ドリフト項を持たない複合 Poisson 過程に対する在庫制御問題

大阪大学大学院基礎工学研究科 野場 啓
Kei Noba
Graduate School of Engineering Science,
Osaka University

1 序

本報告は, 山崎和俊氏 (関西大学システム理工学部) との共同研究である論文 [7] を参考にしており, ランニングコストと制御コストを最小化する戦略を考える在庫制御問題を扱う.

具体的にはまず, Lévy 過程 $X = \{X_t : t \geq 0\}$ を与える. これはある製品の制御前の在庫量を表す. それの対し, 意思決定者は戦略 $\pi = \{R_t^\pi : t \geq 0\}$ をとったとする. ここで R_t^π は時間 t までの製品の在庫補充量を表す. このとき制御後の時間 t における製品の在庫量は $U_t^\pi := X_t + R_t^\pi$ となる. 割引率 $q > 0$, 在庫保持にかかるコストを表す関数を f, 在庫補充にかかるコスト/リワードを $C \in \mathbb{R}$ としたとき, 戦略 π をとったときのコストの期待値は

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-qt} f(U_t^\pi)dt + C\int_{[0,\infty)} e^{-qt} dR_t^\pi\right]$$

で表される. 本研究ではこの値を最小化する戦略を求めたい.

正の跳びを持たない Lévy 過程や負の跳びを持たない Lévy 過程を用いたケースにおける在庫制御問題に関する研究は, [2], [1], [11], [4], [3], [8] 等の先行研究が存在する. 一方, 論文 [7] では正と負の両側に跳びを持ちうる Lévy 過程を用いたケースを扱い, ある barrier strategy の最適性を示した. これは正と負の両側に跳びを持ちうる Lévy 過程に対し戦略の最適性を示した初の論文といえる.

論文 [7] ではドリフト項を持たない複合 Poisson 過程を除く Lévy 過程に対し, 戦略の最適性を示した. 本報告集ではドリフト項を持たない複合 Poisson 過程に対する barrier strategy の最適性を, [7, Theorem 4.1] の証明を参考にしつつ示したい.

2 準備

$X = \{X_t : t \geq 0\}$ は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上に定義される Lévy 過程とする. 実数 x に対し, 確率測度 $\mathbb{P}_x$ は x を出発する X の法則を表すものとする. 簡単のため, $\mathbb{P}$ は $\mathbb{P}_0$ を表すもの

とする．確率測度 $\mathbb{P}_x$ (resp. $\mathbb{P}$) についての期待値は, $\mathbb{E}_x$ (resp. $\mathbb{E}$) で表すものとする．Lévy 過程 X は以下の仮定を満たすとする:

仮定 2.1. (i) X の特性指数 Ψ(つまり

$$e^{-t\Psi(\lambda)} = \mathbb{E}\left[e^{i\lambda X_t}\right], \quad \lambda \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

を満たす関数 Ψ) は次の形を持つ:

$$\Psi(\lambda) = \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (1 - e^{i\lambda z})\Pi(dz), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

ただし, Lévy 測度 Π は $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 上の測度であり, $\Pi(\mathbb{R}\setminus\{0\}) < \infty$ を満たす.

(ii) ある定数 $\overline{\theta} > 0$ が存在して, X の Lévy 測度 Π は $\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} e^{\overline{\theta} z}\Pi(dz) < \infty$ を満たす.

また, $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ は X によって生成される自然なフィルトレーションとし, 任意の $b \in \mathbb{R}$ に対して, $\tau_b^- = \inf\{t > 0 : X_t < b\}$ とする.

標本路の性質を考えることにより, $b \neq x$ が成り立つとき, $\mathbb{P}_x$-a.s. で

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \tau_{b+\varepsilon}^- = \tau_b^- \tag{2.1}$$

が成り立つことがわかる.

集合 D^X を次のように定義する:

$$D^X = \left\{ y \in \mathbb{R} : \mathbb{E}\left[\int_0^\infty 1_{\{X_t = y\}} dt\right] \neq 0 \right\}.$$

このとき D^X は高々加算な集合である．$x \in \mathbb{R}$ に対して集合 D_x を

$$D_x^X = \{y \in \mathbb{R} : y - x \in D\}$$

とすると,

$$D_x^X = \left\{ y \in \mathbb{R} : \mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty 1_{\{X_t = y\}} dt\right] \neq 0 \right\}$$

が成り立つ.

コスト関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と資本注入のコスト/リワード $C \in \mathbb{R}$ は以下の仮定を満たすものとする.

仮定 2.2. (i) 関数 f は凸関数である．よって, f は $\mathbb{R}$ 上で右微分 f'_+ および左微分 f'_- を持つ.

(ii) 関数 f は “polynomial growth in the tail” である．つまり, ある定数 $k_1, k_2 \in (0,\infty)$, $N \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$|f(x)| \leq k_1 + k_2 |x|^N, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

が成り立つ.

(iii) $f'_+(-\infty) < -Cq < f'_+(\infty)$ をみたす．ここで, $f'_+(-\infty) := \lim_{x\to-\infty} f'_+(x) \in [-\infty,\infty)$, $f'_+(\infty) := \lim_{x\to\infty} f'_+(x) \in (-\infty,\infty]$ である.

集合 D^f を,

$$D^f = \{y \in \mathbb{R} : f'_+(y) \neq f'_-(y)\}$$

とする．D^f は高々加算な集合である．さらに, 集合 D を

$$D = \{x \in \mathbb{R} : D^X_x \cap D^f \neq \emptyset\}$$

とする．次の補題が得られる.

補題 2.3. 集合 D は, 高々加算な集合である.

証明については, Appendix A を見よ.

3 在庫制御問題

3.1 問題の設定

割引率を $q > 0$ とする．戦略 π をとったときの在庫補充量を表す確率過程を $R^\pi = \{R^\pi_t : t \geq 0\}$ とする．つまり, 戦略 π をとったときの時間 $t \geq 0$ における在庫量は,

$$U^\pi_t = X_t + R^\pi_t$$

で表される．$\mathcal{A}$ は, R^π が $\mathbb{F}$-適合, 非減少, 右連続, $R^\pi_{0-} = 0$, および

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-qt}|f(U^\pi_t)|dt + \int_{[0,\infty)} e^{-qt} dR^\pi_t\right] < \infty, \quad x \in \mathbb{R}$$

を満たす戦略 π の集合とする．戦略 $\pi \in \mathcal{A}$ に対して

$$v_\pi(x) = \mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-qt} f(U^\pi_t)dt + C\int_{[0,\infty)} e^{-qt} dR^\pi_t\right]$$

とした時,

$$v_{\pi^*}(x) = \inf_{\pi\in\mathcal{A}} v_\pi(x) \tag{3.1}$$

を満たす $\pi^* \in \mathcal{A}$ を求めたい．このような π^* は**最適戦略**と呼ばれる.

3.2 Barrier strategy

実数 b に対し, 戦略 $\pi^b \in \mathcal{A}$ を次の式を満たすものとする:

$$R_t^{\pi^b} = (b - X_t) \vee 0, \quad t \geq 0.$$

このとき, 戦略 π^b は値 b での barrier strategy と呼ばれる.

補題 3.1. 任意の π^b に対し, $\pi^b \in \mathcal{A}$ が成り立つ.

この補題の証明は, [7, Appendix A.2] で行われた議論と同様である.

本報告ではある barrier strategy が (3.1) を満たす最適戦略であることを示す.

4 主結果

実数 b^* を次の式で定義する:

$$b^* = \inf\left\{\mathbb{E}_b\left[\int_0^\infty e^{-qt} f'_+(U_t^{\pi^b})dt\right] + C \geq 0\right\}.$$

ただし, 次の補題が得られるため, b^* が定義可能であることに注意しておく.

補題 4.1. 実数 x, b に対し, $\mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-qt} \left|f'_+(U_t^{\pi^b})\right| dt\right] < \infty$ が成り立つ.

この補題の証明は, [7, Appendix A.4] と同様である. 関数 f の凸性から, f'_+ は単調増加であり, 関数 $b \to \mathbb{E}_b\left[\int_0^\infty e^{-qt} f'_+(U_t^{\pi^b})dt\right]$ も単調増加である. よって,

$$\lim_{b\uparrow\infty} \mathbb{E}_b\left[\int_0^\infty e^{-qt} f'_+(U_t^{\pi^b})dt\right] = \frac{f'_+(\infty)}{q}, \quad \lim_{b\downarrow-\infty} \mathbb{E}_b\left[\int_0^\infty e^{-qt} f'_+(U_t^{\pi^b})dt\right] = \frac{f'_+(-\infty)}{q},$$

が得られるため, 仮定 2.2 (iii) と合わせて $b^* \in \mathbb{R}$ が得られる.

第 2 章で記述した設定の下で, 次の主結果が得られる.

定理 4.2. 値 b^* での barrier strategy π^{b^*} は最適戦略である.

5 定理 4.2 の証明

定理 4.2 の証明は, [7, Theorem 4.1] の証明とほぼ変わらないが, 少し異なる点があるため, そのような箇所に注目して証明を進めていく.

5.1 値 b^* の最適性

ここでは全ての barrier strategy において π^{b^*} が最適であること, 言い換えれば,

$$v_{\pi^{b^*}}(x) = \inf_{b\in\mathbb{R}} v_{\pi^b}(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{5.1}$$

となることを確認したい.

補題 5.1. 実数 x を固定する. 関数 $b \mapsto v_{\pi^b}(x)$ は連続である. さらに, $b \neq x$ を満たす $b \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{v_{\pi^{b+\varepsilon}}(x) - v_{\pi^b}(x)}{\varepsilon} &= \mathbb{E}_x\left[\int_{\tau_b^-}^{\infty} e^{-qt} f'_+(U_t^{\pi^b})dt\right] + C\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_b^-}\right] \\ &= \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_b^-}\right]\left(\mathbb{E}_b\left[\int_0^{\infty} e^{-qt} f'_+(U_t^{\pi^b})dt\right] + C\right)\end{aligned}$$

が成り立つ.

補題 5.1 は, (2.1) を用いることで, [7, Lemma 3.4] と同様の議論を行い示すことができる. ここから, $b \mapsto \mathbb{E}_b\left[\int_0^\infty e^{-qt} f'_+(U_t^{\pi^b})dt\right] + C$ の増減に注目すれば, b^* の最適性が証明できることが想像できるかと思う. 後は, [7, Theorem 3.1] の証明と同様の議論を行うことで, (5.1) が得られる.

5.2 Verification

この章では, 定理 4.2 の証明を行う. 作用素 $\mathcal{L}$ を (2.2) を満たす連続関数 g に対して,

$$\mathcal{L}g(x) = \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (g(x+z) - g(x))\Pi(dz), \quad x \in \mathbb{R},$$

とする. 関数 g は (2.2) を満たすことと仮定 2.1 (ii) から, $\mathcal{L}$ は定義可能なことがわかる. また, $C^{(1)}_{\mathrm{poly}}$ を次の条件を満たす二つの $\mathbb{R}$ 上の関数の集合 (g, g') から成る集合とする:

(i) g は (2.2) を満たす連続関数である.

(ii) g' は単調増加な可測関数である.

(iii) $x < y$ を満たす実数 x, y に対して, $g(y) - g(x) = \int_x^y g'(z)dz$ が成り立つ.

次の補題は, “verification lemma” と呼ばれるものである.

補題 5.2. 二つの関数の集合 $(g, g') \in C^{(1)}_{\mathrm{poly}}$ が, 次の二つの条件を満たすとする:

$$\mathcal{L}g(x) - qg(x) + f(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5.2}$$
$$g'(x) + C \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5.3}$$

このとき, $x \in \mathbb{R}$ に対して, $g(x) \leq \inf_{\pi \in \mathcal{A}} v_\pi(x)$ が成り立つ.

この補題の証明は, [7, Proposition 4.1] の証明とほとんど変わらないため省略する. (ただし, [7, Proposition 4.1] の証明で [9, Theorem II.31, II.32] を用いた箇所では, [9, Theorem IV.70] を少し改良したものを用いる.) 補題 5.2 より, 関数 $v_{\pi^{b^*}}$ が Lebesgue 測度に対して密度 $v'_{\pi^{b^*}}$ を持っていて $(v_{\pi^{b^*}}, v'_{\pi^{b^*}}) \in C^{(1)}_{\mathrm{poly}}$ を満たし, さらに (5.2) と (5.3) を満たすことを示せば定理 4.2 の証明は完了したといえる.

まず密度 $v'_{\pi^{b^*}}$ が存在することを示す.

補題 5.3. 実数 b を固定する. 関数 v_{π^b} は $\mathbb{R}$ 上で連続であり, その右微分 $v'_{\pi^b,+}$ は

$$v'_{\pi^b,+}(x) = \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_b^-} e^{-qt} f'_+(X_t)dt\right] - C\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_b^-}\right], \quad x \in \mathbb{R},$$

と書くことができる.

この補題は, [7, Lemma 3.5 (i)] の証明と同様の議論で証明することができる.

次の補題では, [7] で行われた証明と異なる点がある.

補題 5.4. 関数 $v_{\pi^{b^*}}$ は Lebesgue 測度に対して次の密度 $v'_{\pi^{b^*}}$ を持つ:

$$v'_{\pi^{b^*}}(x) = \mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-qt} f'_{\varepsilon^*}(U_t^{\pi^{b^*}})dt\right], \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5.4}$$

ただし, 定数 ε^* は $[0, 1]$ に値をとり,

$$f'_{\varepsilon^*}(y) = (1 - \varepsilon^*)f'_+(y) + \varepsilon^* f'_-(y), \quad y \in \mathbb{R},$$

とする.

Proof. [7, Appendix A.5] の (A.5) までの証明と同様の方法により, ある実数 $\varepsilon^* \in [0, 1]$ が存在して,

$$\mathbb{E}_{b^*}\left[\int_0^\infty e^{-qt} f'_{\varepsilon^*}(U_t^{\pi^{b^*}})dt\right] = -C \tag{5.5}$$

が成り立つことがわかる. この等式と補題 5.4 より, $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$
\begin{aligned}
v'_{\pi^{b^*},+}(x) &= \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_{b^*}^-} e^{-qt} f'_+(X_t)dt\right] + \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_{b^*}^-}\right]\mathbb{E}_{b^*}\left[\int_0^\infty e^{-qt} f'_{\varepsilon^*}(U_t^{\pi^{b^*}})dt\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_{b^*}^-} e^{-qt} f'_+(X_t)dt\right] + \mathbb{E}_x\left[\int_{\tau_{b^*}^-}^\infty e^{-qt} f'_{\varepsilon^*}(U_t^{\pi^{b^*}})dt\right]
\end{aligned}
$$

が成り立つ. 特に, $x \notin D$ に対して,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_{b^*}^-} e^{-qt} f'_+(X_t)dt\right] &- \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_{b^*}^-} e^{-qt} f'_{\varepsilon^*}(X_t)dt\right] \\
&= \sum_{y \in D^f \cap D_x^X} (f'_+(y) - f'_{\varepsilon^*}(y))\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_{b^*}^-} e^{-qt} 1_{\{X_t=y\}}dt\right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

が成り立つため,

$$
v'_{\pi^{b^*},+}(x) = \mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-qt} f'_{\varepsilon^*}(U_t^{\pi^{b^*}})dt\right] \tag{5.6}
$$

が成り立つ.

関数 $v'_{\pi^{b^*},+}$ が単調増加であることを示す. $y, a \in \mathbb{R}$ と $t \geq 0$ に対し, $X_t^{(y)} = X_t + y$, $\tau_a^{(y)} = \inf\{t > 0 : X_t^{(y)} < a\}$ と書くことにする. また, $R_t^{(y),b^*} = -\inf_{s\in[0,t]}\left\{(X_s^{(y)} - b^*) \wedge 0\right\}$, $U_t^{(y)} = X_t^{(y)} + R_t^{(y),b^*}$ とおく. [7, Lemma 3.5] の証明の (3.20) までと同様の議論を行うことにより, $U_t^{(x+\varepsilon)} - U_t^{(x)}$ は $t \geq 0$ について単調減少であり,

$$
\begin{aligned}
X_t^{(x)} &= U_t^{(x)}, \quad t \in [0, \tau_{b^*}^{(x)}), \\
X_t^{(x+\varepsilon)} &= U_t^{(x+\varepsilon)}, \quad t \in [0, \tau_{b^*}^{(x+\varepsilon)}), \\
U_t^{(x+\varepsilon)} - U_t^{(x)} &\in [0, \varepsilon], \quad t \in [0, \tau_{b^*}^{(x+\varepsilon)}) \\
U_t^{(x+\varepsilon)} - U_t^{(x)} &= 0, \quad t \geq \tau_{b^*}^{(x+\varepsilon)},
\end{aligned}
$$

が成り立つ. そのため, $x \in \mathbb{R}$ と $\varepsilon > 0$ に対し,

$$
\begin{aligned}
v'_{\pi^{b^*},+}(x+\varepsilon) - v'_{\pi^{b^*},+}(x) =& \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_{b^*}^{(x)}} e^{-qt}\left(f'_+(U_t^{(x+\varepsilon)}) - f'_+(U_t^{(x)})\right)dt\right] \\
&+ \mathbb{E}_x\left[\int_{\tau_{b^*}^{(x)}}^{\tau_{b^*}^{(x+\varepsilon)}} e^{-qt}\left(f'_+(U_t^{(x+\varepsilon)}) - f'_{\varepsilon^*}(U_t^{(x)})\right)dt\right] \\
\geq& 0
\end{aligned}
$$

が成り立つ．最後の不等式は，f'_+ が単調増加であることと，$f'_+ \geq f'_{\varepsilon^*}$ から得られる．補題 5.3 より関数 $v_{\pi^{b^*}}$ は連続であることがわかり，その右微分は単調増加であることが分かったため，[5, Theorem 6.4] より，関数 $v_{\pi^{b^*}}$ は凸関数であることがわかる．[10, Proposition A.3.1, A.3.2] から (詳しくは，[6, Lemma 4.1] の証明と同様の議論を行う)，関数 $v'_{\pi^{b^*},+}$ が関数 $v_{\pi^{b^*}}$ の Lebesgue 測度に対する密度となることがわかる．また補題 2.3 より，関数 $v'_{\pi^{b^*},+}$ はほとんどいたるところ (5.6) のように書けるため，(5.4) が関数 $v_{\pi^{b^*}}$ の Lebesgue 測度に対する密度となることがわかる． $\square$

関数 $v'_{\pi^{b^*}}$ は単調増加なので，(5.5) と合わせて，

$$v'_{\pi^{b^*}}(x) \geq \lim_{y \to -\infty} v'_{\pi^{b^*}}(y) = \mathbb{E}_{b^*}\left[\int_0^\infty e^{-qt} f'_{\varepsilon^*}(U_t^{\pi^{b^*}})dt\right] = -C, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5.7}$$

が得られる．

補題 5.5. $(v_{\pi^{b^*}}, v'_{\pi^{b^*}}) \in C^{(1)}_{\mathrm{poly}}$ が成り立つ．

Proof. [7, Appendix A.3] と同様の議論により，$v_{\pi^{b^*}}$ は (2.2) を満たすことがわかる．後は，補題 5.3, 5.4 より，$(v_{\pi^{b^*}}, v'_{\pi^{b^*}}) \in C^{(1)}_{\mathrm{poly}}$ が得られる． $\square$

補題 5.6. 次の式が成り立つ:

$$\mathcal{L}v_{\pi^{b^*}}(x) - qv_{\pi^{b^*}}(x) + f(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

この補題の証明は，[7, Lemma 4.2, 4.3] の証明と同様である．

補題 5.2, 5.5, 5.6 および (5.7) より，定理 4.2 の主張が得られる．

A　補題 2.3 の証明

実数 x が $D_x^X \cap D^f \neq \emptyset$ を満たすとする．このとき，ある $y \in D^X$ と $z \in D^f$ が存在して，$y + x = z$ が成り立つ．つまり，

$$D \subset \bigcup_{y \in D^X} \{x \in \mathbb{R} : y + x = D^f\}$$

(実際は "=" である) と表せるため，D は高々加算な集合である．

参考文献

[1] L. Benkherouf and A. Bensoussan. Optimality of an (s, S) policy with compound Poisson and diffusion demands: a quasi-variational inequalities approach. SIAM J. Control Optim. 48 (2009), no. 2, 756–762.

[2] A. Bensoussan, R. H. Liu and S. P. Sethi. Optimality of an (s, S) policy with compound Poisson and diffusion demands: a quasi-variational inequalities approach. SIAM J. Control Optim. 44 (2005), no. 5, 1650–1676.

[3] D. Hernández-Hernández, Daniel, J. L. Pérez and K. Yamazaki Optimality of refraction strategies for spectrally negative Lévy processes. SIAM J. Control Optim. 54 (2016), no. 3, 1126–1156.

[4] D. Hernández-Hernández and K. Yamazaki. Games of singular control and stopping driven by spectrally one-sided Lévy processes. Stochastic Process. Appl. 125 (2015), no. 1, 1–38.

[5] J. B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal. Fundamentals of convex analysis. Abridged version of Convex analysis and minimization algorithms. I [Springer, Berlin, 1993; MR1261420] and II [ibid.; MR1295240]. Grundlehren Text Editions. Springer-Verlag, Berlin, 2001. x+259 pp.

[6] K. Noba. On the optimality of double barrier strategies for Lévy processes. Stochastic Process. Appl. 131 (2021), 73–102.

[7] K. Noba and K. Yamazaki. On singular control for Lévy processes. arXiv:2008.03021.

[8] J. L. Pérez, K. Yamazaki and A. Bensoussan. Optimal periodic replenishment policies for spectrally positive Lévy demand processes. SIAM J. Control Optim. 58 (2020), no. 6, 3428–3456.

[9] P. E. Protter. Stochastic integration and differential equations. Second edition. Version 2.1. Corrected third printing. Stochastic Modelling and Applied Probability, 21. Springer-Verlag, Berlin, 2005. xiv+419 pp.

[10] D. Revuz and M. Yor. Continuous martingales and Brownian motion. Third edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 293. Springer-Verlag, Berlin, 1999. xiv+602 pp.

[11] K. Yamazaki. Inventory control for spectrally positive Lévy demand processes. Math. Oper. Res. 42 (2017), no. 1, 212–237.