パラコントロール解析による
ラフボラティリティモデルへのアプローチ

江口雅尚 (大阪大学基礎工学研究科)
深澤正彰 (大阪大学基礎工学研究科)

1 はじめに

数理ファイナンスの分野において, [9] によってラフボラティリティモデルと呼ばれる種類のモデルが提案され, 金融時系列データと整合的であることが確認されている. 典型的なラフボラティリティモデルにおいて, 原資産価格 $\{S_t\}$ は次のように表される.

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 \exp\left(\int_0^t F(W_s^H)\,\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t F(W_s^H)^2\,\mathrm{d}s\right), \\ W_t^H &= \frac{1}{\Gamma(H+1/2)}\int_0^t |t-s|^{H-1/2}\,\mathrm{d}W_s. \end{aligned} \tag{1.1}$$

ここで, F は十分なめらかな関数であり, $(W, \overline{W})$ は 2 次元標準 Brown 運動で, $B \coloneqq \rho W + \sqrt{1-\rho^2}\overline{W}, \rho \in (-1,1), H \in (0,1/2]$ である. W^H は Hurst 指数 H の Riemann-Liouville 型非整数 Brown 運動であり, H よりわずかに小さい Hölder 連続性を持つ. ボラティリティ $F(W^H)$ の正則性は W^H と同程度であり, $H \le 1/2$ であるからボラティリティが Brown 運動よりもラフであることがわかる. これが「ラフボラティリティ」と呼ばれる理由である.

[3, 6, 7] では, $t^{H-1/2}\log(S_t/S_0)$ の $t \to 0$ における大偏差原理 (LDP) についての研究がなされている.

定理 1.1. [3] $X_t = t^{H-1/2}\log(S_t/S_0)$ は $t \to 0$ において次の LDP をみたす. すなわち, Borel 集合 $A \subseteq \mathbf{R}$ に対し

$$-\inf_{y\in A^\circ} I(y) \le \liminf_{t\to 0} t^{2H}\log \mathbf{P}(X_t \in A) \le \limsup_{t\to 0} t^{2H}\log \mathbf{P}(X_t\in A) \le -\inf_{y\in\bar{A}} I(y).$$

ここで, A° と $\bar{A}$ はそれぞれ A の内部と閉包を表す. また, レート関数 $I(y)$ は以下で与えられる.

$$I(y) \coloneqq \inf_{h\in L^2[0,1]}\left\{\frac{1}{2}\|h\|_{L^2} + \frac{(y-\rho I_1(h))^2}{2I_2(h)}\right\}.$$

ただし, $I_1(h) \coloneqq \int_0^1 F(\hat{h}_t)h_t\,\mathrm{d}t, I_2(h) \coloneqq \int_0^1 F(\hat{h}_t)^2\,\mathrm{d}t, \hat{h}_t \coloneqq \sqrt{2H}\int_0^t |t-s|^{H-1/2}h_s\,\mathrm{d}s$ である.

定理 1.1 によりラフボラティリティモデルのオプション価格やボラティリティスキューの短時間挙動を記述することができ, この点で LDP を証明することには価値がある. (非整数)Brown 運動のスケール則より small time の極限が small noise の極限に帰着できることに注意すると, ラフパス的な観点から LDP に対して次のような見通しの良い証明が期待できる:

(i) S_t に対する Lyons の連続性定理を示し,
(ii) エンハンスされたノイズに対する LDP から縮小原理を通して $t^{H-1/2}\log(S_t/S_0)$ に対する LDP を示す.

実際に, [3] は正則性構造理論 (regularity structure) を用いて $t^{H-1/2}\log(S_t/S_0)$ に対する LDP を得た. [3] によって指摘されているように, 被制御パス, Gaussian ラフパスあるいは分枝ラフパスといったラフパスの一般論はラフボラティリティモデルに適用できないことに注意しておく.

本研究の目的は, 正則性構造理論と近しい理論であるパラコントロール解析の観点からより初等的な手法で S_t の連続性定理へアプローチすることである. ただし, ここで用いるパラコントロール解析は [10] で議論されるものを指す. 結果として $H > 1/4$ の場合には求める連続性定理を得ることができた. $H \leq 1/4$ の場合は本研究において完全な結果を得ることはできなかったが, [2, 12] などにおける高階パラコントロール解析の道具を [10] の設定で示すことで, 部分的な結果を得た.

2 $H > 1/4$ の場合

2.1 準備

本小節では, [10] に従ってパラコントロール解析の基本的な道具を準備する. まず, 以下の添字の集合を定義する.

$$\mathbf{I} \coloneqq \{(-1,0),(0,0)\} \cup \{(p,m) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z} \colon p \geq 0, 1 \leq m \leq 2^p\}.$$

$(p,m) \in \mathbf{I}$ および $i = 0,1,2$ に対し $t^i_{pm} \in [0,1]$ を定める. $p \geq 0, 1 \leq m \leq 2^p$ のときは

$$t^0_{pm} \coloneqq \frac{m-1}{2^p}, \qquad t^1_{pm} \coloneqq \frac{2m-1}{2^{p+1}}, \qquad t^2_{pm} \coloneqq \frac{m}{2^p}$$

とし, $t^0_{-10} = t^1_{-10} \coloneqq 0, t^2_{-10} \coloneqq 1$ および $t^0_{00} \coloneqq 0, t^1_{00} = t^2_{00} \coloneqq 1$ とする. 次に, $[0,1]$ 上実数値関数の族 $\{\chi_{pm}\}$ および $\{\varphi_{pm}\}$ を定義する. $p \geq 0, 1 \leq m \leq 2^p$ のときは

$$\chi_{pm}(t) \coloneqq 2^p \mathbf{1}_{[t^0_{pm}, t^1_{pm})}(t) - 2^p \mathbf{1}_{[t^1_{pm}, t^2_{pm})}(t),$$
$$\varphi_{pm}(t) \coloneqq \int_0^t \chi_{pm}(s)\,\mathrm{d}s = \begin{cases} 2^p(t - t^0_{pm}), & t \in [t^0_{pm}, t^1_{pm}) \text{ のとき;} \\ -2^p(t - t^2_{pm}), & t \in [t^1_{pm}, t^2_{pm}) \text{ のとき;} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

と定め, $\varphi_{-10} \coloneqq 1, \varphi_{00}(t) \coloneqq t, \chi_{00} \coloneqq 1$ とする. χ_{-10} は例外的に定義しないことに注意する. $(p,m) \in \mathbf{I} \setminus \{(-1,0)\}$ において $\{2^{-p/2}\chi_{pm}\}, \{2^{-p/2}\varphi_{pm}\}$ はそれぞれ Haar 関数系, Schauder 関数系となる.

$f\colon[0,1]\to\mathbf{R}^d$ に対し $f_{s,t}\coloneqq f(t)-f(s)$ とし,

$$f_{pm}\coloneqq\begin{cases}f(0), & (p,m)=(-1,0)\ \text{のとき};\\ f(1)-f(0), & (p,m)=(0,0)\ \text{のとき};\\ f_{t^0_{pm},t^1_{pm}}-f_{t^1_{pm},t^2_{pm}}, & \text{それ以外}\end{cases}$$

と定める．また, $p\geq -1$ に対し

$$\Delta_p f\coloneqq\sum_{m:(p,m)\in\mathbf{I}} f_{pm}\varphi_{pm},\qquad\qquad S_p f\coloneqq\sum_{q=-1}^{p}\Delta_q f.$$

と定める．

補題 2.1. [10, Lemma 2.1] $f\colon[0,1]\to\mathbf{R}^d$ とする．$p\geq 1$ のとき, $S_{p-1}f$ は f の $\mathbf{D}_p\coloneqq\{m2^{-p}\colon 0\leq m\leq 2^p\}$ における線形補間である．特に, f が連続であれば $S_p f$ は f に一様収束する．

補題 2.1 より, $f\in C([0,1];\mathbf{R}^d)$ に対し一様収束の意味で $\sum_{p=-1}^{\infty}\Delta_p f=f$ が成り立つ．これは Besov 空間論における Littlewood-Paley 分解の対応物である．この分解を用いて, 以下の関数空間を定義する．

定義 2.2. $\alpha>0$ と $f\in C([0,1];\mathbf{R}^d)$ に対し

$$\|f\|_\alpha\coloneqq\sup_{p\geq -1}2^{p\alpha}\|\Delta_p f\|_\infty\simeq\sup_{(p,m)\in\mathbf{I}}2^{p\alpha}|f_{pm}|$$

とおき,

$$\mathcal{C}^\alpha(\mathbf{R}^d)=\mathcal{C}^\alpha\coloneqq\{f\in C([0,1];\mathbf{R}^d)\colon\|f\|_\alpha<\infty\}$$

と定める．

$\|\cdot\|_\alpha$ は Besov ノルム $\|\cdot\|_{B^\alpha_{\infty\infty}}$ の対応物である．以下の命題 2.3 は Ciesielski の同型として知られている．

命題 2.3. $\alpha\in(0,1)$ とする．このとき, $f\in C([0,1];\mathbf{R}^d)$ について f が α-Hölder 連続であることと $f\in\mathcal{C}^\alpha(\mathbf{R}^d)$ であることは同値であり,

$$\|f\|_\alpha\simeq\|f\|_\infty+\sup_{s\neq t}\frac{|f_{s,t}|}{|t-s|^\alpha}.$$

特に, $\mathcal{C}^\alpha(\mathbf{R}^d)$ は Banach 空間である．

命題 2.4. [10, Lemma 3.3, Lemma 3.12, Lemma 3.13] 次の 3 つの有界双線形な演算が定義できる．

- Lévy area. $\alpha+\beta>1$ のときに限り, $L\colon\mathcal{C}^\alpha\times\mathcal{C}^\beta\to\mathcal{C}^{\alpha+\beta}$

$$L(v,w)\coloneqq\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=-1}^{p-1}\left\{\int_0^\cdot\Delta_p v\,\mathrm{d}\Delta_q w-\int_0^\cdot(\mathrm{d}\Delta_q v)\Delta_p w\right\}$$

- symmetric part. $S\colon \mathcal{C}^\alpha \times \mathcal{C}^\beta \to \mathcal{C}^{\alpha+\beta}$

$$S(v,w) \coloneqq \sum_{p=-1}^{\infty} \int_0^{\cdot} \Delta_p v \, \mathrm{d}\Delta_p w$$

- paraproduct. $\pi_<\colon \mathcal{C}^\alpha \times \mathcal{C}^\beta \to \mathcal{C}^\beta$

$$\begin{aligned}\pi_<(v,w) &\coloneqq \sum_{p=-1}^{\infty} \sum_{q=p+1}^{\infty} \left\{ \int_0^{\cdot} \Delta_p v \, \mathrm{d}\Delta_q w + \int_0^{\cdot} (\mathrm{d}\Delta_p v) \Delta_q w \right\} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} S_{p-1} v \Delta_p w\end{aligned}$$

$f \in \mathcal{C}^\alpha((\mathbf{R}^d)^* \otimes \mathbf{R}^n), v \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbf{R}^d)$ とする．$\alpha > 1/2$ のとき, Riemann 和 $\sum_i f_{t_i} v_{t_i,t_{i+1}}$ の極限は収束し Young 積分と呼ばれるが, Littlewood-Paley 分解と命題 2.4 を考えれば Young 積分は $I(f,\mathrm{d}v) = L(f,v) + S(f,v) + \pi_<(f,v)$ で復元できる．一方で $\alpha > 1/3$ の場合はどうであろうか．この場合, $L(S_N v, S_N v)$ が収束することを仮定すると, このとき, f が v にパラコントロールされるという仮設

$$f^\sharp \coloneqq f - \pi_<(f^v, v) \in \mathcal{C}^{2\alpha}((\mathbf{R}^d)^* \otimes \mathbf{R}^n), \qquad f^v \in \mathcal{C}^{2\alpha}((\mathbf{R}^d)^* \otimes (\mathbf{R}^d)^* \otimes \mathbf{R}^n)$$

のもとで $I(f,\mathrm{d}v) = \lim_{N\to\infty} I(S_N f, \mathrm{d}S_N v)$ の収束が示せる．実際, 交換子

$$C_L^{(N)}(f^v, v, v) \coloneqq L(S_N \pi_<(f^v, v), S_N v) - I(f^v, \mathrm{d}L(S_N v, S_N v))$$

が任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\mathcal{C}^{3\alpha-\varepsilon}(\mathbf{R}^n)$ の位相で収束するので,

$$\begin{aligned}I(S_N f, \mathrm{d}S_N v) &= S(S_N f, S_N v) + \pi_<(S_N f, S_N v) + L(S_N f^\sharp, S_N v) \\ &\quad + C_L^{(N)}(f^v, v, v) + I(f^v, \mathrm{d}L(S_N v, S_N v)))\end{aligned}$$

として $N \to \infty$ とすればよい．$I(f,\mathrm{d}v)$ は controlled path の積分に相当するものである．$F \in C_b^2(\mathbf{R}^d; ((\mathbf{R}^d)^* \otimes \mathbf{R}^n))$ に対し $f = F(v)$ となるとき, $F(v)$ は v にパラコントロールされる．$I(f,\mathrm{d}v)$ は折れ線近似の極限なので Stratonovich 型の積分であるが, 伊藤型の積分に関しても v の二次変分に関する仮定があれば同様の結果が成り立つ．この場合, 通常の controlled path と異なり修正 Riemann 和を考える必要はないことに注意する．

2.2　ラフボラティリティモデルへのアプローチ

式 (1.1) で表されるラフボラティリティモデルにおいて, $H > 1/4$ の場合を考える．任意の $\varepsilon > 0$ に対し確率 1 で $B \in \mathcal{C}^{1/2-\varepsilon}(\mathbf{R}), W^H \in \mathcal{C}^{H-\varepsilon}(\mathbf{R})$ が成り立つことが知られているが, $F(W^H)$ は $F(x) = x$ のときでさえ B にパラ制御されない．したがって, 前小節の内容を直接適用することはできない．しかし $F(W^H)$ は W^H にパラ制御される．この構造と伊藤積分 $\int W^H \, \mathrm{d}B$ の存在から, $\int F(W^H) \, \mathrm{d}B$ に対する連続性定理を示す．

離散化した二次変分および伊藤積分に関して, 以下の記号を定義する．

定義 2.5. $f \in C([0,1];(\mathbf{R}^d)^* \otimes \mathbf{R}^n), v \in C([0,1];\mathbf{R}^d)$ とする．$N \geq 0$ および $t \in [0,1]$ に対し

$$[f,v]_{N+1}(t) := \sum_{k=1}^{2^N} (f_{t\wedge t_{Nk}^2} - f_{t\wedge t_{Nk}^0})(v_{t\wedge t_{Nk}^2} - v_{t\wedge t_{Nk}^0}),$$
$$\int_0^t f_r \, \mathrm{d}^{(N)} v_r := \sum_{k=1}^{2^N} f_{t_{Nk}^0}(v_{t\wedge t_{Nk}^2} - v_{t\wedge t_{Nk}^0})$$

とおく．また,

$$\begin{aligned} I_N^{\mathrm{It\hat{o}},\sharp}(f,\mathrm{d}v) &:= I(S_N f, \mathrm{d}S_N v) - \frac{1}{2}[f,v]_{N+1} - \pi_<(S_N f, S_N v) \\ &= S(S_N f, S_N v) + L(S_N f, S_N v) - \frac{1}{2}[f,v]_{N+1} \end{aligned}$$

と定め，$I_N^{\mathrm{It\hat{o}},\sharp}(f,\mathrm{d}v)$ が一様収束するときその極限を $I^{\mathrm{It\hat{o}},\sharp}(f,\mathrm{d}v)$ と書く．

命題 2.6. $u \in \mathcal{C}^\alpha((\mathbf{R}^n)^* \otimes \mathbf{R}^m), v \in \mathcal{C}^\beta((\mathbf{R}^d)^* \otimes \mathbf{R}^n), w \in \mathcal{C}^\gamma(\mathbf{R}^d)$ とする．$\alpha+\beta+\gamma > 1, \alpha+\beta < 1, \beta+\gamma < 1$ のとき,

$$\begin{aligned} C_{I^{\mathrm{It\hat{o}},\sharp}}(u,v,w) &:= \lim_{N\to\infty} C_{I^{\mathrm{It\hat{o}},\sharp}}^{(N)}(u,v,w) \\ &:= \lim_{N\to\infty} \{I_N^{\mathrm{It\hat{o}},\sharp}(\pi_<(u,v),\mathrm{d}w) - I(u, I_N^{\mathrm{It\hat{o}},\sharp}(v,\mathrm{d}w))\} \end{aligned}$$

は一様収束して，$\|C_{I^{\mathrm{It\hat{o}},\sharp}}(u,v,w)\|_{\alpha+\beta+\gamma} \lesssim \|u\|_\alpha \|v\|_\beta \|w\|_\gamma$ が成り立つ．

定理 2.7. $\alpha+\beta < 1 < \alpha+2\beta$ とし，$v \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbf{R}^d), f \in \mathcal{C}^\beta((\mathbf{R}^d)^* \otimes \mathbf{R}^n)$ とする．$\int_0^\cdot f \, \mathrm{d}^{(N)} v$ が一様収束し,

$$\sup_{N\geq 0} \sup_{\substack{s,t\in\mathbf{D}_N \\ s<t}} \frac{\left|\int_s^t f_{s,r} \, \mathrm{d}^{(N)} v_r\right|}{|t-s|^{\alpha+\beta}} < \infty$$

であるとする．このとき，$I^{\mathrm{It\hat{o}},\sharp}(f,\mathrm{d}v) \in \mathcal{C}^{\alpha+\beta}(\mathbf{R}^n)$．また，$f$ にパラコントロールされる $g \in \mathcal{C}^\beta((\mathbf{R}^d)^* \otimes \mathbf{R}^n)$ に対し $\int_0^\cdot g \, \mathrm{d}^{(N)} v$ は一様収束し，極限 $I^{\mathrm{It\hat{o}}}(g,\mathrm{d}v)$ に関して以下の分解が成り立つ．

$$I^{\mathrm{It\hat{o}}}(g,\mathrm{d}v) = \pi_<(g,v) + C_{I^{\mathrm{It\hat{o}},\sharp}}(g^f,f,v) + I(g^f, \mathrm{d}I^{\mathrm{It\hat{o}},\sharp}(f,\mathrm{d}v)) + I^{\mathrm{It\hat{o}},\sharp}(g^\sharp,\mathrm{d}v).$$

特に，$I^{\mathrm{It\hat{o}}}(g,\mathrm{d}v)$ は v にパラコントロールされる．

$v = B, f = W^H$ が定理 2.7 の仮定をみたすことは，以下の定理 2.8 から従う．

定理 2.8. $X = \{X_t\}_{0\leq t\leq 1}$ を d 次元連続マルチンゲールとし，その二次変分を $[X]$ で表す．$Y = \{Y_t\}_{0\leq t\leq 1}$ を $(\mathbf{R}^d)^* \otimes \mathbf{R}^n$-値連続適合過程とする．$p > 2$ と $\alpha_0, \beta_0 \in (0,1)$ で $p\alpha_0, p\beta_0 > 1$ なるものが存在して，$s,t \in [0,1]$ に対して (一様に) 以下が成り立つことを仮定する．

$$\mathbf{E}|[X]_{s,t}|^{p/2} \lesssim |t-s|^{p\alpha_0}, \qquad \mathbf{E}\left(\sup_{s\leq r\leq t} |Y_{s,r}|^p\right) \lesssim |t-s|^{p\beta_0}$$

このとき, 任意の $0<\alpha<\alpha_0-1/p$ および $0<\beta<\beta_0-1/p$ に対して $\mathbf{E}\|X\|_\alpha^p+\mathbf{E}\|Y\|_\beta^p+\mathbf{E}|\mathbf{K}|^{p/2}<\infty$ が成り立つ. ただし,

$$\mathbf{K}\coloneqq\sup_{N\geq 0}\sup_{\substack{s,t\in\mathbf{D}_N\\ s<t}}\frac{\left|\int_s^t Y_{s,r}\,\mathrm{d}^{(N)}X_r\right|}{|t-s|^{\alpha+\beta}}.$$

定理 2.7 および定理 2.8 より, $F\in C_b^2(\mathbf{R};\mathbf{R})$ に対し S_t は確率 1 で $B,W^H,I^{\mathrm{It\hat{o}},\sharp}(W^H,\mathrm{d}B)$ および $F(W^H)$ に関して連続となる. さらに $F\in C_b^3(\mathbf{R};\mathbf{R})$ であれば $F(W^H)$ は W^H に関して局所 Lipschitz であることもわかるので, 結局 S_t は $(B,W^H,I^{\mathrm{It\hat{o}},\sharp}(W^H,\mathrm{d}B))$ に関して連続となる. $(B,W^H,I^{\mathrm{It\hat{o}},\sharp}(W^H,\mathrm{d}B))$ に関する LDP を示すことで, 定理 1.1 が示せると期待できる

3　$H\leq 1/4$ の場合

前節の定理 2.7 における仮定 $\alpha+2\beta>1$ をとり払うと, 3 重線形な交換子 (命題 2.6) は適用できなくなる. また, g に対しても $g=\pi_<(g^f,v)+f^\sharp$ というパラコントロール構造を仮定するだけでは不十分である. そのため, 2 節の内容をより正則性が低い場合へ拡張する必要がある.

3.1　高階パラコントロール解析

高階パラコントロール解析は [2] で導入され, [12] でも研究されている. いずれも本研究とは設定が異なるため, それぞれの評価に証明を与える必要がある. また, 本研究では任意階数の評価を得ることに成功した. [12] では同様に任意階数の結果を得ているが, その証明には正則性構造理論を用いている. 本研究では, 正則性構造理論を使うことなくこれらの評価を証明することができた.

必要な評価は以下の 3 つである:

- パラプロダクトに関する Taylor 展開
- 重複パラプロダクトの評価
- 重複交換子の評価

高次の Taylor 展開は [2, Section 2] でその形が与えられている.

定理 3.1. $0<\beta\leq\alpha<1/(n+1)$ とし, $v\in\mathcal{C}^\alpha(\mathbf{R}^d), F\in C_b^{n+\beta/\alpha}(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^n)$ とする.

$$F(v)^\sharp\coloneqq F(v)-\sum_{k=1}^n\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k}{j}\pi_<(\mathrm{D}^kF(v)v^{\otimes j},v^{\otimes(k-j)})$$

とおくと, $\|F(v)^\sharp\|_{n\alpha+\beta}\lesssim\|F\|_{C_b^{n+\beta/\alpha}}\|v\|_\alpha^{n+\beta/\alpha}$ が成り立つ. また, $0<\alpha<1/(n+1), F\in C_b^{n+2}(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^n)$ のとき, 写像 $\mathcal{C}^\alpha(\mathbf{R}^d)\ni v\mapsto F(v)^\sharp\in\mathcal{C}^{(n+1)\alpha}(\mathbf{R}^n)$ は局所 Lipschitz 連続となる. すなわち, $v,w\in\mathcal{C}^\alpha(\mathbf{R}^d)$ に対し

$$\|F(v)^\sharp-F(w)^\sharp\|_{(n+1)\alpha}\lesssim\|F\|_{C_b^{n+2}}\{1+\|v\|_\alpha+\|w\|_\alpha\}^{n+1}\|v-w\|_\alpha.$$

重複パラプロダクトに関する評価は, [12] で最初に示された.

定理 3.2. $i=1,\ldots,n$ に対し $f^{(i)}\in\mathcal{C}^{\alpha_i}$, $\alpha_i\in(0,1)$ とする. 再帰的に以下を定義する.

$$\begin{aligned}\pi_<(f^{(1)}) &\coloneqq f^{(1)},\\ \pi_<(f^{(1)},\ldots,f^{(n)}) &\coloneqq \pi_<(\pi_<(f^{(1)},\ldots,f^{(n-1)}),f^{(n)}).\end{aligned}$$

また, $s,t\in[0,1]$ に対し

$$\begin{aligned}\omega_<(f^{(1)})_{s,t} &\coloneqq f^{(1)}_{s,t},\\ \omega_<(f^{(1)},\ldots,f^{(n)})_{s,t} &\coloneqq \pi_<(f^{(1)},\ldots,f^{(n)})_{s,t}-\sum_{i=1}^{n-1}\pi_<(f^{(1)},\ldots,f^{(i)})_s\omega_<(f^{(i+1)},\ldots,f^{(n)})_{s,t}\end{aligned}$$

と定める. $\alpha_1+\cdots+\alpha_n<1$ ならば以下の評価が成り立つ.

$$|\omega_<(f^{(1)},\ldots,f^{(n)})_{s,t}|\lesssim|t-s|^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\|f^{(1)}\|_{\alpha_1}\cdots\|f^{(n)}\|_{\alpha_n},\quad s,t\in[0,1].$$

命題 2.6 における交換子は以下のように一般化できる. 高階の交換子は [2, 12, 13] で研究されている.

定理 3.3. $n\geq 4$ とし, $i=1,\ldots,n$ に対し $f^{(i)}\in\mathcal{C}^{\alpha_i}$, $\alpha_i\in(0,1)$ とする. 再帰的に以下を定義する.

$$\begin{aligned}C^{(N)}_{I^{\text{Itô},\sharp}}(f^{(1)},\ldots,f^{(n)}) \coloneqq\ & C^{(N)}_{I^{\text{Itô},\sharp}}(\pi_<(f^{(1)},f^{(2)}),f^{(3)},\ldots,f^{(n)})\\ &-I(f^{(1)},\mathrm{d}C^{(N)}_{I^{\text{Itô},\sharp}}(f^{(2)},\ldots,f^{(n)})).\end{aligned}$$

$\alpha_1+\cdots+\alpha_n>1, \alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}<1, \alpha_2+\cdots+\alpha_n<1$ を仮定する. このとき, $C^{(N)}_{I^{\text{Itô},\sharp}}(f^{(1)},\ldots,f^{(n)})$ は一様収束して, $\|C_{I^{\text{Itô},\sharp}}(f^{(1)},\ldots,f^{(n)})\|_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\lesssim\|f^{(1)}\|_{\alpha_1}\cdots\|f^{(n)}\|_{\alpha_n}$ が成り立つ.

3.2　ラフボラティリティモデルへのアプローチ

高階パラコントロール解析の道具を用いることで, 定理 2.7 の結果を任意の正則性に対して拡張する.

定義 3.4. $i=1,\ldots,n$ に対し $f^{(i)}\in\mathcal{C}^{\alpha_i}$, $\alpha_i\in(0,1)$ とする. また, $N\geq 1$ とする. $J_N(f^{(1)},f^{(2)})\coloneqq I^{\text{Itô},\sharp}_N(f^{(1)},\mathrm{d}f^{(2)})$ とし, 再帰的に以下を定義する.

$$J_N(f^{(1)},\ldots,f^{(n)})\coloneqq J_N(\pi_<(f^{(1)},f^{(2)}),f^{(3)},\ldots,f^{(n)})-\pi_<(f^{(1)},J_N(f^{(2)},\ldots,f^{(n)})).$$

$J_N(f^{(1)},\ldots,f^{(n)})$ に一様収束極限が存在すればそれを $J(f^{(1)},\ldots,f^{(n)})$ と書く.

定理 3.5. $\alpha,\beta>0$ は $\alpha+\beta<1$ をみたすとし, $v\in\mathcal{C}^{\alpha}, f\in\mathcal{C}^{\beta}$ とする. $\alpha+n\beta<1<\alpha+(n+1)\beta$ なる整数 $n\geq 1$ をとる.

$$\mathcal{W}_n\coloneqq\{(i_n\cdots i_k)\colon 1\leq k\leq n, 1\leq i_l\leq l\,(k\leq l\leq n)\}$$

とおく．任意の $(i_n \cdots i_k) \in \mathcal{W}_n$ に対し $\int_0^t \omega_<(f^{\otimes i_k}, \ldots, f^{\otimes i_n})_{0,r} \, \mathrm{d}^{(N)} v_r$ は t に関して一様に収束し，

$$\sup_{N \geq 0} \sup_{\substack{s,t \in \mathbf{D}_N \\ s<t}} \frac{\left| \int_s^t \omega_<(f^{\otimes i_k}, \ldots, f^{\otimes i_n})_{s,r} \, \mathrm{d}^{(N)} v_r \right|}{|t-s|^{\alpha+(n-k+1)\beta}} < \infty$$

であることを仮定する．このとき，任意の $(i_n \cdots i_k) \in \mathcal{W}_n$ と $\varepsilon > 0$ に対し $J_N(f^{\otimes i_k}, \ldots, f^{\otimes i_n}, v)$ は $\mathcal{C}^{\alpha+(n-k+1)\beta-\varepsilon}$ の位相で収束し，$J(f^{\otimes i_k}, \ldots, f^{\otimes i_n}, v) \in \mathcal{C}^{\alpha+(n-k+1)\beta}$.

定理 3.6. 定理 3.5 と同じ仮定をおく．$\gamma \in (0, \beta]$ は $1 < \alpha + n\beta + \gamma$ をみたすとする．$g \in \mathcal{C}^\beta$ に対し以下を仮定する．すなわち，$g_{i_n \cdots i_k} \in \mathcal{C}^\beta, g^\sharp_{i_n \cdots i_k} \in \mathcal{C}^{(k-1)\beta+\gamma}$ $((i_n \cdots i_k) \in \mathcal{W}_n)$ および $g^\sharp \in \mathcal{C}^{n\beta+\gamma}$ が存在して，

$$\begin{aligned}
g &= \sum_{1 \leq i_n \leq n} \pi_<(g_{i_n}, f^{\otimes i_n}) + g^\sharp, \\
g_{i_n \cdots i_k} &= \sum_{1 \leq i_{k-1} \leq k-1} \pi_<(g_{i_n \cdots i_{k-1}}, f^{\otimes i_{k-1}}) + g^\sharp_{i_n \cdots i_k}, \qquad && (i_n \cdots i_k) \in \mathcal{W}_n, 2 \leq k \leq n, \\
g_{i_n \cdots i_1} &= g^\sharp_{i_n \cdots i_1}, && (i_n \cdots i_1) \in \mathcal{W}_n
\end{aligned}$$

と表せるものとする．このとき，$\int_0^\cdot g \, \mathrm{d}^{(N)} v$ は $N \to \infty$ で一様収束し，極限 $I^{\mathrm{It\hat{o}}}(g, \mathrm{d}v)$ に関して以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}
I^{\mathrm{It\hat{o}}}(g, \mathrm{d}v) = \pi_<(g, v) + \sum_{k=1}^n \sum_{(i_n \cdots i_k) \in \mathcal{W}} \Big\{ &\pi_<(g_{i_n \cdots i_k}, J(f^{\otimes i_k}, \ldots, f^{\otimes i_n}, v)) \\
&+ L(g^\sharp_{i_n \cdots i_k}, J(f^{\otimes i_k}, \ldots, f^{\otimes i_n}, v)) + S(g^\sharp_{i_n \cdots i_k}, J(f^{\otimes i_k}, \ldots, f^{\otimes i_n}, v)) \\
&+ \sum_{l=k}^{n-1} C_{I^{\mathrm{It\hat{o}},\sharp}}(g^\sharp_{i_n \cdots i_k}, f^{\otimes i_k}, \ldots, f^{\otimes i_l}, J(f^{\otimes i_{l+1}}, \ldots, f^{\otimes i_n}, v)) \\
&+ C_{I^{\mathrm{It\hat{o}},\sharp}}(g^\sharp_{i_n \cdots i_k}, f^{\otimes i_k}, \ldots, f^{\otimes i_n}, v) \Big\} + I^\sharp(g^\sharp, v).
\end{aligned}$$

$F \in C_0^{n+1}$ のとき，$g = F(f)$ は定理 3.6 の仮定をみたす．実際，g に対して定理 3.1 を適用して n 次まで展開し，それぞれの係数 g_i に対してさらに定理 3.1 を適用して $n-1$ 次まで展開する，などと繰り返せばよい．さらに $F \in C_0^{n+2}$ であれば，定理 3.1 の後半の主張より剰余項 $g^\sharp$ および $g^\sharp_{i_n \cdots i_k}$ は f に関して局所 Lipschitz 連続となり，$I^{\mathrm{It\hat{o}}}(g, \mathrm{d}v)$ は $v, f^{\otimes i}, J(f^{\otimes i_k}, \ldots, f^{\otimes i_n}, v)$ に関して連続となる．

3.3 今後の課題

定理 2.8 を拡張し，ラフボラティリティモデルが定理 3.5 および 2.7 の仮定をみたすことを示すのは今後の課題である．Y が適合過程であっても，$n = 1$ の場合を除いて $t \mapsto \omega_<(Y^{\otimes j_1}, \ldots, Y^{\otimes j_n})_{s,t}$ は適合にはならない．したがって，X がマルチンゲールであっても $\int_s^t \omega_<(Y^{\otimes j_1}, \ldots, Y^{\otimes j_n})_{s,r} \, \mathrm{d}X_r$ は伊藤積分として定義することはできない．しかし，ラフボラティリティモデルに対しては，Malliavin 解析を用いることで積分 $\int_s^t \omega_<((W^H)^{j_1}, \ldots, (W^H)^{j_k})_{s,r} \, \mathrm{d}B_r$ が定義できる可能性がある．

参考文献

[1] H. Bahouri, J. Y. Chemin. R. Danchin, *Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations*, Springer, (2011)

[2] I. Bailleul, F. Bernicot, *High order paracontrolled calculus*, Forum of Mathematics, Sigma, Vol. 7, e44 (2019).

[3] C. Bayer, P. K. Friz, P. Gassiat, J. Martin, and B. Stemper, *A regularity structure for rough volatility*, Wiley Online Library, 30(4), 782-832 (2020).

[4] C. Bayer, P. K. Friz and J. Gatheral, *Pricing under rough volatility*, Quantitative Finance, 16(6), 887-904 (2016)

[5] F. Biagini, Y. Hu, B. Oksendal, and T. Zhang, *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications*, Springer (2006)

[6] M. Forde, H. Zhang, *Asymptotics for rough stochastic volatility models*, SIAM J. FInan. Math., 8(1), 114-145 (2017).

[7] P. K. Friz, P. Gassiat, and P. Pigato, *Short dated smile under Rough Volatility: asymptotics and numerics*, arXiv:2009.08814 (2020).

[8] P. K. Friz, and M. Hairer, *A Course on Rough Paths - With an Introduction to Regularity Structures*, Springer (2014).

[9] J. Gatheral, T. Jaisson, and M. Rosenbaum, *Volatility is rough*, Quantitative Finance, 18(6), 933-949(2018)

[10] M. Gubinelli, P. Imkeller, and N. Perkowski, *A Fourier analytic approach to pathwise stochastic integration*, Electron. J. Probab. 21 (2016).

[11] M. Gubinelli, P. Imkeller, and N. Perkowski, *Paracontrolled distributions and singular PDEs*, Forum of Mathematics, Pi. Vol. 3. Cambridge University Press (2015).

[12] M. Hoshino, *Commutator estimates from a viewpoint of regularity structures*, arXiv:1903.00623 (2019).

[13] M. Hoshino, *Iterated paraproducts and iterated commutator estimates in Besov spaces*, arXiv:2001.07414 (2020).

[14] I. Karatzas and S. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer (1998).

[15] D. Nualart, *The Malliavin Calculus and Related Topics*, Second Edition, Springer (2006).

[16] D. Nualart, and E. Nualart, *Introduction to Malliavin Calculus*, Cambridge (2018).

[17] G. D. Nunno, B. Oksendal, and F. Proske, *Malliavin Calculus for Lévy Processes with Applications to Finance*, Springer (2009)

[18] 澤野嘉宏, ベゾフ空間論, 日本評論社 (2011).