定常ポリマー模型に対するKPZ普遍性

東京大学大学院数理科学研究科　林晃平 *
Kohei Hayashi
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

1　導入

Kardar-Parisi-Zhang（KPZ）方程式は，$t \in \mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ を時間変数，$x \in \mathbb{R}$ を空間変数とするとき，$h = h(t, x)$ を未知関数とする次の確率偏微分方程式である．

$$\partial_t h = \nu \partial_x^2 h + \lambda (\partial_x h)^2 + \sqrt{D} \dot{W}(t, x). \tag{1.1}$$

ここで，$\nu, D > 0$ 及び $\lambda \in \mathbb{R}$ は定数，$\dot{W}(t, x)$ は $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ 上の時空ホワイトノイズである．関数 $h = h(t, x)$ が KPZ 方程式 (1.1) の解であるとき，$u = \partial_x h$ は確率 Burgers 方程式

$$\partial_t u = \nu \partial_x^2 u + \lambda \partial_x u^2 + \sqrt{D} \partial_x \dot{W}(t, x)$$

を満たすことがわかる．KPZ 方程式は，[9] で導入され，多くのモデルに対して界面挙動のランダムな時間発展が方程式 (1.1) により記述されることが確かめられてきた．さらに，界面の時間発展を記述するモデルのうち，あるクラスに対しては，モデルの詳細によらず時間発展が普遍的に方程式 (1.1) により記述されると考えられている．ここでは，このような方程式としての普遍性を **KPZ 普遍性**と呼ぶことにする．このような普遍性の背後にある数学的な構造を探究することは重要な研究課題であるが，そこではまず方程式 (1.1) の適切性（well-posedness）が問題となる．実際，KPZ 方程式 (1.1) の解 h は十分な正則性を持たず，空間微分 $\partial_x h$ は超関数に値を取ると考えられるべきである．すると，方程式 (1.1) の非線形項 $(\partial_x h)^2$ において超関数の積を考えることになり，通常の意味では解を定義することができない．そこで，なんらかの繰り込みを行い解を適切に定義する必要がある．このような数学的困難は，Hairer 氏により初めて解決され [6]，それ以降，同氏による正則性構造理論 [7] や Gubinelli，Imkeller，Perkowski の三氏によるパラコントロール解析 [4] を中心とする特異確率偏微分方程式の適切性を証明するための一般論へと発展した．これらのアプローチは，関数空間上の固定点問題（fixed point problem）としての定式化

*kohei@ms.u-tokyo.ac.jp

に基づき，これは確率微分方程式を pathwise に解く（即ち，確率空間の元を一つ固定するごとに決定論的な常微分方程式を解くことに帰着させる）ことを可能にしたラフパス（rough path）理論の一般化である．一方，KPZ 方程式をミクロ系に対する中心極限定理として導出するという観点では，関数空間上の分布として解を定義するマルチンゲール問題としての定式化が求められる．このような確率論的アプローチとしては，Gonçalves, Jara の両氏が [3] において定常解に対して定式化を行い解の存在を示したのち，[5] で解の一意性が証明された．このようなマルチンゲール問題として定義される定常解は**定常エネルギー解**と呼ばれ，ミクロ系から数学的に導出する際に中心的な役割を果たす．本稿では，有向ポリマー模型と呼ばれるモデルを扱い，特に定常性が成り立つような場合の KPZ 普遍性について検討する．第 2 章においてモデルの一般的な定式化及び問題意識を述べ，第 3 章において O'Connell-Yor モデルと呼ばれる semi-discrete（時間に関しては連続で空間に関して離散的）な定常ポリマー模型に対して KPZ 普遍性が成り立つという先行研究の結果を紹介する．最後に，第 4 章において，fully discrete（空間，時間ともに離散的）かつ定常なポリマー模型を考え，時間変数に対して適切にスケーリングを行うと O'Connell-Yor モデルに収束し，更に KPZ 普遍性が成り立つという結果を主結果として報告する．

2　ポリマー模型の定義と問題意識

次に，本稿で考える有向ポリマー模型（あるいは単にポリマー模型）の定義を述べる．ポリマー（重合体），はモノマー（単量体）とよばれる高分子の集まりどうしが互いに結合することで形成される．いま，空間一様な媒質中に多数のモノマーがあり，それらが互いに連鎖的に反応することで一方向に成長するポリマーがある状況を考える．反応はランダムに起こるとすると，空間上を成長するポリマーの軌跡として一本の道が見える．このとき実現されうる道の集合を Π とおき（位相はモデルごとに適切に定める），Π 上に定まるポリマーの軌道（道）の分布を $\mathbf{P}(d\pi)$ とおく．このとき，実際に形成されるポリマーの軌道は，標本空間 Π の元 π が分布 $\mathbf{P}$ のもとで一つ選ばれるごとに実現されるものと思うことができる．一方，媒質が一様でなく，モノマーどうしの結合のしやすさが場所によって異なるような場合を考える．このような状況を表現するため，ある確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を定め，Ω の元 ω を**ランダム環境**と呼ぶ．また，逆温度と呼ばれるパラメータ $\beta > 0$ を固定する．このとき，ランダム環境 $\omega \in \Omega$ ごとに，道の空間 Π 上の確率分布 Q_β^ω を

$$Q_\beta^\omega(d\pi) = \frac{1}{Z_\beta^\omega} \exp(\beta H^\omega(\pi))\mathbf{P}(d\pi), \quad Z_\beta^\omega = \int_\Pi \exp(\beta H^\omega(\pi))\mathbf{P}(d\pi)$$

により定める．ここで，H^ω は ω ごとに定まる適当なウェイトである．上の設定のもとで，ランダム環境 $\omega \in \Omega$ は媒質の不均一さを表現していて，ω ごとに定まる確率測度 Q_β^ω が実際に観測されるポリマーの成長に伴い現われる道の分布である．このように表現される不均一な媒質におけるポリマーの成長過程に対して，通常の均質な媒質中では見られない disorder な挙動を見るというのが，基本的な問題意識である．更に重要な点として，規格

化定数 Z_β^ω は**分配関数**と呼ばれており，対数分配関数 $\log Z_\beta^\omega$ に対して KPZ 普遍性が成り立つと予想されている．このような予想に基づき，本研究では道の空間とランダム環境を与えるごとに定まる様々なポリマー模型において，対数分配関数に対して適切にスケーリングを行い，KPZ 方程式（または確率 Burgers 方程式）を導出するという問題を考える．

3　先行研究：O'Connell-Yor モデルに対する KPZ 普遍性

ここでは，[10] で導入された O'Connell-Yor モデルに対して KPZ 普遍性が成り立つという先行研究 [8] の結果を紹介する．まずモデルを定義する．パラメータ $t \geq 0$ 及び $n \in \mathbb{N}$ を固定するとき，ポリマーの軌道は，右連続かつ左極限を持つ関数 $x : [0,t] \to \mathbb{N}$ であって，$x(0) = 1$ 及び $x(t) = n$ を満たすものとする．また，ランダム環境として独立な $\mathbb{R}$ 上の 1 次元標準 Brown 運動 $B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots, B^{(n)}$ を考える．各 Brown 運動 $B^{(j)} = \{B^{(j)}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ に対し，$B^{(j)}(s,t) = B^{(j)}(t) - B^{(j)}(s)$ と書くことにする．このときの分配関数は

$$\mathcal{Z}_\beta(t,n) = \int_{0<s_1<\cdots<s_{n-1}<t} \exp \beta\big[B^{(1)}(0,s_1) + B^{(2)}(s_1,s_2) + \cdots + B^{(n)}(s_{n-1},t)\big] ds_{1,n-1}$$

となる．ここで，$ds_{1,n-1} = ds_1 \cdots ds_{n-1}$ とおいた．定数 $\beta \in (0,\infty)$ は逆温度である．ここでは定常な状況を考えるため，別のパラメータ $\theta \in (0,\infty)$ 及び $B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots, B^{(n)}$ と独立な別の 1 次元標準 Brown 運動 $B^{(0)}$ を用いて

$$\mathcal{Z}_{\beta,\theta}(t,n) = \int_{-\infty<t_0<\cdots<t_{n-1}<t} \exp\big[\beta B(0,t_0) + \theta t_0 + \beta\{B^{(1)}(t_0,t_1) + \cdots + B^{(n)}(t_{n-1},t)\}\big] dt_{0,n-1}$$

を考えることにする．また，$n = 0$ に対して $\mathcal{Z}_{\beta,\theta}(t,0) = \exp[\beta B(t) + \theta t]$ と定義し，$u_{\beta,\theta}(t,j) = \log \mathcal{Z}_{\beta,\theta}(t,j) - \log \mathcal{Z}_{\beta,\theta}(t,j-1)$ とおく．このとき，次の意味で定常性が成り立つことが知られている．

命題 3.1 ([10])**.** 各 $t \geq 0$ に対し，確率変数の列 $\{u_{\beta,\theta}(t,j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ は $e^{-u_{\beta,\theta}(t,j)} \sim \beta^2 Gamma(\beta^{-2}\theta, 1)$ を満たす独立同分布列となる．ここで，パラメータ $s > 0$ に対し $Gamma(s,1)$ は確率密度関数 $\Gamma(s)^{-1} x^{s-1} e^{-x} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$ を持つ $\mathbb{R}$ 上の確率分布である．

このような定常性が成り立つ O'Connell-Yor モデルの分配関数に対するスケール極限を考える．定数 $n \in \mathbb{N}$ をスケールパラメータとし，定数 $a > 0$ を用いて $\beta = an^{-1/4}$ かつ $\theta = 1 + a/(2\sqrt{n})$ とおく．このようにパラメータ β 及び θ を選ぶとき，$u^n = u_{\beta,\theta}$ と書くことにする．更に，実数列 $\{a_n\}_n$ であって，$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ かつ $\lim_{n\to\infty} a_n/\sqrt{n} = 0$ を満たすものを任意に固定し，揺動場過程 $\mathcal{X}^n = \{\mathcal{X}_t^n : t \in [0,T]\} \in C([0,T], \mathcal{S}'(\mathbb{R}))$ を，

$$\mathcal{X}_t^n(\varphi) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \big(u^n(tn,j) - \rho_n\big)\varphi((j - nt - a_n\sqrt{n})/\sqrt{n}), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

により定める．ここで，ρ_n は $u^n(t,j)$ の期待値であり，命題 3.1 の定常性より t と j に依らない．このとき，次が成り立つ．

定理 3.2 ([8]). 上で定義される確率過程の族 $\{\mathcal{X}^n_\cdot\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $C([0,T],\mathcal{S}'(\mathbb{R}))$ 上分布収束し，極限 u は次の確率 *Burgers* 方程式の定常エネルギー解である．

$$\partial_t u = \frac{1}{2}\partial_x^2 u - \frac{1}{2}\partial_x u^2 + \frac{3}{5}a^2\partial_x u + a\partial_x \dot{W}(t,x).$$

4　主結果

まず問題設定を行い，次に主結果を述べる．$\mathbb{Z}^2_+$ 上のボンドの集合を $(\mathbb{Z}^2_+)^* = \{\{x,y\} : x,y \in \mathbb{Z}^2_+, x \le y, |x-y| = 1\}$ とする．ここで，ベクトルの大小関係は成分ごとに考えるものとする．$x \le y$ を満たすような 2 点 $x,y \in \mathbb{Z}^2_+$ に対し，x から y への 右上がりの道 π は，$z_0 = x$ かつ $z_{|x-y|} = y$ を満たす点の集合 $\{z_0,...,z_{|x-y|}\}$ であって，$\alpha_1 = (1,0)$, $\alpha_2 = (0,1)$ として，各 $i = 0,...,|x-y|-1$ に対し $z_{i+1} - z_i = \alpha_1$ または α_2 となるようなものとする．あるいは，道が通る辺 $e_i = \{z_{i-1}, z_i\}$ を順に並べて，$\pi = \{e_1,...,e_{|x-y|}\}$ と表現することもできる．以下では，通る辺による特徴づけを用いることにし，x_1 から x_2 に至る右上がりの道全体の集合を Π_{x_1,x_2} とおく．一方，ランダム環境を表す確率変数の族を $\{\omega(e) : e \in (\mathbb{Z}^2_+)^*\}$ とし，あとで定常性が成り立つように分布を定める．これらの設定の下で，$x_1 \le x_2$ であるような 2 点 $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^2_+$ に対する分配関数 $Z(x_1,x_2)$ は，

$$Z(x_1,x_2) = \sum_{\pi\in\Pi_{x_1,x_2}} \prod_{i=1,...,|x_2-x_1|} \exp\big(\omega(e_i)\big)$$

で定義される．次に，定常性の定義と，それが成り立つようなランダム環境 $\{\omega(e) : e \in \mathbb{Z}^2_+)^2\}$ の分布について述べる．各点 $x \in \mathbb{N}^2$ に対し，$\omega_1(x) = \omega(\{x-\alpha_1, x\})$ 及び $\omega_2(x) = \omega(\{x-\alpha_2, x\})$ をそれぞれ水平方向及び垂直方向のランダムウェイトとし，$u_x = e^{\omega_1(x)}$ 及び $v_x = e^{\omega_2(x)}$ とおく．更に，$x = (i,j)$ に対し $\omega_1(x) = \omega_1(i,j), \omega_2(x) = \omega_2(i,j)$ と書く．以下，ある正値確率変数 Y_x および正値関数 h を用いて，正方格子内部のウェイトが $(u_x, v_x) = (Y_x, h(Y_x))$ と表され，確率変数族 $\{Y_x, x \in \mathbb{N}^2\}$ が独立同分布に従うと仮定する．更に，境界上で，水平方向のウェイト $\{e^{\omega_1(i,0)} : i \in \mathbb{N}\}$ と垂直方向のウェイト $\{e^{\omega_2(0,j)} : j \in \mathbb{N}\}$ はそれぞれ独立同分布に従い，それぞれの分布を R_1 及び R_2 を書くことにする．このとき，分配関数の比を $R_{1,x} = Z(x)/Z(x-\alpha_1)$ 及び $R_{2,x} = Z(x)/Z(x-\alpha_2)$ とおき，$(R_{1,x}, R_{2,x}) \stackrel{d}{=} (R_1, R_2)$ が任意の $x \in \mathbb{N}^2$ に対して成り立つとき，モデルは**定常**であるという．

- **Inverse-gamma (IG)**: このモデルは log-gamma 模型とも呼ばれる．条件 $\mu > \theta > 0$ かつ $\nu > 0$ を仮定し，

$$R_1^{-1} \sim Gamma(\mu-\theta,\nu), \quad R_2^{-1} \sim Gamma(\theta,\nu), \quad Y^{-1} \sim Gamma(\mu,\nu)$$

  と定める．このとき，$h(y) = y$ として定常性が成り立つ（[11] を参照）．

- **Gamma (G)**: このモデルはstrict-weak模型とも呼ばれる．条件 $\mu, \theta, \nu > 0$ を仮定し，

$$R_1 \sim Gamma(\mu+\theta,\nu), \quad R_2^{-1} \sim Beta(\theta,\mu), \quad Y \sim Gamma(\mu,\nu)$$

  と定める．このとき，$h(y)=1$ として定常性が成り立つ（[2] を参照）．

- **Beta (B)**: 条件 $\mu, \theta, \nu > 0$ を仮定し，

$$R_1 \sim Beta(\mu+\theta,\nu), \quad R_2^{-1} \sim Beta(\theta,\mu), \quad Y \sim Beta(\mu,\nu)$$

  と定める．このとき，$h(y)=1-y$ として定常性が成り立つ（[1] を参照）．

- **Inverse-beta (IB)**: 条件 $\mu > \theta > 0$, $\nu > 0$ を仮定し，

$$\begin{aligned}&R_1^{-1} \sim Beta(\mu-\theta,\nu), \quad (R_2+1)^{-1} \sim Beta(\theta,\beta+\mu-\theta),\\ &Y^{-1} \sim Beta(\mu,\nu)\end{aligned}$$

  と定める．このとき，$h(y)=y-1$ として定常性が成り立つ（[12] を参照）．

それぞれのモデルの呼び方は，バルク Y の分布に由来し，4つのモデルは *four basic beta-gamma models* と総称される．各モデルは3つのパラメータ μ, θ 及び ν を持つので，上のようにランダム環境のウェイトを定めるとき，$i,j \in \mathbb{Z}_+$ に対して，分配関数を $Z_{\mu,\theta,\nu}(i,j)$ とパラメータを明記して書くことにする．

次に主結果を述べる．空間 $D([0,T],\mathcal{S}'(\mathbb{R}))$ を，超関数に値をとる右連続かつ左極限をもつ過程の集合とし，位相としてSkorohod位相を与える．このとき，上記の離散ポリマーモデルは，時間方向に対して適切にスケーリングを行うとO'Connell-Yorモデルに縮退することがわかる．

定理 4.1. 自然数 m,n に対し，$Z_{\mu,\theta,\nu}(m,n)$ を，モデル ***(IG)***，***(G)***，***(B)*** または ***(IB)*** に対する分配関数とする．また，各モデルに対し，スケールされた分配関数 $\tilde{Z}_\theta(t,m,n)$ を

$$\begin{aligned}
&\tilde{Z}_\theta(t,m,n) = e^{-t/2} m^{\lfloor mt \rfloor -1} Z_{m,\theta,1}(\lfloor mt \rfloor, n) && \textit{for } \boldsymbol{(IG)},\\
&\tilde{Z}_\theta(t,m,n) = e^{t/2} m^{-\lfloor mt \rfloor -n-1} Z_{m,\theta,1}(\lfloor mt \rfloor, n) && \textit{for } \boldsymbol{(G)},\\
&\tilde{Z}_\theta(t,m,n) = e^{t/2} 2^{\lfloor 2mt \rfloor} m^{-n-1} Z_{m,\theta,m}(\lfloor 2mt \rfloor, n) && \textit{for } \boldsymbol{(B)},\\
&\tilde{Z}_\theta(t,m,n) = e^{-t/4} 2^{-\lfloor 2mt \rfloor +1} (2m)^{-n-1} Z_{m,\theta,m}(\lfloor 2mt \rfloor, n) && \textit{for } \boldsymbol{(IB)}
\end{aligned}$$

により定め，さらに任意の逆温度 $\beta > 0$ に対し $\tilde{Z}_{\beta,\theta}(t,m,n) = \beta^{-2n}\tilde{Z}_{\beta^{-2}\theta}(\beta^2 t,m,n)$ とする．このとき，各 $n \in \mathbb{N}$，$\beta > 0$，$\theta > 0$ に対し，m を無限大にするとき，確率過程 $\{\tilde{Z}_{\beta,\theta}(t,m,n) : t \in [0,T]\}_{m\in\mathbb{N}}$ は $\{\mathcal{Z}_{\beta,\theta}(t,n) : t \in [0,T]\}$ に $D([0,T],\mathbb{R})$ 上分布収束する．

次に，この結果と，O'Connell-Yorモデルに対する先行研究の結果を用いて，離散的な定常ポリマー模型に対してもやはりKPZ普遍性が成り立つという主結果を述べる．そのために，正定数 a を固定し，$\beta = an^{-1/4}$，$\theta = 1 + a/(2\sqrt{n})$ とする．このとき，モデル **(IG)** と

(G) に対しては $Z^{m,n}(t,j) = \beta^{-2j} Z_{m,\beta^{-2}\theta,1}(\lfloor m\beta^2 t\rfloor, j)$ と定め，一方モデル (B) と (IB) に対しては $Z^{m,n}(t,j) = \beta^{-2j} Z_{m,\beta^{-2}\theta,m}(\lfloor 2m\beta^2 t\rfloor, j)$ と定める．また，分配関数の対数微分にあたるものとして $U^{m,n} := \log\big(Z^{m,n}(nt,j)/Z^{m,n}(nt,j-1)\big)$ とおく．上のような分布の取り方のもとで成り立つ定常性により，各 $t \geq 0$ に対し確率変数族 $\{U^{m,n}(t,j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ は独立同分布に従うことがわかる．また，実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ かつ $\lim_{n\to\infty} a_n/\sqrt{n} = 0$ を満たすものとし，離散モデルに対する揺動場過程 $X^{m,n}_{\cdot} \in D([0,T], \mathcal{S}'(\mathbb{R}))$ を

$$X_t^{m,n}(\varphi) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \big(U^{m,n}(nt,j) - \rho_{m,n}\big)\varphi((j - nt - a_n\sqrt{n})/\sqrt{n}) \tag{4.1}$$

で定める．ここで $\rho_{m,n} = \mathbb{E}[U^{m,n}]$ である．このとき，次が成り立つ．

定理 4.2. $X_t^{m,n}$ を各モデル ***(IG)*，*(G)*，*(B)*** または ***(IB)*** に対して (4.1) で定めた揺動場過程とする．このとき，ある $\alpha_c > 0$ が存在して，$\alpha > \alpha_c$ を満たす任意の α に対して $m = \lfloor n^\alpha \rfloor$ とおき $X_t^n = X_t^{\lfloor n^\alpha\rfloor,n}$ と定義すると，$\{X_t^n : t \in [0,T]\}_{n\in\mathbb{N}}$ は確率 *Burgers* 方程式

$$\partial_t u = \frac{1}{2}\partial_x^2 u - \frac{1}{2}\partial_x u^2 + \frac{3}{5}a^2\partial_x u + a\partial_x \dot{W}(t,x)$$

の定常エネルギー解 $u = \{u_t : t \in [0,T]\}$ に $D([0,T], \mathcal{S}'(\mathbb{R}))$ 上分布収束する．

参考文献

[1] M. Balázs, F. Rassoul-Agha and T. Seppäläinen: *Large deviations and wandering exponent for random walk in a dynamic beta environment*, Ann. Probab. **47** (2019), no. 4, 2186-2229.

[2] I. Corwin, T. Seppäläinen and H. Shen: *The strict-weak lattice polymer*, I. Stat. Phys. **160** (2015), 1027-1053.

[3] P. Gonçalves and M. Jara: *Nonlinear fluctuations of weakly asymmetric interacting particle systems*, Arch. Ration. Mech. Anal. **12**, No. 2, (2014), 597-644.

[4] M. Gubinelli, P. Imkeller and N. Perkowski: *Paracontrolled distributions and singular PDEs*, Forum. Math. Pi **3** (2015), e6, 75.

[5] M. Gubinelli and N. Perkowski: *Energy solutions of KPZ are unique*, J. Amer. Math. Soc. **31**, No. 2 (2018), 427-271.

[6] M. Hairer: *Solving the KPZ equation*, Ann. of Math. (2) **178**, No. 2 (2013), 559-664.

[7] M. Hairer: *A theory of regularity structures*, Invent. Math. **198**, No. 2 (2014), 269-504.

[8] M. Jara and G. Moreno Flores: *Stationary directed polymers and energy solutions of the Burgers equation*, To appear in Stoch. Proc. Appl. **130**, Issue 10 (2020), 5973-5998.

[9] M. Kardar, M.Parisi and Y-C. Zhang: *Dynamic scaling of growing interfaces*, Phys. Rev. Lett. **56**, No. 9 (1986), 889892.

[10] N. O'Connell and M. Yor: *Brownian analogue of Burke's theorem*, Stochastic Process. Appl. **96** (2001), 285-304.

[11] T. Seppäläinen: *Scaling for a one-dimensional directed polymer with boundary conditions*, Ann. of Probab. **40** (2012), 19-73.

[12] T, Theiry: *Stationary measures for two dual families of finite and zero temperature models of directed polymers on the square lattice*, J. Stat. Phys. **165** (2016), no. 1, 44-85.