使う) ことで、レンズ空間  $L(n, n-1)$  上の overtwisted contact structure を境界を持つ例を構成すること等はできるが、すべてを決定するには程遠い状況である。そこで現在筆者は Eliashberg による Stein manifold の構成 [3] の際に用いられた強擬凸境界への holomorphic handle attaching の議論を応用できないか、

と考えている。もしも強擬凹境界の場合にも同様の議論が通用するならば、 $E(\rho_1, \rho_2)$  を使って構成した例に対して holomorphic handle attaching を繰り返すことで新たな例を作り出すことができる。結果として、任意の overtwisted contact manifold はある複素曲面の強擬凹境界となる、ということが示されるのではないかと期待している。そのために、強擬凹境界への holomorphic handle attaching の技術を確立することが目下の課題である。

## 参考文献

- [1] E. Calabi and B. Eckmann, *A class of compact, complex manifolds which are not algebraic*, Ann. of Math. **58** (1953), 494–500.
- [2] A. J. Di Scala, N. Kasuya and D. Zuddas, *Non-Kähler complex structures on  $\mathbb{R}^4$* , Geometry & Topology, Vol. 21, Issue 4 (2017), 2461–2473.
- [3] Y. Eliashberg, *Topological characterization of Stein manifolds of dimension  $> 2$* , Int. J. of Math. **1** (1990), 29–46.
- [4] N. Kasuya and D. Zuddas, *A concave holomorphic filling of an overtwisted contact 3-sphere*, arXiv:1711.07429 (2017).
- [5] K. Kodaira, *On Compact Analytic Surfaces: II*, Ann. of Math. **77** (1963), 563–626.
- [6] P. Lisca and G. Matić, *Tight contact structures and Seiberg-Witten invariants*, Invent. Math. **129** (1997), 509–525.
- [7] Y. Matsumoto, *On 4-manifolds fibered by tori*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **58** (1982), no. 7, 298–301.