

Non-projective K3 surfaces with Levi-flat hypersurfaces

小池 貴之 (大阪市立大学・理学研究科)*

Takayuki Koike

Graduate School of Science, Osaka City University

本稿では、レヴィ平坦超曲面を持つようなK3曲面の貼り合わせ構成に関する最新の結果について、[6]の要約に、進行中の上原崇人氏との共同研究の内容に関する予報を組み合わせる形で述べる。

1. 概要

1.1. K3曲面の貼り合わせ構成

(非特異な) 複素曲面 X がK3曲面であるとは、 X が単連結であり、かつ標準束 $K_X := \Lambda^2 T_X^*$ が正則に自明な直線束であるときにいう。K3曲面の例としては、例えば3次元射影空間 \mathbb{P}^3 の滑らかな4次曲面や、クマー曲面 (アーベル曲面 $A = \mathbb{C}^2/\Gamma$ を involution で割ってできる商空間の16個の特異点を爆発したもの) などが古典的に知られていた。

ここでは、K3曲面 X を、二つの開複素曲面 M, M' を正則に貼り合わせることで構成する。 M, M' は射影平面 \mathbb{P}^2 を適切な9点で爆発したものの開複素部分多様体である。より詳しく述べるなら、次で述べる記号を使うことで、“ M は S 中適切に選んだ C の近傍の補集合である”と説明できる (M' も同様):

例 1 滑らかな平面楕円曲線 $C_0 \subset \mathbb{P}^2$ を固定する。 C_0 から9点 $Z := \{p_1, p_2, \dots, p_9\} \subset C_0$ をとる。 $S := \text{Bl}_Z \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ を射影平面の Z での爆発として、 $C := \pi_*^{-1} C_0$ を C_0 の強変換とする。□

この例では、法線束 $N_{C/S}$ は自然に $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)|_{C_0} \otimes \mathcal{O}_{C_0}(-p_1 - p_2 - \dots - p_9)$ と同型である。従って9点配置 Z を変えることで、法線束は (C と C_0 との自然な同一視を介して) $\text{Pic}^0(C_0)$ のどの値をも取り得る。本研究の動機は、Arnol'd, 上田, Brunella らの研究の流れをくむ、この例1に於ける C の近傍の研究にある [1] [2] [8]。後述する Arnol'd の定理 (=定理 5) によれば、 $N_{C/S}$ が $\text{Pic}^0(C)$ 中でディオファントス条件を満たす、即ち

ある $A, \alpha > 0$ として、各 $n \geq 0$ に対して $\text{dist}(\mathbb{I}_C, N_{C/S}^n) \geq A \cdot n^{-\alpha}$ なるものが存在する

ときについては、 C の S 中での近傍 W として正則管状近傍であるようなもの、即ち、法線束の全空間の中での零切断のある近傍と双正則なもの存在が分かる (ここで \mathbb{I}_Y は正則に自明な直線束、 dist はユークリッド距離としている)。この定理を応用することで、次を示す:

定理 1 ([6]) C, S を例1のものとし、また C', S' を例1と同様に (別の平面楕円曲線及び9点配置から構成した) ものとする。以下の三条件を仮定する: C と C' とは双正則であり、それぞれの法線束 $N_{C/S}$ 及び $N_{C'/S'}$ はその同型を介して互いに双対であり

本研究は科研費 (No. 28-4196), 及び卓越研究員事業 (No. J171000201) の助成を受けたものである。

*e-mail: tkoiike@sci.osaka-cu.ac.jp

$(N_{C/S} \cong N_{C'/S'}^{-1})$, かつ $N_{C/S}$ は $\text{Pic}^0(C)$ の中でディオファントス条件を満たすとする. このとき, M と M' を, それぞれ S 及び S' 内での, C 及び C' のある正則管状近傍の補集合として定めれば, M 及び M' はその境界近傍同士を正則に貼り合わせることができ, 結果としてできる複素曲面は K3 曲面となる. \square

尚, このような Arnol'd の定理を用いた貼り合わせ手法に基づくコンパクト複素多様体の構成は, [7] に於ける $S^3 \times S^3$ の複素構造に関する研究にも用いられているものである. また, 本講演に於ける K3 曲面の構成は, [3, Example 5.1] に於ける K3 曲面の “gluing construction” の特別な場合とも見なせることに注意する. [3, Example 5.1] の “gluing construction” では, M 及び M' の複素構造を変形させることで貼り合わせを実現している. その一方で我々の手法では, M 及び M' の複素構造は変形させることなく正則な貼り合わせを実現している. このことは, 構成した K3 曲面にレビ平坦超曲面が存在すること等を保証する上で重要な事実であり (次小節参照), この意味で今回の構成の一つの特徴と言える.

1.2. 構成した K3 曲面の性質と主結果

C, C' の正則管状近傍の構成に着目すると, 構成から X の開部分複素多様体 $W^* \subset X$ として, 以下のようなアニュラス束構造を持つものの存在が従う: C 上の non-torsion な (即ち任意の整数 $n \neq 0$ で $F^n := F^{\otimes n}$ が正則に自明な直線束ではない) 平坦直線束 $F \rightarrow C$ 及び開区間 $I := (a, b)$ が存在して, W^* は $\{x \in F \mid a < |x|_h < b\}$ に双正則である ($a < b$, h は F の平坦計量, 実際には F は法線束 $N_{C/S}$ である). $H_t \subset X$ を, この同型を介して $\{x \in F \mid |x|_h = t\}$ に相当する超曲面とする ($a < t < b$) と, 各 H_t は X のレビ平坦超曲面となる. H_t の各葉は, 平坦直線束 F のモノドロミーに対応する表現 $\pi_1(C, *) \rightarrow U(1) := \{t \in \mathbb{C} \mid |t| = 1\}$ が単射な場合には \mathbb{C} に, そうでない場合には $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に同型である (どちらの場合も適切な X の構成より実際に実現される). これら H_t 各葉は, H_t の中で稠密になっている点にも注意する. この意味で, 我々の方法で構成される K3 曲面は, 豊富にレビ平坦超曲面を持つということが分かる.

さらに最近の研究により, 構成時のパラメータ (楕円曲線 C_0, C'_0 の選び方や 9 点配置たちの選び方, C 及び C' の正則管状近傍の選び方やそれら境界近傍の同一視のし方に関するパラメータ) を動かすことで, 少なくとも複素 19 次元分の自由度を伴いつつ K3 曲面の構成ができていることが分かった (§4.5 参照). また一般のパラメータに於いて構成された K3 曲面のピカル数は 0 であるとも判明している. 以上の結果は, 例えば以下のように纏められる:

定理 2 ([6] 及び上原氏との進行中の共同研究に基づく) K3 曲面 X として以下のようなコンパクトな (C^ω -級) レビ平坦超曲面の実一次元族 $\{H_t\}_{t \in I}$ を持つものが存在する: 各 $t \in I$ について H_t は実三次元トーラスと同相であり, また任意の葉は H_t 中で稠密である ($I \subset \mathbb{R}$ はある开区間). また, H_t の各葉は, \mathbb{C} 又は \mathbb{C}^* のどちらかに同型である. さらにこのような X は, 以上の性質を保ちつつ複素 19 次元の自由度をもって変形可能であり, 特に一般のパラメータ設定の下では X のピカル数は 0 である. 特にこのとき, X は射影的ではなく, かつクンマー曲面でもない. \square

一般のパラメータ設定の下で構成された K3 曲面について, レビ平坦超曲面の一つの葉について, それを \mathbb{C} のはめ込み射像と見ることで, 特に以下も得る:

系 3 射影的でない $K3$ 曲面 X として, クンマー曲面ではなく, かつ以下のような複素平面からの正則写像 $f: \mathbb{C} \rightarrow X$ を持つものが存在する: f は単射正則はめ込みであり, かつ像 $f(\mathbb{C})$ のユークリッド位相での閉包は実三次元トーラスと同相な X のコンパクトレビ平坦超曲面である. 特に, 像 $f(\mathbb{C})$ のユークリッド位相での閉包は X の真部分集合だが, 一方でそのザリスキー位相での閉包は X 全体と一致する. \square

2. 複素部分多様体近傍の多変数関数論からの動機

本研究の動機は, 例 1 に於ける C の近傍の多変数関数論的研究にある. より一般の設定として, S を複素曲面, C を S に埋め込まれたコンパクト複素曲線として $(C^2) := \deg N_{C/S}$ が 0 なるものとする. このとき, 管状近傍定理からは S 中 C の近傍として, $N_{C/S}$ 中での零切断近傍と C^∞ -同相なもの (管状近傍) W が取れることが分かる. 一方でこの W は, 一般には $N_{C/S}$ 中での零切断近傍と双正則に取れるとは限らない. そのため, W の多変数関数論的性質, 特に W (又は $W \setminus C$) 上にどのような正則関数及び多重劣調和関数が存在しうるのかどうかの問題となる. 特に例 1 での C 近傍は, 例えば次の定理 4 の観点などから, S の大域的な複素/微分幾何学的性質に関連して興味深いといえる:

定理 4 ([2]) 例 1 で, 9 点配置 Z が十分に一般的であり, $S \setminus C$ がコンパクト複素部分曲線を持たない状況を考える. このとき, 以下は同値である:

- (i) S のケーラー計量として, そのリッチ曲率がいたるところ半正なるものが存在する.
- (ii) C は擬平坦基本近傍系を持つ. 即ち, C のいくらでも小さい管状近傍 W として, その境界 ∂W がレビ平坦なるものが存在する. \square

今は $N_{C/S}$ が位相的に自明な直線束であるため, 定理 4 の (ii) が成立するための十分条件として正則管状近傍の存在が挙げられることに注意する. C が正則管状近傍を持つための十分条件については, 次の Arnol'd の定理がある:

定理 5 ([1]) S を複素曲面, $C \subset S$ を正則に埋め込まれた楕円曲線とする. 法線束 $N_{C/S}$ が位相的に自明であり, かつ $\text{Pic}^0(C)$ の点としてディオファントス条件を満たすことを仮定する. このとき, C は S 中で正則管状近傍を持つ. \square

定理 5 の証明は, 正則管状近傍の構成の手順を C の近傍の局所座標系の変換関数の線形化と見做し, Siegel の線形化定理の証明に基づいてこれを実行するという手法で行われている. そのため, この定理からは (少なくとも S が一般の複素曲面であるという設定の下では) デイオファントス条件は決して外せない仮定である ([8, §5.4] の例も参照). 一方で S, C が例 1 のものである場合については (C が特異点を持つ場合については事情が異なるものの [5], C が滑らかな楕円曲線である設定で考える上では) C が擬平坦基本近傍系を持たないような 9 点配置も, 現時点では見つかっていない.

3. $K3$ 曲面の貼り合わせ構成

3.1. 構成

$(C_0, Z = \{p_1, p_2, \dots, p_9\}, C, S)$ 及び $(C'_0, Z' = \{p'_1, p'_2, \dots, p'_9\}, C', S')$ を例 1 のようなものであって, 定理 1 の条件を満たすものとする. C と C' との間の同型射を固定し, これを g と書くこととする: $g: C \cong C', N_{C/S} = g^* N_{C'/S'}$. 定理 5 からは, C 及び C' それぞれの正則管状近傍 $W \subset S, W' \subset S'$ の存在が分かる.

W の局所座標系 $\{(W_j, (z_j, w_j))\}$ を, W を法線束の零切断近傍と見做したうえで, それぞれ z_j を C の座標の引き戻し, w_j をファイバー座標とすることで定義する. W' の局所座標系 $\{(W'_j, (z'_j, w'_j))\}$ も同様にとる. $N_{C/S}$ 及び $N_{C'/S'}$ が $U(1)$ -平坦束であること ($U(1) := \{t \in \mathbb{C} \mid |t| = 1\}$, [8, §1] を参照) を用いれば, 適切にこれら局所座標系を選ぶことで, その各 $W_{jk} := W_j \cap W_k$ 及び $W'_{jk} := W'_j \cap W'_k$ 上での変換が, ある定数 $A_{jk} \in \mathbb{C}$, $t_{jk} \in U(1)$ を用いて

$$\begin{cases} z_j = z_k + A_{jk} \\ w_j = t_{jk} \cdot w_k \end{cases}, \quad \begin{cases} z'_j = z'_k + A_{jk} \\ w'_j = t_{jk}^{-1} \cdot w'_k \end{cases}$$

となるようにできる. 以下このような局所座標系を固定して用いる.

1 より大なる定数 R, R' を固定する. 関数 $\Phi: W \rightarrow \mathbb{R}$ を $(z_j, w_j) \mapsto |w_j|$ で, $\Phi': W' \rightarrow \mathbb{R}$ を $(z'_j, w'_j) \mapsto |w'_j|$ で定義する (上記座標変換からこれらの well-definedness は簡単に確かめられる). 必要に応じて w_j, w'_j たちのスケールを変えることで, $\Phi^{-1}([0, R]) \subseteq W$ 及び $(\Phi')^{-1}([0, R']) \subseteq W'$ としてよい. 以下では改めて, $\Phi^{-1}([0, R])$ を W , $(\Phi')^{-1}([0, R'])$ を W' と記すこととする.

以上の記号を用いて, $M \subset S$ 及び $M' \subset S'$ を

$$M := S \setminus \Phi^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{R'}\right]\right), \quad M' := S' \setminus (\Phi')^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{R}\right]\right)$$

で定義する. このとき, $W \cap M = \Phi^{-1}((1/R', R))$ であり, また $W' \cap M' = (\Phi')^{-1}((1/R, R'))$ であるが, これらの間には, 各座標近傍で $f(z_j, w_j) := \left(g(z_j), \frac{1}{w_j}\right)$ と定めることで, 双正則写像 $f: \Phi^{-1}((1/R', R)) \rightarrow (\Phi')^{-1}((1/R, R'))$ が定義できる. 以下では f を介して $W \cap M$ と $W' \cap M'$ とを同一視し, これを W^* と書くこととする. M と M' とを, この W^* の同一視によって貼り合わせてできる複素曲面を X と記す: $X := M \cup_{W^*} M'$.

簡単な位相的考察により, X は単連結かつコンパクトな複素曲面であることが分かる. 従って, 次の命題6が示されれば, X がK3曲面であることが証明されたこととなる:

命題 6 ([6]) X 上大域的かつ *nowhere vanishing* な正則2形式 σ として, 各 $W^* \cap W_j$ 上では

$$\sigma|_{W^* \cap W_j} = \frac{dz_j \wedge dw_j}{w_j}$$

となるようなものが存在する. □

命題6の σ は, S 上の C に沿ってのみ極を持つ有理2形式 η を M に制限したものと, S' 上の C' に沿ってのみ極を持つ有理2形式 η' を M' に制限したものとを, 適切な正規化の下貼り合わせることで構成される (詳細は [6, Proposition 3.1] の証明を参照).

3.2. パラメータと自由度

ここでは, 前小節での構成に於ける自由度について述べる. まず, \mathbb{P}^2 の楕円曲線 C_0, C'_0 の選び方に自由度がある. これらは互いに同型になるように選ぶ必要があるため, ここまででは実質複素1次元分の自由度があることとなる. 次に, C_0 上のディオファントス条件を満たす直線束 L を固定する (以下では $L \cong N_{C/S}$ となるように構成を進める). L の選び方にはある程度の自由度があるものの, デイオファントス条件は $\text{Pic}^0(C_0)$ の中で

開条件ではないため、正則な変形の次元という範疇ではパラメータの自由度は勘定できない (一方で (C_0, C'_0, L) の三つ組み自体は複素1次元分の自由度を以て正則に変形することに注意). その次に, C_0 と C'_0 との双正則写像 ($g: C \cong C'$ を誘導するもの) を固定する. 平行移動を考えると, ここでも1次元分の自由度があることが分かる. 続いて, 8点配置 $p_1, p_2, \dots, p_8 \in C_0$, 及び $p'_1, p'_2, \dots, p'_8 \in C'_0$ を選ぶ (それぞれ8次元分ずつの自由度がある). 残りの点 $p_9 \in C_0$ 及び $p'_9 \in C'_0$ は, $N_{C/S} = g^* N_{C'/S'} \cong L$ という条件から一意的に決まってしまうことに注意する. 最後に, $\{w_j\}$ と $\{w'_j\}$ とのスケールリングに関するパラメータ分として, 1次元分の自由度がある (これは R や R' などの決め方に影響するパラメータである, 詳細は [6, §4.1.1] 参照).

以上の考察からは, 前小節での構成にあたり, 計19次元分の自由度があることが分かる. [6, §4] では, 少なくとも内18次元分については, パラメータを動かすことによって実際に出来上がったK3曲面の複素構造が変形していることが確かめられている. 一方でこの結果は, 上原氏との共同研究により以下のように改良された: 上記19次元分のパラメータを正則に動かすことで, 出来上がったK3曲面の複素構造も独立な19次元の方向に実際に変形する. この主張の証明については, 次節で述べる.

4. 構成したK3曲面の marking

X を前節の方法で構成したK3曲面とする. ここでは $H_2(X, \mathbb{Z})$ の適切な生成元を代表するような22個の X の2-cycle を定義し, それらそれぞれに沿っての σ の積分について述べる (ここで σ は命題6のもの). この積分を計算することは, 所謂周期写像について調べていることに相当し, この意味で構成した X が marked K3 moduli の中でどのような場所に位置しているのか (又は, 前節で言及した19個のパラメータそれぞれを動かした際に, X が marked K3 moduli の中でどのように動くのか) の情報を得ることができる.

4.1. 構成する22個の2-cycleの構成の概要

次小節以降で, X の22個の2-cycle $A_{\alpha,\beta}, A_{\beta,\gamma}, A_{\gamma,\alpha}, B_\alpha, B_\beta, B_\gamma, C_{1,2}, C_{2,3}, \dots, C_{7,8}$ 及び $C'_{6,7,8}$, そして $C'_{1,2}, C'_{2,3}, \dots, C'_{7,8}$ 及び $C'_{6,7,8}$ を定義し, これらに沿っての σ の積分値について述べる. これら2-cycleは, それらが代表するホモロジー類が $H_2(X, \mathbb{Z})$ の基底と見做せるように構成する. さらにこれらを基底と見做すことで, 次の意味で $H_2(X, \mathbb{Z})$ はK3格子と見做せるように構成を行う: $H_2(X, \mathbb{Z}) = \langle A_{\alpha,\beta}, B_\gamma \rangle \oplus \langle A_{\beta,\gamma}, B_\alpha \rangle \oplus \langle A_{\gamma,\alpha}, B_\beta \rangle \oplus \langle C_\bullet \rangle \oplus \langle C'_\bullet \rangle$, $\langle A_{\alpha,\beta}, B_\gamma \rangle \cong \langle A_{\beta,\gamma}, B_\alpha \rangle \cong \langle A_{\gamma,\alpha}, B_\beta \rangle \cong U$, $\langle C_\bullet \rangle \cong \langle C'_\bullet \rangle \cong E_8(-1)$. ここで格子 U に関しては, $(A_{\alpha\beta}, A_{\alpha\beta}) = 0, (A_{\alpha\beta}, B_\gamma) = 1, (B_\gamma, B_\gamma) = -2, (A_{\beta\gamma}, A_{\beta\gamma}) = 0, (A_{\beta\gamma}, B_\alpha) = 1, (B_\alpha, B_\alpha) = -2$, 及び $(A_{\gamma\alpha}, A_{\gamma\alpha}) = 0, (A_{\gamma\alpha}, B_\beta) = 1, (B_\beta, B_\beta) = -2$ が成立するという意味で記述している. 以上の意味で, 以下で構成する22個の2-cycleの組は, X の marking と見做せる.

尚, ここで述べる構成は, 位相的には既に知られているものである (例えば [4, §3] を参照). 我々の2-cycleたちの構成は, この位相的には知られている構成を, それらに沿っての σ の積分の計算が可能となるように, 複素構造を考慮に入れる形で詳細化したものと説明できる.

4.2. A_\bullet の定義とそれらに沿っての σ の積分

前節の W^* は C 上のアニュラス束の形をしており, 特に $S^1 \times S^1 \times S^1$ にホモトピックである ($N_{C/S}$ が位相的に自明な直線束であったことに注意). α, β 及び γ をその基本群

を生成するような C^ω 級のループたちであって、内 α, β は C の基本群の生成元と見做せて、 γ は自然な射 $W^* \rightarrow C$ の一つのファイバーの基本群を生成するようなものとする。2-cycle $A_{\alpha,\beta}, A_{\beta,\gamma}, A_{\gamma,\alpha}$ を、それぞれ $A_{\alpha,\beta} := \alpha \times \beta$, $A_{\beta,\gamma} := \beta \times \gamma$, $A_{\gamma,\alpha} := \gamma \times \alpha$ で定義する。

定義から、これらは全て、 $W^* \subset X$ 内の $S^1 \times S^1$ に同相な 2-cycle である。一方で、 $\sigma|_{W^*} = \frac{dz_j \wedge dw_j}{w_j}$ であった。そのため、 σ のこれらに沿っての積分は、実際に具体的な計算が可能である。計算結果は以下ようになる： $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{A_{\alpha,\beta}} \sigma = a_\beta - \tau \cdot a_\alpha$, $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{A_{\beta,\gamma}} \sigma = \tau$, $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{A_{\gamma,\alpha}} \sigma = 1$ 。ここで τ は $C \cong \mathbb{C}/\langle 1, \tau \rangle$ であり、かつ α, β がこの同型を介してそれぞれ区間 $[0, 1], [0, \tau]$ に対応するような上半平面の元である。また、 a_α, a_β はそれぞれ、 $U(1)$ -平坦束 $N_{C/S}$ の、 α, β に沿ってのモノドロミーが、それぞれ $\exp(2\pi\sqrt{-1} \cdot a_\alpha)$, $\exp(2\pi\sqrt{-1} \cdot a_\beta)$ と記述できるような実数である。

4.3. C の定義とそれらに沿っての σ の積分

e_ν を $p_\nu \in Z$ に対応する S の例外曲線とする ($\nu = 1, 2, \dots, 9$)。 h を \mathbb{P}^2 のある直線の、爆発 $\pi: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ による逆像とする。また以下では、 $\pi|_C: C \cong C_0$ によって p_ν に対応する点を $q_\nu \in C$ と記す。 $e'_\nu, h' \in S'$, $q'_\nu \in C'$ も同様に定義する。

まず $C_{1,2}$ の定義を述べる。そのために C 内で q_1 と q_2 とをつなぐ線分 $\Gamma_{1,2}$ を固定する。各 $\varepsilon > 0$ に対し $\Delta_\nu^{(\varepsilon)} \subset e_\nu$ を $e_\nu \cap \Phi^{-1}([0, \varepsilon])$ で定義する。一方で $\Phi^{-1}(\varepsilon)$ の部分集合 $\widehat{T}_{1,2}^{(\varepsilon)}$ を、 $\Gamma_{1,2}$ を (ε に応じて適切な長さに) 延長した線分 $\widehat{\Gamma}_{1,2}$ の、自然な射 $\Phi^{-1}(\varepsilon) \rightarrow C$ による逆像として定義する。ここで $\Gamma_{1,2}$ の延長 $\widehat{\Gamma}_{1,2}$ は、 $\widehat{T}_{1,2}^{(\varepsilon)} \cap e_1$ 及び $\widehat{T}_{1,2}^{(\varepsilon)} \cap e_2$ が共に S^1 と同相になるように行う。 $\widehat{T}_{1,2}^{(\varepsilon)} \setminus (e_1 \cup e_2)$ の3つの連結成分の内、二つの円周 $\widehat{T}_{1,2}^{(\varepsilon)} \cap e_1$, $\widehat{T}_{1,2}^{(\varepsilon)} \cap e_2$ の両方を境界として持つものを $T_{1,2}^{(\varepsilon)}$ と書くこととして、

$$C_{1,2}^{(\varepsilon)} := (e_1 \setminus \Delta_1^{(\varepsilon)}) \cup T_{1,2}^{(\varepsilon)} \cup (e_2 \setminus \Delta_2^{(\varepsilon)})$$

と定める。定義から $C_{1,2}^{(\varepsilon)}$ は S の部分集合であり、 S の 2-cycle として $e_1 - e_2$ とホモロガスであることを見做せ、また S^2 に同相であることが分かる。さらにここで ε を $1/R'$ より大なるように選んでおくことで、 $C_{1,2}^{(\varepsilon)} \subset M$ と見做せ、従って $C_{1,2}^{(\varepsilon)}$ は X の 2-cycle とも見做すことができる。以上を以て X の 2-cycle $C_{1,2}$ の定義とする (後述する理由から、この定義は $\varepsilon \in (1/R', R)$ の選び方に依存しない)。

次に、 σ の $C_{1,2}$ に沿っての積分の計算について述べる。命題6の直後に述べたような、 S 及び S' 上の有理2形式 η 及び η' を考える (つまり、 σ は $\eta|_M$ と $\eta'|_M$ とを W^* 上で貼り合わせたものである)。 $\sigma|_M = \eta|_M$ であるので、 X 上で積分 $\int_{C_{1,2}^{(\varepsilon)}} \sigma$ を計算した値は、 S 上で積分 $\int_{C_{1,2}^{(\varepsilon)}} \eta$ を計算した値と同一である。そこで以下では、この計算を (X 上でなく) S 上で考察する。 $\eta|_{S \setminus C}$ は閉形式であり、また各正数 $\varepsilon' \in (0, R)$ に対して、2-cycle として $C_{1,2}^{(\varepsilon)}$ と $C_{1,2}^{(\varepsilon')}$ とはホモロガスであるので、結局

$$\int_{C_{1,2}} \sigma = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{C_{1,2}^{(\varepsilon)}} \eta = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_{e_1 \setminus \Delta_1^{(\varepsilon)}} \eta + \int_{T_{1,2}^{(\varepsilon)}} \eta + \int_{e_2 \setminus \Delta_2^{(\varepsilon)}} \eta \right) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{T_{1,2}^{(\varepsilon)}} \eta$$

を得る (ここで $\int_{e_\nu} \eta = 0$ なることを用いた)。最右辺の計算のために、まず各 W_j 上で積分 $\int_{\widehat{T}_{1,2}^{(\varepsilon)}} \eta$ を考える。 W_j はあらかじめ、自然な射 $W \rightarrow C$ による $U_j := W_j \cap C$ の逆像としてよいことに気を付けると、

$$\int_{\widehat{T}_{1,2}^{(\varepsilon)} \cap W_j} \eta = \int_{\{(z_j, w_j) | z_j \in \widehat{\Gamma}_{1,2} \cap U_j, |w_j| = \varepsilon\}} \frac{dw_j \wedge dz_j}{w_j} = 2\pi\sqrt{-1} \int_{\widehat{\Gamma}_{1,2} \cap U_j} dz_j$$

である. ε が十分小さいときには,

$$\int_{\Gamma_{1,2} \cap U_j} dz_j = \int_{\hat{\Gamma}_{1,2} \cap U_j} dz_j + O(\varepsilon)$$

としてよいことに気を付ければ, 以上から

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_{1,2}} \sigma = \int_{\Gamma_{1,2}} dz$$

を得る (ここで dz は C 上の大域的な正則 1-form であって, 各 U_j 上では $dz|_{U_j} = dz_j$ なるもの).

$C'_{1,2}$ 及び $\nu = 2, 3, \dots, 7$ に対して $C_{\nu, \nu+1}$, $C'_{\nu, \nu+1}$ も同様に定義を行う. 全く同様の考察から,

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_{\nu, \nu+1}} \sigma = \int_{\Gamma_{\nu, \nu+1}} dz, \quad \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C'_{\nu, \nu+1}} \sigma = \int_{\Gamma'_{\nu, \nu+1}} dz'$$

となる (ここで $\Gamma_{\nu, \nu+1}$ は q_ν と $q_{\nu+1}$ をつなぐ線分, dz' や $\Gamma'_{\nu, \nu+1}$ の定義は dz や $\Gamma_{\nu, \nu+1}$ の定義に準じる).

$C_{6,7,8}$ は, 位相的には M 中の S^2 に同相な 2-cycle として, $-h + e_6 + e_7 + e_8$ にホモロガスとなるように同様の定義を行う (つまり適切に選んだ h から $\Phi^{-1}([0, \varepsilon])$ を取り除いた補集合, 及び $e_6 \setminus \Phi^{-1}([0, \varepsilon])$, $e_7 \setminus \Phi^{-1}([0, \varepsilon])$, $e_8 \setminus \Phi^{-1}([0, \varepsilon])$ とを, $\Phi^{-1}(\varepsilon)$ 内の適切な管で繋ぐことで $C_{6,7,8}$ は定義される). $C'_{6,7,8}$ の定義も同様である. 先ほどと全く同様の方法により,

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_{6,7,8}} \sigma = \int_{\Gamma_{0,6} + \Gamma_{0,7} + \Gamma_{0,8}} dz, \quad \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C'_{6,7,8}} \sigma = \int_{\Gamma'_{0,6} + \Gamma'_{0,7} + \Gamma'_{0,8}} dz'$$

となる (ここで $\Gamma_{0,\nu}$ は C のある変曲点と q_ν とをつなぐ線分であり, $\Gamma'_{0,\nu}$ の定義も同様である).

4.4. B_α の定義とそれらに沿っての σ の積分

ループ $\alpha \subset W^*$ を M の 1-cycle とみる. このとき, M の単連結性から, ある位相的円盤 $D_\alpha \subset M$ として $\partial D_\alpha = \alpha$ なるものの存在が分かる. 同様に, ある位相的円盤 $D'_\alpha \subset M'$ として, $\partial D'_\alpha = \alpha$ なるものの存在も分かる. これら D_α と D'_α とを α で貼り合わせることで, X の 2-cycle B_α を定義する. B_β の定義も同様である. これら二つの 2-cycle に沿っての σ の具体的な積分値は, 現時点では計算ができていない.

B_γ の定義も同様に行うが, 一方で γ については, M, M' それぞれの中の γ を境界に持つ位相的円盤をより具体的に構成することができる. 実際, γ はある点 $z_0 \in C$ の, 自然な射 $\Phi^{-1}(r) \rightarrow C$ による逆像であるとしてよい ($r \in (1/R', R)$). このとき, 前小節と同様にして, $e_9 \setminus \Phi^{-1}([0, r])$ と $e'_9 \setminus (\Phi')^{-1}([0, 1/r])$ とを, 適切な管 $T_9^{(r)} \subset W^*$ によってつなぐことで X の 2-cycle ができる. ここで $T_9^{(r)}$ は C の二点 p_9 と $g^{-1}(p'_9)$ とをつなぐ直線 Γ_9 を決めることで対応して定まるものであり, M の部分集合としては $\Phi^{-1}(r)$ の, また M' の部分集合としては $(\Phi')^{-1}(1/r)$ の部分集合と見做せるようなものである. このように定めた 2-cycle を以て B_γ の定義とする. 前説と全く同様の方法により,

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{B_\gamma} \sigma = \int_{\Gamma_9} dz$$

を得る.

4.5. まとめ

ここまでで、 B_α と B_β 以外の 20 個の 2-cycle については、そのそれぞれに沿っての σ の積分値が計算できた。まず $A_{\beta,\gamma}$ のに沿っての積分値は τ であり、これは C_0 及び C'_0 の複素構造に対応するパラメータである。次に、 C_0, C'_0 を固定したとして、 C_\bullet 及び C'_\bullet に沿っての積分値を考察する。データ

$$\left(\int_{C_{1,2}} \sigma, \int_{C_{2,3}} \sigma, \dots, \int_{C_{7,8}} \sigma, \int_{C_{6,7,8}} \sigma, \int_{C'_{1,2}} \sigma, \int_{C'_{2,3}} \sigma, \dots, \int_{C'_{7,8}} \sigma, \int_{C'_{6,7,8}} \sigma \right) \in \mathbb{C}^{16}$$

は、 $p_1, p_2, \dots, p_8 \in C_0$ 及び $p'_1, p'_2, \dots, p'_8 \in C'_0$ の選び方のみから定まっている。簡単な線形代数的考察からは、適切な marking の固定の下、逆に上記 \mathbb{C}^{16} の元を決定すれば、 $p_1, p_2, \dots, p_8 \in C_0$ 及び $p'_1, p'_2, \dots, p'_8 \in C'_0$ の選び方が復元できることにも気を付ける。

以下では C_0 及び C'_0 に加え、 $p_1, p_2, \dots, p_8 \in C_0$ 及び $p'_1, p'_2, \dots, p'_8 \in C'_0$ の選び方も決定したものととして考察を続ける。このときには、 $N_{C/S} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)|_{C_0} \otimes \mathcal{O}_{C_0}(-p_1 - p_2 - \dots - p_9)$ を決定することと p_9 を決定することは同義である（ここでディオファントス条件に関する仮定により p_9 の選び方に制限が加わることに注意）。この情報は $A_{\alpha,\beta}$ に沿っての σ の積分値に反映される。 p_9 の決定後は、同型射 $g: C \rightarrow C'$ を決めることに一意的に p'_9 が定まる（ここで条件 " $N_{C/S} = g^* N_{C'/S'}$ " を用いる）。この情報は B_γ に沿っての σ の積分値に対応していた。

以上のパラメータを固定すると、前節の手法で K3 曲面の構成を行う上で残されたパラメータは、 M 及び M' を定義するために S, S' から取り除く楕円曲線近傍の大きさと、その貼り合わせの糊代の大きさに関するパラメータのみである。これは $\{w_j\}, \{w'_j\}$ のスケールリングにより決定されているパラメータである。 $\{w_j\}, \{w'_j\}$ のスケールリングを正則に変えることを考えると、構成される K3 曲面の複素構造は実際に変形していることが分かる（実際にこれにより、 $\int_{B_\alpha} \sigma$ と $\int_{B_\beta} \sigma$ の値のみが正則に変動し、その他の 20 個の積分値は不変であることが簡単な考察から分かるため。[6, §4.1.1] も参照）。

以上をまとめると、表 1 のようになる。また、以上の考察から、§3.2 で述べた 19 個のパラメータを動かすことで、独立な 19 次元分の自由度を以て、構成される K3 曲面の複素構造が変形していることが分かる。より具体的には、次が分かる： σ の各 A_\bullet たちに沿っての積分の計算結果によれば $H_2(X, \mathbb{Z})$ の元 $v := A_{\alpha\beta} + a_\alpha \cdot A_{\beta\gamma} - a_\beta \cdot A_{\gamma\alpha}$ に σ は直交しているが、一方で X を構成する際のパラメータを適切に動かすことにより、周期領域中 " $(\bullet, v) = 0$ " で定義される超平面の中のある空でない領域について、その各点に対応する K3 曲面を貼り合わせ構成で実現できる（[6, Theorem 4.6, 6.4] も参照）。ここで周期領域は 20 次元であったので、その超平面は 19 次元であることに注意する。またここで、予め a_α, a_β が一般的であるように選んでおいた後に、対応して定まる領域内の一般的な点を選ぶという手順を考えることにより、 $\sigma \cdot \mathbb{C}$ の直交補空間が格子点を含まないようにできる。このときには、対応する K3 曲面のピカル数は 0 であり、特に非射影的であることが分かる。

- [1] V. I. ARNOL'D, Bifurcations of invariant manifolds of differential equations and normal forms in neighborhoods of elliptic curves, Funkcional. Anal. i Priložen., 10-4 (1976), 1–12 (English translation : Functional Anal. Appl., 10-4 (1977), 249–257).
- [2] M. BRUNELLA, On Kähler surfaces with semipositive Ricci curvature, Riv. Mat. Univ. Parma, 1 (2010), 441–450.

	2-cycle	$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \sigma$ の値	対応するパラメータ
U	$A_{\beta,\gamma}$	τ	$C_0 (\cong C'_0)$ の取り方
	B_α	不明	$\{w_j\}, \{w'_j\}$ のスケーリング (R, R' と回転)
U	$A_{\gamma,\alpha}$	1	なし (σ の正規化条件と見做す)
	B_β	不明	$\{w_j\}, \{w'_j\}$ のスケーリング (R, R' と回転)
$E_8(-1)$	$C_{1,2}$	$\int_{\Gamma_{1,2}} dz$	p_1 から見た p_2 の相対的位置
	$C_{2,3}$	$\int_{\Gamma_{2,3}} dz$	p_2 から見た p_3 の相対的位置
	\vdots	\vdots	\vdots
	$C_{7,8}$	$\int_{\Gamma_{7,8}} dz$	p_7 から見た p_8 の相対的位置
	$C_{6,7,8}$	$\int_{\Gamma_{0,6}+\Gamma_{0,7}+\Gamma_{0,8}} dz$	C_0 の点 " $p_6 + p_7 + p_8$ " の位置
$E_8(-1)$	$C'_{1,2}$	$\int_{\Gamma'_{1,2}} dz'$	p'_1 から見た p'_2 の相対的位置
	$C'_{2,3}$	$\int_{\Gamma'_{2,3}} dz'$	p'_2 から見た p'_3 の相対的位置
	\vdots	\vdots	\vdots
	$C'_{7,8}$	$\int_{\Gamma'_{7,8}} dz'$	p'_7 から見た p'_8 の相対的位置
	$C'_{6,7,8}$	$\int_{\Gamma'_{0,6}+\Gamma'_{0,7}+\Gamma'_{0,8}} dz'$	C'_0 の点 " $p'_6 + p'_7 + p'_8$ " の位置
U	$A_{\alpha,\beta}$	$a_\beta - \tau \cdot a_\alpha$	p_9 の取り方 ($N_{C/S}$ の取り方)
	B_γ	$\int_{\Gamma_9} dz$	同型 $g: C \cong C'$ の選び方

表 1: 2-cycle に沿っての積分値と対応するパラメータ

[3] M. DOI, Gluing construction of compact complex surfaces with trivial canonical bundle, J. Math. Soc. Japan, **61**, 3 (2009), 853–884.

[4] R. GOMPF AND A. STIPSICZ, 4manifolds and Kirby calculus, Graduate Studies in Mathematics **20** AMS (1999).

[5] T. KOIKE, Ueda theory for compact curves with nodes, Indiana U. Math. J, **66**, 3 (2017), 845–876.

[6] T. KOIKE, Complex K3 surfaces containing Levi-flat hypersurfaces, arXiv:1703.03663.

[7] H. TSUJI, Complex structures on $S^3 \times S^3$, Tohoku Math. J. (2), **36**, 3 (1984), 351–376.

[8] T. UEDA, On the neighborhood of a compact complex curve with topologically trivial normal bundle, Math. Kyoto Univ., **22** (1983), 583–607.