

$SL(2, \mathbb{C})$ のエルミート行列の集合の可視化

東海大学・理学部 前田 陽一

Yoichi Maeda, School of Science, Tokai University

1 はじめに

本研究では、位相群 $SL(2, \mathbb{C})$ のエルミート行列の集合がなす双曲的構造が可視化できることを紹介する. $SL(2, \mathbb{C})$ は、複素3次元多様体、すなわち、実6次元多様体である. また、 $SL(2, \mathbb{C})$ は、正定値エルミート行列と $SU(2)$ の元で極分解される. 正定値エルミート行列の集合は、3次元双曲空間と同相であり、 $SU(2)$ は、3次元球面と同相である ([1] p.7, p.49). 本研究では、正定値エルミート行列の集合を、3次元双曲空間のモデルである、ポアンカレ単位球モデルで具体的に実現することを試みる. 本研究で可視化に用いるソフトウェアは、GeoGebra である.

1.1 $SL(2, \mathbb{R})$ の可視化

$SL(2, \mathbb{C})$ の可視化に先立って、 $SL(2, \mathbb{R})$ の可視化について説明しておく. $SL(2, \mathbb{R})$ は、3次元球面に埋め込むことができ、それを立体射影で3次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 に展開できる ([3], [5]). 具体的には、写像 $\pi_0 : SL(2, \mathbb{R}) \setminus \{-I_2\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (x, y, z) = \frac{(a-d, b+c, -b+c)}{a+d+2} \quad (1)$$

で定義する (ただし、 I_2 は単位行列であり、 $-I_2$ は写像 π_0 で無限遠点に写される). この

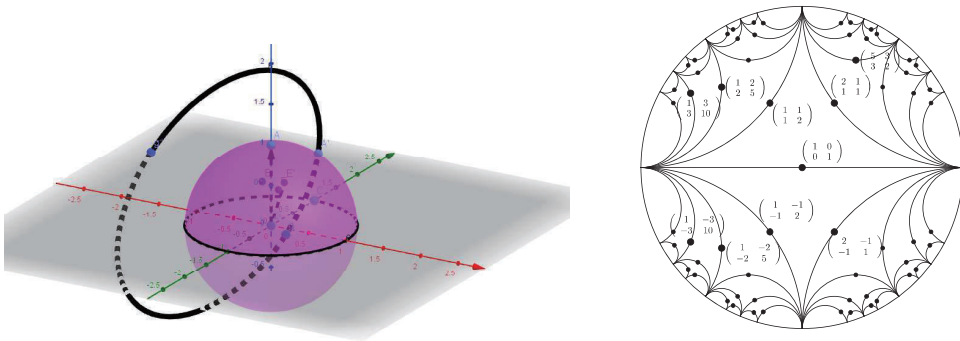


図 1: $SL(2, \mathbb{R})$ の可視化 (左) と、対称行列が形作る双曲的パターン (右)

可視化において、正定値対称行列の集合は、 xy 平面上の単位円盤に対応する. このこと

は, $SL(2, \mathbb{R})$ の定義 ($ad - bc = 1$), 対称行列 ($b = c$), かつ, 正定値 ($a + d > 0$) という条件下で,

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{(a-d)^2 + (2b)^2 + 0^2}{(a+d+2)^2} = \frac{(a+d)^2 - 4}{(a+d+2)^2} = \frac{a+d-2}{a+d+2} < 1,$$

であることから導かれる. 図1(左)は, 単位円盤上にある正定値対称行列を一つ取り, 回転行列 $SO(2)$ をかけたときにできる軌道を表している. この軌道はユークリッド円, もう少し詳しく言うと, 単位球面 (トレースの値が0の集合) の対心点を通過するユークリッド円となっている. この S^1 軌道は, 3次元球面 S^3 内の Hopf 束と対応している. 一方, 図1(右)は, xy 平面上の単位円盤において, 成分がすべて整数である $SL(2, \mathbb{Z})$ の元をプロットしたものである. この図により, 正定値対称行列の集合には双曲的位相が入ることが自然であることが見て取れる.

このような可視化を $SL(2, \mathbb{C})$ に拡張しようというのが本研究の内容である. 図1(右)には, わかりやすいように双曲的パターンの線対称の軸となる測地線が描いてある. この双曲的パターンを見やすくする方法には, ホロサイクルを用いる方法もある. $SL(2, \mathbb{Z})$ の元が2つのホロサイクルの接点として現れていることがわかる. 図2, 図3を比較していただきたい. このように2次元のパターンを表現するにはどちらでもよいのであるが, 3次元の場合は, 図3の方法で描く方がよいことを次節で説明する.

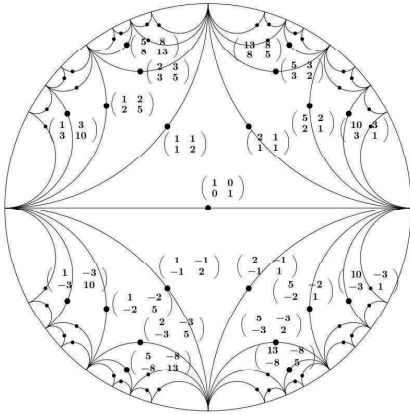


図 2: 線対称の軸を描いた図

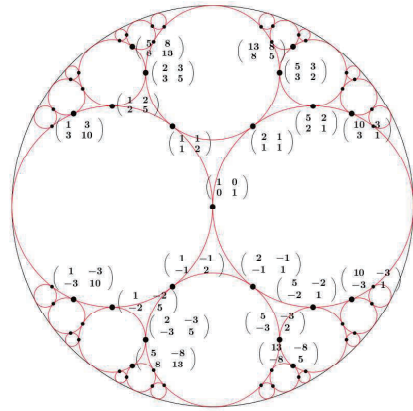


図 3: ホロサイクルを意識した図

1.2 $SL(2, \mathbb{C})$ の正定値エルミート行列の可視化

$SL(2, \mathbb{C})$ の正定値エルミート行列の集合 H_2^+ を

$$H_2^+ := \left\{ H = \begin{pmatrix} a & b - ci \\ b + ci & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}) \mid a, b, c \in \mathbb{R}, a + d > 0 \right\}$$

とする. 正定値エルミート行列の集合 H_2^+ に対して, 次のような写像 $\pi_1: H_2^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ を考える.

$$\begin{pmatrix} a & b-ci \\ b+ci & d \end{pmatrix} \mapsto (x, y, z) = \frac{(a-d, 2b, 2c)}{a+d+2}. \quad (2)$$

式 (2) を正定値対称行列に制限すると, 式 (1) に一致することに注意する. すなわち, xy 平面上では, 図2で見た双曲的パターンが現れるということである. 写像 π_1 の値域は, 単位球の内部 B^3 となる. 実際, 行列式 $ad - b^2 - c^2 = 1$ と正定値 $a + d > 0$ という条件より,

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{(a-d)^2 + 4b^2 + 4c^2}{(a+d+2)^2} = \frac{(a+d)^2 - 4}{(a+d+2)^2} = \frac{a+d-2}{a+d+2} < 1,$$

であることから導かれる.

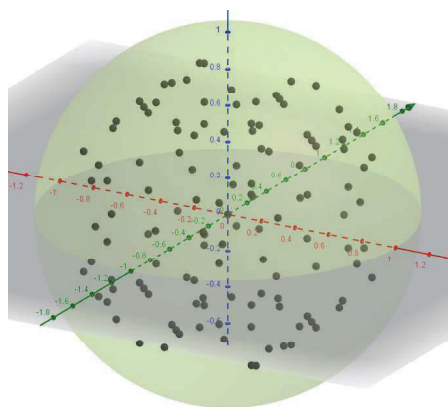


図 4: $SL(2, \mathbb{Z}[i])$ が形成するパターン

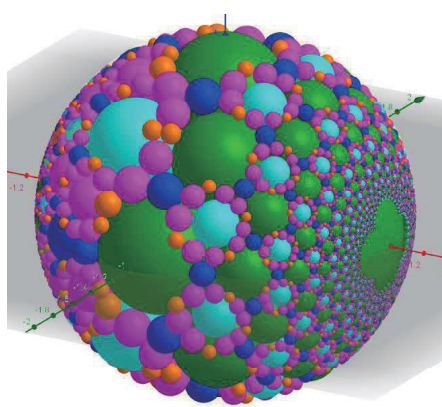


図 5: ホロ球面による可視化

図4は, H_2^+ の $SL(2, \mathbb{Z}[i])$ の元を点としてプロットしたものである. 一方, 図5は, 2つのホロ球面の接点として $SL(2, \mathbb{Z}[i])$ の元が表現されている. この図ならば, 双曲的パターンを見て取ることができる. 次の章で, 図5の作成方法を見ていく.

2 ホロ球面による双曲パターンの描画

2.1 ポアンカレ単位球モデル

式 (2) を逆に解くと, (x, y, z) から (a, b, c, d) が次のように得られる.

$$\begin{pmatrix} a & b-ci \\ b+ci & d \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - (x^2 + y^2 + z^2)} \begin{pmatrix} (x+1)^2 + y^2 + z^2 & 2y - 2zi \\ 2y + 2zi & (x-1)^2 + y^2 + z^2 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

図6は, 単位行列 I_2 の最寄りにある8つの行列 (ガウス整数を成分に持つ行列) をホロ球面の接点として描いたものである. 以下, 中心 (x_0, y_0, z_0) , 半径 r_0 の球面を $\text{Sphere}((x_0, y_0, z_0), r_0)$

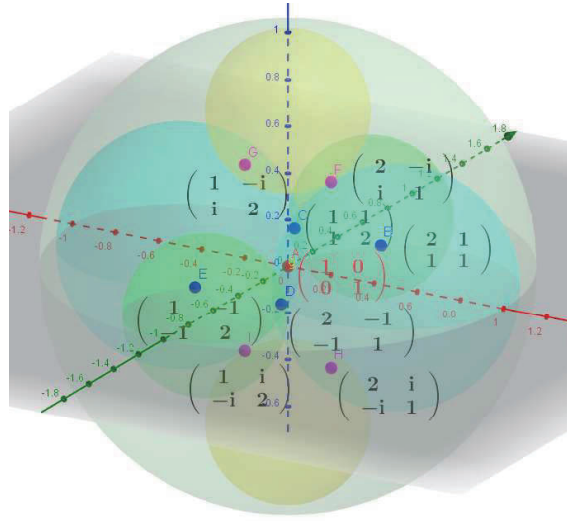


図 6: ポアンカレ単位球内の行列とホロ球面

と略して書くことにする. 式 (3) より, 行列の成分が満たす条件に対応するホロ球面が次のように得られる.

$$\begin{cases} a = 1 & \iff \text{Sphere}((-1/2, 0, 0), 1/2), \\ d = 1 & \iff \text{Sphere}(+1/2, 0, 0), 1/2), \\ a + d \pm 2b = 1 & \iff \text{Sphere}((0, \pm 2/3, 0), 1/3), \\ a + d \pm 2c = 1 & \iff \text{Sphere}((0, 0, \pm 2/3), 1/3). \end{cases}$$

例えば, 原点にある I_2 は, 2つのホロ球面 $\text{Sphere}((-1/2, 0, 0), 1/2)$, $\text{Sphere}(+1/2, 0, 0), 1/2)$ の接点に位置している. 図 6 に描かれている他の 8つの行列も, 上記の 6つのホロ球面の接点に位置している. 実は, 図 5 を描くには, 上半空間モデルを考えるほうが良い. そのことを次節で見ていこう.

2.2 上半空間モデル

上半空間 $H^3 = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid w > 0\}$ に対して, 次の写像 $\pi_2: H_2^+ \rightarrow H^3$ を考える.

$$\begin{pmatrix} a & b - ci \\ b + ci & d \end{pmatrix} \mapsto (u, v, w) = \frac{(b, c, 1)}{d}. \quad (4)$$

式 (4) を逆に解くと,

$$\begin{pmatrix} a & b - ci \\ b + ci & d \end{pmatrix} = \frac{1}{w} \begin{pmatrix} u^2 + v^2 + w^2 & u - vi \\ u + vi & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

であり, $(x, y, z) \in B^3$ と $(u, v, w) \in H^3$ との関係は,

$$(u, v, w) = \frac{(2y, 2z, 1 - (x^2 + y^2 + z^2))}{(x-1)^2 + y^2 + z^2}, \quad (x, y, z) = \frac{(u^2 + v^2 + w^2 - 1, 2u, 2v)}{u^2 + v^2 + (w+1)^2}, \quad (6)$$

となる. 上半空間 H^3 において, H_2^+ の $SL(2, \mathbb{Z}[i])$ のなす双曲パターンは, 次の3つの変換によって生成される.

$$\begin{cases} f(u, v, w) = (u+1, v, w), \\ g(u, v, w) = (u, v+1, w), \\ h(u, v, w) = \frac{1}{u^2 + v^2 + w^2}(-u, -v, w). \end{cases} \quad (7)$$

これらの変換は, 拡張された複素平面 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ に作用するピカル群 $PSL(2, \mathbb{Z}[i])$ のポアンカレ拡張に対応している ([7], [8] p.161), すなわち, $z = u + iv \in \mathbb{C}$ として,

$$f_{\mathbb{C}}(z) = z + 1, \quad g_{\mathbb{C}}(z) = z + i, \quad h_{\mathbb{C}}(z) = -1/z.$$

式(7)の f は u 方向の +1 シフト, g は v 方向の +1 シフトである. h は単位球面に関する反転と w 軸に関する半回転の合成変換である. これらの変換を用いて, ホロ球面による可視化が可能になる.

2.3 上半空間モデルでのホロ球面の階層

式(4)より, 上半空間 H^3 において, 単位行列 I_2 は, $(0, 0, 1)$ に位置している. この点は, $a = 1$ に対応するホロ球面 $\text{Sphere}((0, 0, 1/2), 1/2)$ と $d = 1$ に対応する $w = 1$ ユークリッド平面 (無限遠点で接するホロ球面) との接点である. $SL(2, \mathbb{Z}[i])$ のなす双曲パターンは, このホロ球面を初期図形として, u, v 方向の1シフトと, 単位球面に関する反転を合成することによって得られる. 図7は, ユークリッド球面の大きさで色分けをしたホロ球面である. $(u, v) = (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$ を頂点とする正方形領域で考えて, u, v 方向に平行移動すればよいので, 一部だけ描いている. ホロ球面 $\text{Sphere}((m, n, 1/2), 1/2)$ ($m, n \in \mathbb{Z}$) を, 半径が $1/2$ で最も大きいので, レベル1のホロ球面と呼ぶことにする. 図7の左の正方形内にある点は, uv 平面とホロ球面との接点である. 例えば点 $L_2 = (1/2, 1/2)$ は, レベル1のホロ球面 $\text{Sphere}((1, 1, 1/2), 1/2)$ を単位球面に関して反転したレベル2のホロ球面 $\text{Sphere}((1/2, 1/2, 1/4), 1/4)$ の, uv 平面との接点である. ホロ球面 $\text{Sphere}((s, t, r), r)$ の, 単位球面に関する反転は

$$\text{Sphere} \left(\left(\frac{s}{s^2 + t^2}, \frac{t}{s^2 + t^2}, \frac{r}{s^2 + t^2} \right), \frac{r}{s^2 + t^2} \right)$$

で得られる. レベル4までのホロ球面は, 以下の通りである.

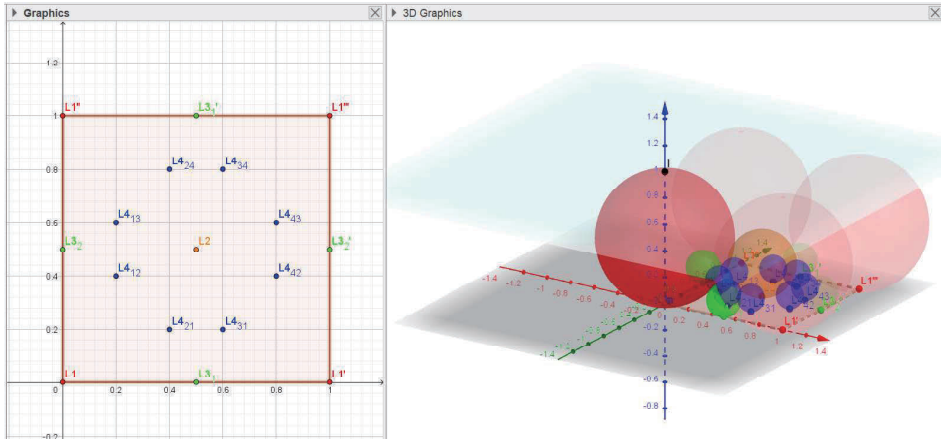


図 7: 上半空間モデルでのレベル 4 までの基本球面群

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{レベル 1: } (s, t, r) = (m, n, 1/2), \\ \text{レベル 2: } (s, t, r) = (m + 1/2, n + 1/2, 1/4), \\ \text{レベル 3: } (s, t, r) = (m + 1/2, n, 1/8), (m, n + 1/2, 1/8), \\ \text{レベル 4: } (s, t, r) = (m + k/5, n + l/5, 1/10), \\ \text{ただし, } (k, l) = (2, 1), (3, 1), (4, 2), (4, 3), (3, 4), (2, 4), (1, 3), (1, 2). \end{array} \right.$$

以上で, 上半空間 H^3 においてレベル 4 までのホロ球面が記述できた. あとは, これらをポアンカレ単位球モデル B^3 に変換できれば, 作図方法が完結する.

2.4 ポアンカレ単位球モデルへの変換と GeoGebra での作図方法

上半空間 H^3 でのホロ球面 $\text{Sphere}((s, t, r), r)$ は, 単位球 B^3 での次の球面

$$\text{Sphere} \left(\left(\frac{s^2 + t^2 - 1}{1 + s^2 + t^2 + 2r}, \frac{2s}{1 + s^2 + t^2 + 2r}, \frac{2t}{1 + s^2 + t^2 + 2r} \right), \frac{2r}{1 + s^2 + t^2 + 2r} \right) \quad (8)$$

に対応している. この変換式は, 式 (6) から得られる.

以下では, GeoGebra の入力例を紹介する. 例えば, 上半空間モデル H^3 において, 中心が $(s, t, r) = (2/5, 1/5, 1/10)$, 半径 $1/10$ の球面を u 方向, v 方向にシフトしたレベル 4 のホロ球面を B^3 内に描くには, 式 (8) に従って次のように入力するとよい (図 8).

レベル 4, $(s, t, r) = (2/5, 1/5, 1/10)$ の球面群の作図コマンド

```
Sequence(
  Sequence(
    Sphere(
      (
        (m + 2/5)^2 + (n + 1/5)^2 - 1,
        2 * (m + 2/5),
        2 * (n + 1/5)
      )
      / (1 + (m + 2/5)^2 + (n + 1/5)^2 + 2/10),
      2/10 / (1 + (m + 2/5)^2 + (n + 1/5)^2 + 2/10)
    ),
    m, -6, 5),
  n, -6, 5)
```

Sequence コマンドは、それぞれ m, n に関する繰り返しである。Sphere コマンドは、球面の中心の x, y, z 座標と、半径を指定して描かれる。なお、 x, y, z 座標の分母が共通しているのでまとめている。また、図 9 を描くには、前節の 4 つのレベルの球面について描き、さらに、中心の x 座標の符号をマイナスにしたものを描くことによって、対称性のある図が完成する。

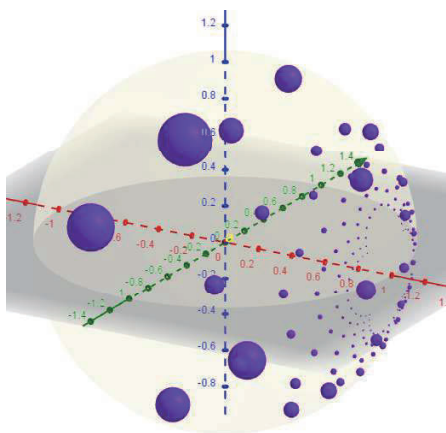


図 8: $(s, t, r) = (2/5, 1/5, 1/10)$ の球面群

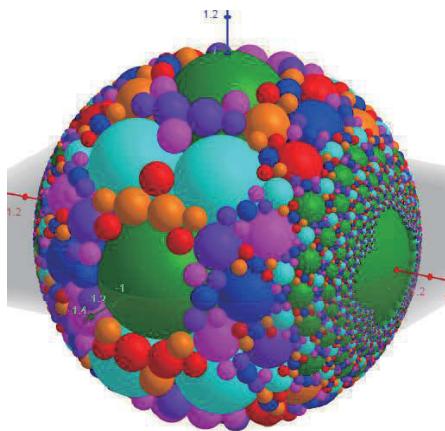


図 9: レベル 4 までの球面群

3 まとめ

本研究では、位相群 $SL(2, \mathbb{C})$ のエルミート行列の集合がなす双曲的構造が可視化できることを紹介した。3次元双曲パターンを可視化するには、ホロ球面を用いるのが有効である。 $SL(2, \mathbb{R})$ は、正定値対称行列と $SO(2)$ で極分解される。位相的には、 $SL(2, \mathbb{R}) \simeq H^2 \times S^1$ である。同様に、 $SL(2, \mathbb{C})$ は、正定値エルミート行列と $SU(2)$ で極分解される。位相的に

は, $SL(2, \mathbb{C}) \simeq H^3 \times S^3$ である. これらの極分解とその可視化により, 行列群としての群構造の可視化が, 今後の課題として期待される.

参考文献

- [1] 久保田富雄:『数論論説　メタプレクティック理論と幾何学的相互法則』. 牧野書店. 1999.
- [2] 前田陽一:「動的幾何学ソフトウェアによる実特殊線形変換群 $SL(2, \mathbb{R})$ の3次元モデル」, 数理解析研究所講究録 **1951**, (2015), 49–53.
- [3] Maeda, Y.: *Active Learning with Dynamic Geometry Software*. ICCSA 2017, Part IV, LNCS **10407**, (2017), 228–239.
- [4] 前田陽一:「実特殊線形変換群 $SL(2, \mathbb{R})$ の3次元モデルと部分群の可視化」, 数理解析研究所講究録 **2067**, (2018), 74–84.
- [5] Maeda, Y.: *Embedding of Real Special Linear Group $SL(2, \mathbb{R})$ into the Three-dimensional Sphere and a Hyperbolic Pattern of Symmetric Matrices of $SL(2, \mathbb{Z})$* . Proceedings of the Sixth TKU-KMITL Joint Symposium on Mathematics and Applied Mathematics (MAM2018), (2018), 71–76. http://data.sm.u-tokai.ac.jp/mam2018/wp-content/uploads/2018/06/Proceeding_MAM2018.pdf
- [6] 前田陽一:「実特殊線形変換群 $SL(2, \mathbb{R})$ の3次元球面への埋め込みと, $SL(2, \mathbb{Z})$ の対称行列が形作る双曲的パターン」, 数理解析研究所講究録 **2105**, (2019), 174–180.
- [7] Pollicott, M.: *The Picard group, closed geodesics, and zeta functions*. Trans. Amer. Math. Soc. vol.344, No.2, (1994), 857–872.
- [8] 谷口雅彦, 奥村善英:『双曲幾何学への招待—複素数で視る—』, 培風館, 1996.