Local Central Limit Theorem for Reflecting Diffusions in a Continuum Percolation Cluster

慶應義塾大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻 竹内裕隆
Yutaka Takeuchi
School of Fundamental Science and Technology, Keio University

1 導入

連続パーコレーションは浸透現象を数理モデル化したランダム媒質の一種であり, クラスターの幾何的な様子を調べる事に興味がある. 例えば, 無限クラスターが存在するかどうかは基本的な問題である. 本研究では, より深く踏み込み, 無限クラスターがどれくらい空間全体を覆っているかについて考える. もし, 点配置がよく混ざっている物であれば, 無限クラスターは空間をほとんど埋め尽くすくらいに大きいと期待される. すなわち, クラスターを遥か遠くから粗視的に見た時, クラスターが全空間を覆い尽くしている筈である. これはランダム媒質の言葉で言えば均一化が生じているということになる.

均一化に関する定式化はいくつか考えられているが, その中に熱核を用いた local central limit theorem がある. これは端的に言えば, 時空間に関して適切なスケーリングを取ると Gauss 核に時空間局所一様に収束するという物である.

local central limit theorem に関する結果として, ボンドパーコレーション上のランダムウォークの熱核についての Barlow と Hambly([6]) の結果や, random environment 上の拡散過程の熱核についての Chiarini と Deushcel([8]) の結果が知られている.

この二つの結果の analogy から, 連続パーコレーション上の反射壁を持つ拡散過程に関しても同様の結果が成り立つと予想できる. 本稿では, 連続パーコレーションの無限クラスター上の反射壁を持つ拡散過程に関する local central limit theorem について最近得られた結果を述べる.

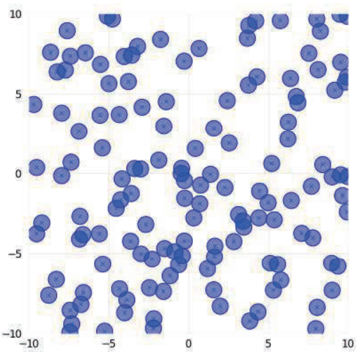

図 1: 連続パーコレーション

2 準備

この節では主張を紹介するために必要な設定などを述べる.

2.1 連続パーコレーション

$\mathbb{R}^d$ 上の配置空間 Ω を以下のように定める：

$$\Omega = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{x_i} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{x_i}(K) < \infty \text{ for all compact set } K \right\}.$$

Ω には漠位相を入れる事ができ, その Borel 集合族は $\{\omega \in \Omega \mid \omega(A) = n\}$, $(A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), n \in \mathbb{N})$ という形の部分集合から生成される事が知られている. また, 配置空間の元 ω は Dirac 測度の可算和であり, $\omega = \sum_i \delta_{x_i}$ と $\mathbb{R}^d$ の部分集合 $\{x_i\}_i$ を, x_i が全て異なっている場合に同一視する事とする.

連続パーコレーション $L(\omega)$ ($\omega \in \Omega$, ω は多重点を持たない) は

$$L(\omega) = \bigcup_{x \in \omega} B(x, \rho)$$

と定義される. (ω を先程の同一視で $\mathbb{R}^d$ の部分集合と見ている事に注意.) ここで, $B(x, r)$ は中心が x で半径が r の $\mathbb{R}^d$ の通常の開球であり, ρ は固定された正定数である. $L(\omega)$ が非有界連結成分をただ一つ持つ時, それを $W(\omega)$ と記し, これを無限クラスターと呼ぶ. 便宜上非有界連結成分が存在しなかったり, 二つ以上存在する場合, $W(\omega) = \emptyset$ と定める.

技術的な理由により除外集合 Δ を

$$\Delta = \left\{ \omega \in \Omega \;\middle|\; \begin{array}{l} \omega = \displaystyle\sum_i \delta_{x_i}, \quad |x - y| = 2\rho \ \ (\exists x, y \in \omega) \\ \text{or } x_i = x_j \ (\exists i \neq j) \end{array} \right\}.$$

で定め, 考える集合を $\widehat{\Omega} = \{\omega \in \Omega \setminus \Delta \mid 0 \in W(\omega)\}$ に制限する.

$\mathbb{P}$ を Ω 上の確率測度とし, その $\widehat{\Omega}$ への制限 $\widehat{\mathbb{P}}$ を $\mathbb{P}(\widehat{\Omega}) > 0$ の場合 $\widehat{\mathbb{P}}(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \cap \widehat{\Omega})/\mathbb{P}(\widehat{\Omega})$ で定める. また, $\widehat{\mathbb{P}}$ に関する期待値を $\widehat{\mathbb{E}}$ と記す.

また, 配置空間上のシフト τ_z を

$$\tau_z \omega(A) = \omega(A + z) = \sum_{x \in \omega} \delta_x(A + z) = \sum_{x \in \omega} \delta_{x-z}(A),$$

で定める.

次に, 連続パーコレーション上に Euclid 開球の代わりとなる物を導入する. まず, $x \in \mathbb{R}^d$ と $\omega \in \widehat{\Omega}$ に対して

$$\gamma^\omega(x) = \sup\{t \in [0, 1] \mid tx \in W(\omega)\}$$

と定め, x の最近接点 $s^\omega(x)$ を

$$s^\omega(x) = \gamma^\omega(x) x$$

で定義する. $\omega \in \widehat{\Omega}$ に対して, 定義から $0 \in W(\omega)$ であるから, γ^ω の定義中の sup の中身は空集合とはならない事に注意されたい.

この時, 連続パーコレーション上の「開球」として $W(\omega, x, R)$ を $W(\omega) \cap B(s^\omega(x), R)$ の $s^\omega(x)$ を含む連結成分とする.

2.2 Dirichlet 形式

次に, 連続パーコレーション上に反射壁を持つ拡散過程を構成するために Dirichlet 形式を準備する．$a\colon \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$ を行列値確率変数とし, $u, v \in L^2(W(\omega))$ に対して $\mathcal{E}^\omega(u,v)$ を

$$\mathcal{E}^\omega(u,v) = \int_{W(\omega)} \langle a(\tau_x\omega)\nabla u(x), \nabla v(x)\rangle dx$$

で定める．（$\langle\cdot,\cdot\rangle$ はユークリッド内積．）

また, 非負値関数 $\theta\colon W(\omega) \to [0,\infty)$ に対して, $C_c^\infty\left(\overline{W(\omega)}\right) \cap L^2(W(\omega), \Lambda^\omega(\tau_x\omega)dx)$ を $\mathcal{E}_1^\omega$ ノルムで完備化したものを $\mathcal{F}^{\omega,\theta}$ とおく．ここで, $\mathbb{R}^d$ 上の領域 U に対して関数空間 $C_c^\infty(\overline{U})$ とは

$$C_c^\infty(\overline{U}) = \{u \in C(U) \mid \text{ある } U \text{ の開近傍 } V \text{ と } v \in C_c^\infty(V) \text{ が存在して } u = v \text{ in } U.\}$$

で定まる集合である．次章の Assumption で適切な関数 θ を導入する事により Dirichlet 形式 $\mathcal{E}^\omega$ の定義域を設定する．

3 主結果

この節では無限クラスター $W(\omega)$ の均一化に関する主結果を述べる．初めにその為の仮定を紹介する．

Assumption 3.1. (1) $\mathbb{P}$ はシフトに関して定常かつエルゴード的. すなわち,

$$\begin{cases} \mathbb{P}\circ\tau_x^{-1} = \mathbb{P} \\ \tau_x^{-1}(A) = A \Rightarrow \mathbb{P}(A) \in \{0,1\} \end{cases}$$

が全ての $x \in \mathbb{R}^d$ に関して成立する.

(2) $\mathbb{P}\left(\widehat{\Omega}\right) > 0$ かつほとんど全ての $\omega \in \widehat{\Omega}$ に対して $W(\omega)$ は Lipschitz 領域になる.

(3) (volume regularity) $\widehat{\mathbb{P}}$-a.s.ω に対して, ある正定数 C_V が存在して

$$C_V R^d \le |W(\omega, x, R)|$$

がほとんど全ての $x \in W(\omega)$ と十分大きな $R > 0$ に対して成立する．ここで $|\cdot|$ は Lebesgue 測度.

(4) (isperimetric condition) ほとんど全ての $\omega \in \widehat{\Omega}$ に対して,

$$\inf\left\{\frac{\mathcal{H}_{d-1}(W(\omega)\cap\partial O)}{|W(\omega)\cap O|^{\frac{d-1}{d}}} \mid O \text{ is open subset}\right\} > 0$$

が成り立つ．ここで $\mathcal{H}_{d-1}$ は $d-1$ 次元 Hausdorff 測度.

(5) ある非負値可測関数 λ, Λ が存在して, ほとんど全ての ω と $\xi \in W(\omega)$ に対して

$$\lambda(\omega)|\xi|^2 \le \langle a(\omega)\xi, \xi\rangle \le \Lambda(\omega)|\xi|^2$$

が成り立つ.

(6) $1/p+1/q<2/d$ を満たすある $p,q\in[1,\infty]$ が存在して,

$$\widehat{\mathbb{E}}[\Lambda^p]<\infty,\quad \widehat{\mathbb{E}}[\lambda^{-q}]<\infty.$$

が成り立つ.

(7) $x\mapsto\Lambda(\tau_x\omega)$ により Λ を $W(\omega)$ 上の関数とみなし, $\mathcal{F}^\omega=\mathcal{F}^{\omega,\Lambda}$ とおく. この時 $(\mathcal{E}^\omega,\mathcal{F}^\omega)$ は正則 Dirichlet 形式になり, 関連する Markov 過程 X_t^ω は推移密度 $p_t^\omega(\cdot,\cdot)$ を持つ.

(8) (quenched invariance principle) ある（detaministic な）正定値行列 Σ が存在して, $\widehat{\mathbb{P}}$-a.s. ω について任意の開球 B に対して

$$\int_B p_t^\omega(0,x)\Lambda(\tau_x\omega)dx=\int_B k_t^\Sigma(x)dx$$

が成り立つ.

Remark 3.2. Assumption3.1 (1) は均一化を考える上で自然な仮定である. 例えば $\mathbb{P}$ が Poisson 点過程の場合, ρ を臨界半径より大きく取れば満たされる. 他の点過程の例としては, Gaussian zeros や Ginibre 点過程は臨界半径を持つ事が知られている ([12]).

(2) の前半は問題を考える上で必要な仮定であり, 後半は境界の regularity を見積もるために必要な技術的な仮定である.

Assumption 3.1 (3) は幾何的な条件であり, 空間の広がり具合が元の Euclid 空間と同じであるという意味で自然な仮定である. この仮定を満たしているかを調べる事は難しいが, $\mathbb{P}$ が Poisson 点過程で半径 ρ が優臨界ならば, 優臨界サイトパーコレーションと比較する事ができる. 優臨界サイトパーコレーションは volume regularity を満たす事が知られている ([3]) ので, 今の設定で連続パーコレーションも満たす事がわかる.

Assumption 3.1 (4) は境界に関する幾何的な条件であり, 境界の影響を上手く処理するために必要な仮定になる.

Assumption 3.1 (7) は問題を考える上で必要な仮定である. なお, $a=1/2I_d$ とすれば, このとき Dirichlet 形式は正則になり, 対応する Hunt 過程は反射壁ブラウン運動になり熱核も存在する事が知られている.

Assumption 3.1(5)(6) は Chiarini ら ([8]) の先行研究を参考にした. この仮定は Moser's iteration を用いて放物型 Harnack 不等式を示すために必要になる. なお, 放物型 Harnack 不等式は重要な熱核評価のために用いられる.

Assumption 3.1 (8) は確率過程のレベルでは均一化が生じているという仮定である.

この仮定の下, 以下の定理を得る事に成功した.

Theorem 3.3 (Local central limit theorem)**.** Assumption 3.1 を仮定する. $R>0$ とし, $I\subset(0,\infty)$ を有界開区間とする. この時, ほとんど全ての $\omega\in\widehat{\Omega}$ と $o\in W(\omega)$ に対して

$$\lim_{\varepsilon\to0}\sup_{|x-o|<R}\sup_{t\in I}\left|\varepsilon^{-d}p^\omega_{t/\varepsilon^2}(o,s^\omega(x/\varepsilon))-\widehat{\mathbb{E}}[\Lambda]^{-1}k_t^\Sigma(x)\right|=0$$

が成り立つ.

4 今後の展望

今後の展望として, 以下の点が挙げられる.

- volume regularity に関して, 直感的には定常エルゴード的ならば, 点配置はよく混ざっているので, 無限クラスターが存在するほど十分点がばら撒かれていれば空間の広がりも d 次元になってると考えられる. しかし, Poisson 点過程以外ではこれに関してはわかっていない. 一般の stationary ergodic な点過程に関して volume regularity を満たす条件を与える事が課題の一つである.

- 同様にして, isoperimetric condition に関しても一般の定常エルゴード的な点過程に関してはよくわかっていない. この条件を調べるための良い条件を与える事が今後の課題になる.

- 確率過程に関する均一化である quenched invariance principle についてだが, Assumption 3.1 の (1) から (7) を仮定すれば成り立つと考えている.(従って本研究の仮定は Assumption 3.1 の (1) から (7) までで良くなる.) 連続パーコレーション上の反射壁ブラウン運動に関してさえ, 現在知られているのは quenched よりも弱い annealed の結果のみである ([17],[18],[19]). なお, 離散の場合はまず 2000 年代にボンドパーコレーション上のランダムウォークに対する quenched invariance principle が証明された ([4],[15]). それを皮切りに, より一般的なランダムコンダクタンスモデルの場合にまで quenched invariance principle の証明がなされた ([5],[1],[2]). 特に, Deushcel([9]) らが定常エルゴード的な場合に媒質にある種の可積分性と幾何的な条件を課すだけでその上のランダムウォークが quenched invariance principle を満たす事を示している. 最近では離散的な場合に関しては長距離相関を持つモデルや媒質にダイナミクスを入れたモデルに関しての研究が行われている. 一方, 連続的な設定では通常の拡散過程の場合に多くの結果が知られている. 最近では Chiarini と Deuschel([7]) が退化した random environment 上の拡散過程に関して, かなり解析的な方法で証明をしている.

  境界の影響をどう扱えばよいかについては本研究である程度わかっているので, 通常の拡散過程の場合を参考に証明ができると考えられ, 今後の課題である.

参考文献

[1] S. Andres, M.T. Barlow, J.-D. Deuschel, B.M. Hambly, Invariance principle for the random conductance model. Probab. Theory Relat. Fields **156**, 535–580 (2013)

[2] S. Andres, J.-D. Deuschel, M. Slowik, Invariance principle for the random conductance model in a degenerate ergodic environment. Ann. Probab. **43**(4), 1866–1891 (2015)

[3] M.T. Barlow, Random walks on supercritical percolation clusters, Ann. Probab. **32**(4), 3024–3084(2004)

[4] N. Berger, M. Biskup, Quenched invariance principle for simple random walk on percolation clusters. Probab. Theory Relat. Fields **137**, 83–120 (2007)

[5] M.T. Barlow, J.-D. Deuschel, Invariance principle for the random conductance model with unbounded conductances. Ann. Probab. **38**, 234–276 (2010)

[6] M.T. Barlow, B.M. Hambly, Parabolic Harnack inequality and local limit theorem for percolation clusters. Electron. J. Probab. **14**, 1–27(2009)

[7] A. Charini and J.-D. Deushel, Invariance Principle for symmetric Diffusions in a degenerate and unbounded stationary and ergodic Random Medium, Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques, **52**, 1535–1563(2016)

[8] A. Charini and J.-D. Deushel, Local central limit theorem for Diffusions in a degenerate and unbounded Medium, Electron J. Probab., **112**(2015) 1–30.

[9] J.-D. Deushel, T.-A. Nguyen, M. Slowik, Quenched invariance principles for the random conductance model on a random graph with degenerate ergodic weights, Probab. Theory Relat. Fields. **170**, 363-386(2018)

[10] A. Fannjiang, T. Komorowski, A martingale approach to homogenization of unbounded random flows, Ann. of Probab. **25**, 1872–1894(1997)

[11] M. Fukushima, Y. Oshima, M. Takeda, Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes. De Gruyter studies in mathematics. W. de Gruyter, 1994

[12] S. Ghosh, M.Krishnapur, Y. Peres, Continuum Percolation for Gaussian zeroes and Ginibre eigenvalues, Ann. Probab. **44**(5)(2016)

[13] R. Meester, R. Roy, *Continuum percolation*, (Cambride University Press, New York, 1996)

[14] C. Kipnis, S.R.S. Varadhan, Central limit theorem for additive functionals of reversible Markov processes and applications to simple exclusions. Commun. Math. Phys. **104**, 1–19(1986)

[15] P. Mathieu, A. Piatnitski, Quenched invariance principles for random walks on percolation clusters. Proc. R. Soc. A **463**, 2287–2307 (2007)

[16] H. Osada, Homogenization of diffusion processes with random stationary coefficients. Prob. Theory and Math. Statistics **1021**, 507–517(1983)

[17] H. Osada, Homogenization of reflecting barrier Brownian motions. In *Asymptotic Problems in Probability Theory : Stochastic Models and Diffusions on Fractals : Proceedings of the Taniguchi International Symposium, Sanda and Kyoto, 1990* Pitman Research notes in Math. Longman, **283** 59–74(1993)

[18] H. Osada and T. Saitoh, An invariance principle for non-symmetric Markov processes and reflecting diffusions in random domains. Probab. Theory Relat Fields **101**, 45–63(1995)

[19] H. Tanemura, Homogenization of a reflecting barrier Brownian motion in a continuum percolation cluster in $\mathbb{R}^d$, Kodai Math. J. **17**, 228–245(1994)