創造性育成を目指す数学学習

生涯学習数学研究所　渡辺信
Shin Watanabe
Life Long Education on Mathematics Research Institute Japan

1. はじめに

現在われわれの身の回りは新しい Technology に満ち溢れている．会社では机の上には必ずパソコンがあり，常にパソコンに向き合って仕事をしている．この仕事ではパソコンを通して隣の人々とつながっている．Society5.0 という言葉が当然のごとくに使われているときに，我々の仕事である教育現場にはこの新しい Technology の波は押し寄せてこない．なぜであろうかという疑問も聞こえてこない．学校現場は古き良き時代の教育がそのまま行われている．この現実に気がついていても改善しようとする声が教育現場にないのは不思議である．

教育に Technology を使うことはこのコロナ禍で Online 学習として急に注目されるようになった．大学では Online 授業が中心になり，今までは見向きもしなかった教育方法が取り入れられた．この Online 教育は海外ではすでに盛んにおこなわれている．アメリカの大学では早くから海外の教育市場をもとめて，Online での教育を配信している．この中に日本が飲み込まれなかったのは日本語という壁があったといえよう．英語圏ではアメリカに行かなくても大学・大学院の卒業資格が取れる．しかし，このような教育方法をわが国では取り入れる試みはほとんど見られなかった．予備校がサテライト方式で多くの教室をつないでいるが外からは見えない．

コロナ禍になる以前，高校生にパソコンを持たせる計画が 2018 年問題として掲げられ，すぐにでも新しい機器導入による教育がなされるのではないかと思われたが，いつの間にか消えた．また産業通産省が中心になって「未来の教室 Edu Tec」が提案され，教育方法が定まらないままに STEM 教育を取り入れようとした．おそらく日本の現状社会でははかなく消えるであろう．そして今，GIGA スクールとして今度は小学生にパソコンを一人一台持たせることを考えている．このパソコンの使い方はコロナ禍における Online 教育であり，通信手段に使われようとしている．プログラミング授業が始まったにもかかわらず機器がない紙の上だけのプログラミングなど考えられない．

もう一つ問題なのは，このコロナ禍で用いているソフトはすべてカタカナである．Zoom が使われているときに日本時間ではなくアメリカ時間がかかれている．世界が相手であり日本という狭い範囲ではないかもしれない．しかし，日本が使うソフトは海外で開発されたものであって日本ではその出来上がったものを利用するだけである．日本の後進国性が現れている．今回使う GeoGebra も日本で開発されたものではない．開発されていないということは，日本が遅れていることであり，日本には Technology を使う土壌がないということであろう．

このような日本の現状の中で数学教育に Technology 導入を試みる．この Technology 導入を考えるにあたって，Technology 活用の有用性を問うとともに，数学教育における創造性豊かな数学活動を行うために Technology を補助として役立てることを考える．

2. Technology 活用の以前の教育と今後

数学ソフトがなかった時代，計算処理は筆算に頼らざるを得ない．計算をすることはつまらないことではなく，楽しい作業でもあった．計算を自ら行う習慣は Technology を使う必要性もなかったといえよう．数学の評価は技能 Skill ができるかが問われ，試験問題には必ず計算問題が出題されているのは現在も変わらない．数学教育の多くの時間を割いて計算ドリルがいまだに行われている．Technology はどのように数学教育を変えるか比較したい．

表 1．与えられた問題から新しい規則を発見できる可能性

Technology 活用以前	Technology 活用（TI89 使用）
与えられた問題（k は 1 から n まで） $\Sigma 1=n$ $\Sigma k=n(n+1)/2$ $\Sigma k^2=n(n+1)(2n+1)/6$ を既知として Σk^3 の公式を求めよ （数学授業 1 時間分） 解答 $\Sigma k^3=\{n(n+1)/2\}^2$ (計算結果の重視で数学的な展開はない)	$\Sigma 1=n$ $\Sigma k=n(n+1)/2$ $\Sigma k^2=n(n+1)(2n+1)/6$ $\Sigma k^3=\{n(n+1)/2\}^2$ 使いたい公式 Σk^p を求めることができる 仮説・定理を発見することができる (1)　$n\neq 1$ のとき $n(n+1)$は因数となる (2)　n が偶数のとき$(2n+1)$が因数 Σk^m を展開したときに， (3)最高位の係数は $1/(m+1)$ (4)次の係数はすべて 1/2

計算をすることが重要であったが，計算結果だけであれば即座に求めることができる．計算結果をどのように使うのかが問われる．このときに機械の中でどのような計算がなされているかを知ることができないことが気になるかもしれない．Technology を使わない以前の方法では，計算途中で発見することがあるかもしれないし，計算過程での工夫を重視したいのかもしれない．この計算を行って苦労した経験を伝えることが数学教育と思っている可能性もある．

次の例は因数分解についてであり，Technology 活用以前は楽しい経験をした問題である．

表 2．因数分解の問題の変化

Technology 活用以前	Technology 活用（TI89 使用）
次の因数分解をしなさい　x^5+x+1 教室では因数定理より 1 次因数はない 因数分解できるなら $x^5+x+1=(x^2+ax\pm1)(x^3+bx^2+cx\pm1)$ 恒等式から a,b,c を求める (より面白い工夫がある) $x^5+x+1=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$	Factor(x^5+x+1)　　$(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$ 新しい問題 x^m+x^n+1 のとき因数(x^2+x+1)を持つ m,n の組を求める 結果(m,n) (4,2) (7,2) (7,5) (10,2) (10,5) (10,8)・・・ (2,1) (5,1) (5,4) (8,1) (8,4) (8,7)・・・

因数分解の問題では工夫することによってできた経験は忘れられない．その楽しさを伝える数学教育であったならば Technology 活用の可能性はない．現在の数学教育の目標を変える必要がある．昔学んだこと，考えたことに執着するために，数学教育が保守的になっている傾向がみられる．

3. Technology 活用の有用性

(1)問題解決における数学の視覚化における Technology 活用の有用性

与えられた問題を解くための訓練をする数学教育において，何を考えているのかを知らない可能性がある．2 次方程式の解を求める問題であるならば，はじめから公式に数値を代入すれな良い．その結果，$3x^2-4x+1=0$ でも公式を用いる．また，$4x^2-3=0$ はあえて公式に代入することだけを考えるために間違える難しい問題になっている．

ここでは判別式を用いることによって解ける例を考える．

表 3．判別式によって簡単に求まる問題

問題 : 2 次関数 $y = ax^2+4x+a$ が x 軸に接するときの a の値を求めなさい．

解法は簡単で判別式を利用する．

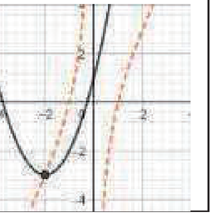
2 次方程式 $ax^2+4x+a=0$ が重解になればよい

$D=4-a^2=0$

$a=\pm 2$

関数の頂点の動きを見ることによって, 頂点がどこにある時を求めればよいかが分かる．

また 2 次関数がどのような形をしているかも見える．



値を求めるだけを問題にするのではなく，数学の動きを見ることができることは興味深い．特に関数の問題では「動き」が重要であり，グラフを描くことが関数の問題のように見られるが．グラフを描いて何が分かるのかを考えることによって数学の世界が広がる．グラフを描くことが目的ではなく，そのグラフから見えてくることが関数では重要なのではないだろうか．現在ではグラフを描くことが目的でありそのために増減表を作るが，Technology によって書かれたグラフを見ながら増減表を作るのかもしれない．考える順序が逆になっている．

(2) 数学問題発見のための Technology 活用の有用性

数学の授業では問題は与えられ，その与えられた問題を解くことが数学教育の重要な課題になっている．ここでは Technology によって問題発見をすることが可能性について例を挙げる．与えられた問題は必ず解けるようになっているために，現在の数学教育では解けない問題を出してはいけないことが暗黙の了解事項になっている．しかし，数学では整然とした規則の発見や，発見に至る過程で見つかる問題がある．この問題に対して答えを得るまで至らなくてもよい．自らが新しい問題を発見することは重要な数学である．この発見に至る過程での Technology の役割を考えたい．例としてフィボナッチ数列を扱う．

表 4．フィボナッチ数列の下一桁の数の規則の発見

東海大学オリンピックの問題

フィボナッチ数列の下一桁の数のサイクル数 (初めに与える数 1 が 2 個)を求めなさい．

解法は順に作ることしか考えられない

Technology は使わないので簡単な計算の繰り返しが求められている

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,・・・から

1,1,2,3,5,8,3,1,4,5,・・・で再び 1,1 になるまで計算をする

結果は

一桁目の数字が作るサイクル数は 60 である

簡単な計算を繰り返すことは Technology を使うと便利である．

フィボナッチ数列の初めの 1 の個数を変える

2 個の場合　サイクル数 60

新しい問題:1 の個数を n とし n 個の数を加える時のサイクル数を求める

1 の個数	2	3	4	5	6
サイクル数	60	31	1560	781	7

計算はエクセルを使用し，サイクル数が目視で見つけた．規則を見つけたい．

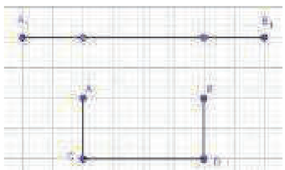
この問題に対して，n 進数でのフィボナッチ数列を考え，同じようにサイクル数を探す下地作りを行った．エクセルの機能は『Mod(Sum(・・・), n)』を用いた．残念ながら規則らしきものは見つからない．規則の発見のためには新しい視点が必要になるのかもしれない．数学を楽しむことは与

えられた問題を解くだけではない．数学教育では問題解決（Problem Solving）が話題の中心になっていたが，解を求めた後の Open End への数学の発展への方向性も重要である指摘はあった．ここでは新しく問題を作りことを考えたい．関数の変化の様子を調べ，Real World な世界から新たな数学の問題発見の例を見たい．

表 5．最大問題とそのグラフを見る

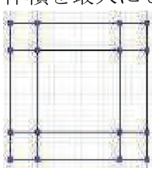
最大値を求める問題

　1 本の針金の両端を同じように曲げて面積最大にしたい



この問題では A=x(a-2x)の最大値を求めればよい．また，この問題の次元を上げてみる．

　正方形の 4 隅から小さな正方形を切り取ってできる立体の体積を最大にしたい

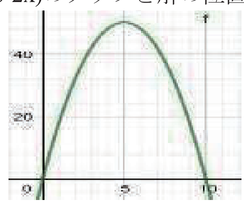


求める関数は $V=x(a-2x)^2$ で最大を求める．

右の問題を解くためにグラフを考えた．

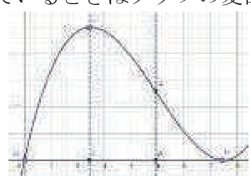
面積の最大

　A=x(10-2x)のグラフと解の位置は中点



体積の最大

$V=x(7.5-2x)^2$ のグラフと解の位置は 1/3 で立方体になっているときはグラフの変曲点．

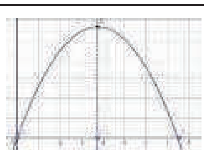
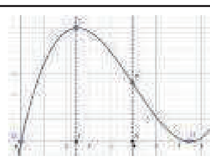
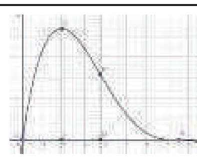
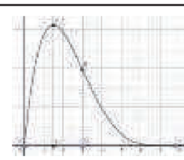


計算だけではわからないことが見えてくる．

　この問題をグラフを描いて解くことによって，微分を学ぶ以前に解くことができる．極点はグラフ上に座標が明示される．この体積最大の問題はグラフ電卓講習会のときにアメリカの先生によって紹介された．グラフを読むことの重要性を説明し，関数の問題は(1)規則，(2)グラフ，(3)表の 3 つの組み合わせによる数学問題解法を示された．

　この問題に対して，極点(最大点)の位置が 1/2,1/3 と変化していることが分かる．次元を挙げた時の極点の位置と変曲点の位置の変化を調べてみたい．計算をすれば分かることではあるが，新しい問題はグラフを見て考えついた．

表 6．グラフから見えた新しい問題

予想　$y=x(a-2x)^n$ のグラフでの極大点の位置の変化の様子に規則がある

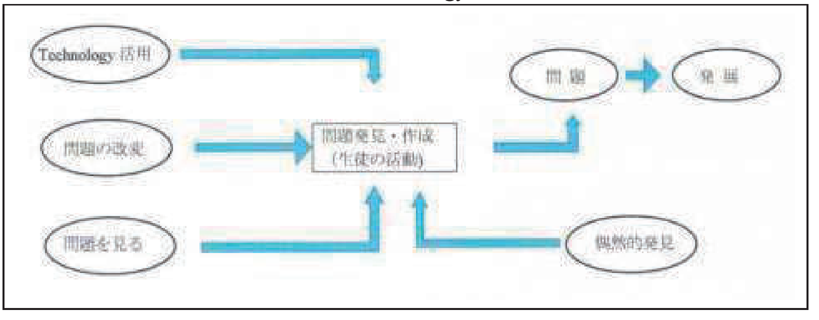
n=1 の場合	n=2 の場合	n=3 の場合	n=4 の場合
極大点は中点(1/2)	極大点は 1/3	極大点は 1/4	極大点は 1/5

新しい問題　$y=x(1-2x)^n$ で $0<x<a$ のときの極大点の位置は 1/(n+1)になるか？

4. 創造性育成のための補助としての Technology 活用の有用性

小学生が電卓を使ったら，ボタンを押すだけで答えが出てしまう．繰り上がりなどは理解できないので使用禁止にすべきといわれている．この問題は今行われている算数教育に電卓を導入することを考えているが，もし電卓を持っていたら教育する視点が変わってくる．計算結果を求めるのではなく計算原理を発見させることを試みる．そうすれば現在の技能訓練から解放された算数教育は物事を考える作業の重視がなされる．このようなことは小学生だけに限らない．数学教育が技能訓練になっている現状打破のために Technology を使うならば教育内容に変化があることは必然的であろう．問題を解く段階においても途中の複雑な計算をすることから解放され問題を解くための思考が重視される．関数ではグラフを描くことが目的ではなく変化の様子を眺めることによって，その本質的なことを発見できるようになる．この考えることが教育で行われるならば現在の教育は Technology を用いることによって変わる．この変化は創造性育成に役立つし，これからの社会が要求することはここの創造的な活動である．この要求に応えるためには Technology を活用することが求められる．与えられた数学の問題を解く過程における問題解決（Problem Solving）では Technology が用いられていると同時に，問題発見のためには Technology が有用なことを指摘した．

表 7．すべてに Technology が補助的な役割



Technology の進展は社会の在り方を変えた．誰もが与えられた仕事を与えられた方法でこなしていく時代は終わった．このような社会の変化に対して日本の数学教育はいまだに西洋の技術に追いつくための方法は以前のまま保守的な状況が続く．いつまでも以前に成功した方法に固着するのではなく，Technology を取り入れた数学教育をどの学年にも行う必要性がある．Technology 活用では最も遅れた社会活動は学校教育の場であり，その中でも算数・数学は完全に取り残されている．明治時期の日本が後進国から先進国へと躍進できたのは，だれもが計算ができたことであった．このような計算は現在では Technology によってすべて可能な時代になった．数学が計算技能の訓練に終始する時代は終わっている．Technology の活用は修礼の日本の発展にかかわることであり，そのためには創造性豊かな教育をする必要がある．

謝辞

この論文は京都大学にある国際共同利用･研究センターである数理解析研究所の支援を受けました．

参考文献

(1) 渡辺信,数学問題から発展学習へー因数分解と合同問題ー,第 52 回全国数学教育学会,2020
(2) S.Watanabe, The aim of mathematical learning at next society, International Conference on Math and Math Learning at Laos, 2018
(3) 渡辺信, 数学教育にも Technology 活用ー「知ること」と「感じること」ー, 科学教育学会, 2020