平面円制限 3 体問題における syzygy 列と衝突解の評価

京都大学大学院情報学研究科 梶原唯加
Yuika Kajihara
Graduate School of Informatics,
Kyoto University

1　はじめに

制限 3 体問題とは，3 体問題において，2 質点（m_1, m_2）の質量に比べて残りの 1 質点（m_3）の質量が 0 とみなせるほど極めて小さい場合に，質点 m_3 が他の 2 質点 m_1, m_2 から万有引力を受けて運動する振る舞いを調べる問題をさす．地球と月の間を動く人工衛星のモデルとしても採用されるなど応用上重要な問題であるだけでなく，数学的にも一般に「解く」ことが難しい微分方程式系として知られている．制限 3 体問題は，m_1, m_2 にどのような 2 体問題の解を適用するかによって幾つかのパターンがあるが，ここでは m_1, m_2 が円運動をしていると仮定し，m_3 を m_1, m_2 がのる平面上に限定した場合の制限 3 体問題を考えよう．これは平面円制限 3 体問題と呼ばれ，m_3 の振る舞いは次の常微分方程式によって定まる：

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= x + 2\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial x} \\ \ddot{y} &= y - 2\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}.\end{aligned} \tag{1}$$

ここで

$$U(x, y; \mu) = \frac{1-\mu}{\sqrt{(x+\mu)^2 + y^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(x-(1-\mu))^2 + y^2}}$$

である．ただし $\mu = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}$ とする．また，平面円制限 3 体問題は変分構造を持ち，対応する作用積分は次式で与えられる：

$$\mathcal{A}_T(x, y; \mu) = \int_0^T \left\{ \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + x\dot{y} - y\dot{x} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + U(x, y; \mu) \right\} dt. \tag{2}$$

作用積分 (2) の minimizing によって，(1) の解を考察しよう．制限 3 体問題（より一般には n 体問題）の微分方程式は特異点を含むものである．したがって，minimizing によって得られた弱解が正則解になっているか否かが問題になる．n 体問題における特異性とは，物理的には質点と質点の衝突に対応する．つまり，弱解が正則解か衝突解かがこのあとでの議論の根幹になる．衝突解そのものはあまり馴染みがないものに感じられるかもしれないが，意外にも（？）有名なケプラー問題で周期境界条件のもとでの minimizer を考えると，これは衝突解を含む．ただし，minimizer の集合の中に衝突

解があるという意味で，minimizer になる解全てが衝突するという意味ではない．ケプラーの楕円軌道もまた周期境界条件のもとでの minimizer である．ケプラー問題の minimizer の作用積分値評価に関して詳しくは [G] を参照されたい．

さて，本稿では位相的な制約条件のもとでの (2) の minimizing を考えよう．ここでは特に，この位相的な制約として syzygy を用いる．syzygy とは，平面上を運動する質点が同一直線上にのる現象を指す．また，syzygy が繰り返し起こるような軌道の場合，それが起きる瞬間の質点の配置によって syzygy 列を対応づけることができる．ある syzygy 列 $\boldsymbol{s}$ にしたがって syzygy を起こす解を $\boldsymbol{s}$-syzygy 解と呼ぶことにしよう．ここでは，minimizing によってどのような syzygy 解が捉えられるかに着目したい．つまり，与えられた syzygy 列 $\boldsymbol{s}$ によって特徴付けられた関数空間 $\Omega_{\boldsymbol{s}}$ のもとで

$$\mathcal{A}_T(x^*, y^*; \mu) = \inf_{(x,y)\in\Omega_{\boldsymbol{s}}} \mathcal{A}_T(x, y; \mu) \tag{3}$$

を達成する minimizer (x^*, y^*) の性質を調べようということである．例えば，3 体問題では，syzygy の際に真ん中の質点の番号によって $1, 2, 3$ のいずれかの番号が決まる．8 の字解は syzygy によって特徴づけられる関数空間の minimizer を直接求めて得られたわけではないが，結果として，...123123... という syzygy を繰り返すような解になっている．

次章ではまず先行研究として Chen と Yu [CY] の結果を紹介する．彼らは平面 n 中心問題において，(3) の形式で与えられる minimizer の軌道を解析することで，syzygy 列が実現可能となるための十分条件を与えている．

そして，本稿で新たに試みるのは，Chen と Yu の結果で示されたものと同様の軌道を平面円制限 3 体問題でも示せるかどうか調べることである．その試みはまだ達成されていないが，本稿ではそれに対する考察や予想を述べる．平面円制限 3 体問題は平面 2 中心問題のある種の拡張と捉えることができるが，変分問題として考える上で，その 2 つの問題の間にあるギャップは大きい．あとで詳しく述べることだが，実は制限 3 体問題では (3) の形式の minimizing を考えてもうまくいかない．そこで，

1. Chen らの結果と比較しながら，平面円制限 3 体問題の minimizing の難点を明確化
2. うまくいかない minimizing の修正案
3. 現段階でわかっている衝突解の作用積分値の評価

以上の 3 点をこの寄稿の主旨とする．また，Chen らの結果に限らず n 体問題の先行研究と異なるのは，その多くが minimizer の正則性を示す結果であるのに対し，本稿でのアプローチは minimizer が特異性を持つと示唆していることである．

以下，簡略化のため平面 n 中心問題は PnCP，平面円制限 3 体問題は PCR3BP と略記する．

2　先行研究と主結果

2.1　PnCP と PCR3BP の比較

まずは，[CY] の結果を大まかに紹介しよう．PnCP は次で与えられる：

$$\ddot{z} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{|z - c_k|^3}(z - c_k) \qquad (z \in \mathbb{C}). \tag{4}$$

c_k は定数である．一般には $c_k \in \mathbb{C}$ だが，ここでは特に $c_k \in \mathbb{R}$ の場合に限定して考える．また，realizable という用語を次で定義する：

定義 2.1 (realizable)**.** $\boldsymbol{s} = (s_1, ..., s_l) \in \{0, 1, ..., n\}^l$ に対して，$\boldsymbol{s}$ が *realizable* であるとは，ある (4) の解 $z(t)$ とある $t_1 < t_2 < \cdots < t_l$ があって，次の 2 条件を満たすことをいう：

- $\mathrm{Re}(z(t_i)) \in I_{s_i}, \mathrm{Im}(z(t_i)) = 0$ （$I_i = (c_i, c_{i+1})$，$c_0 = -\infty$, $c_{n+1} = \infty$）
- $z(t) \notin \mathbb{R}$（$^\forall t \in \displaystyle\bigcup_{i=1}^{l-1} (t_i, t_{i+1})$）．

定理 2.2 ([CY])**.** *syzygy* 列 $\boldsymbol{s} = (s_1, ..., s_l) \in \{0, 1, ..., n\}^l$ $(l \geq 2)$ が $|s_i - s_{i+1}| \geq 2$ かつ $\max |s_i - s_j| \geq 3$ を満たすとする．このとき，$\boldsymbol{s}$ は *realizable* である．

簡単な例を一つ挙げよう．$\boldsymbol{s} = (0, 5, 3, 1)$ とすると，これは定理の仮定を満たす．また，得られる軌道は x-軸に対して直交しており，x-軸に対して折り返した軌道も，折り返してさらに時間反転させた軌道も共に解となる．折り返してさらに時間反転させた軌道と元の軌道とのつなぎ合わせによって，結果的に定理が示す $\boldsymbol{s}$-syzygy 解は $(0, 5, 3, 1, 3, 5)$ を繰り返す周期解となる．

前節でこの寄稿の題目として「Chen と Yu の結果 で示されたものと同様の軌道を平面円制限 3 体問題でも示せるかどうか」と述べたが，これはつまり，PCR3BP においては，どのような $\boldsymbol{s}$ が realizable か明らかにできるか，ということである．定理 2.2 の証明は大きく二つに分かれる：

Step 1　(4) から自然に定まる変分構造を考え，位相的な制約を与えた元での下で定める (6) で与えられる z^* が存在することを示す．

Step 2　z^* の正則性を調べるために衝突軌道の作用積分の値を調べる

PCR3BP の minimizer の解析においても，大まかなアプローチは変わらないが，単に同様のステップを踏むだけでは不十分であり，幾分修正を考えないといけない．定理 2.2 の証明を追いながら，PCR3BP において修正が必要な箇所について説明していこう．

■Step 1　(1) と同様，よく知られているように (4) も変分構造を持ち，作用積分は

$$\mathcal{B}_T(z) = \int_0^T \frac{1}{2}|\dot{z}|^2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{|z - c_k|} dt \tag{5}$$

で与えられる．どのような範囲で minimizer を探索するかを述べるために関数空間 $\Omega_{\boldsymbol{s}}$ を次で定義しよう：

$$\Omega_{\boldsymbol{s}} := \Big\{ z \in H^1([0, T], \mathbb{C}) \mid {}^\exists t_1 < t_2 < \cdots < t_l \text{ such that } z(t) \notin \mathbb{R}\ ({}^\forall t \in \bigcup_{i=1}^{l-1} (t_i, t_{i+1})), \\ \mathrm{Re}(z(t_i)) \in I_{s_i}, \mathrm{Im}(z(t_i)) = 0\ (I_i = (c_i, c_{i+1}),\ c_0 = -\infty,\ c_{n+1} = \infty) \Big\}.$$

そして，

$$\mathcal{B}_T(z^*) = \inf_{z \in \Omega_{\boldsymbol{s}}} \mathcal{B}_T(z). \tag{6}$$

で与えられる minimizer z^* を考える．$\Omega_{\boldsymbol{s}}$ の弱閉包を $\overline{\Omega}_{\boldsymbol{s}}$ とすると，$z^* \in \overline{\Omega}_{\boldsymbol{s}}$ であることは示せる．これが定理 2.2 の証明に用いられる minimizer である．

上の $\mathcal{B}_T$ を PCR3BP の作用積分 $\mathcal{A}_T$ に置き換えてるとどうなるだろう．x 軸上において，$x < -\mu$, $-\mu < x < 1-\mu$, $1-\mu < x$ の各区間に質点が乗ったときに syzygy が生じるから，$0, 1, 2$ を対応づけられる．$\boldsymbol{s} \in \{0, 1, 2\}^k$ を考えて，(6) と同様の形式で与えられる minimizer を考えると良いと思われる．しかし，$\Omega_{\boldsymbol{s}}$ が想定される位相的形状を保った minimizer にはならないことは即座に確認できる．例えば $\boldsymbol{s} = (0, 1, 2)$ を考えよう．このとき，記号列から自然に予想される軌道は 0 から 1 と 1 から 2 のどちらか一方が時計回りに，もう一方が反時計回りに動いているはずである．ここで，軌道が時計回りに動いている部分に着目する．変換前の軌道が解なら，x 軸に関して軌道を折り返し，さらに時間反転させた軌道も解であることは (1) に代入すれば確認できる．また，x 軸に対する質点の配置の対称性から変換前と後での (2) の値の差異は $x\dot{y} - y\dot{x}$ の項だけである．$|x\dot{y} - y\dot{x}|$ は軌道が描く面積に対応し，$x\dot{y} - y\dot{x}$ は軌道が反時計回りの場合は正，時計回りの場合は負の値をとる．したがって realizable な minimizer を考えるときは，軌道は常に反時計周りでないとならない（定理 2.2 の $\boldsymbol{s}$ に関する仮定は Step 2 の衝突解を避けるための制約から導かれるもので，単に minimizer を考えるだけではこのような不都合は生じない）．そこで，$\boldsymbol{s} \in \{0, 1, 2\}^k$ を次の範囲に制限して考える：

$$\Sigma_k = \{\boldsymbol{s} \in \{0, 1, 2\}^k \mid s_0 < s_1 > s_2 \cdots \text{ or } s_0 > s_1 < s_2 \cdots\}.$$

$s \in \Sigma_k$ に対して，minimizer を

$$\mathcal{A}_T(x^*, y^*; \mu) = \inf_{(x,y)\in\Omega_{\boldsymbol{s}}} \mathcal{A}_T(x, y; \mu) \tag{7}$$

で与えられるものとしよう．このような (x^*, y^*) は常に時計回りとなり，先に述べた難点は回避される．しかしながら，実はまだ修正が必要なことが Step 2 でわかる．

■Step 2　さて，再び定理 2.2 の証明に戻ろう．Step 2 では z^* の正則性を示すために衝突軌道の作用積分の値を調べる．z^* が衝突解でないことを示すには，任意の衝突を持つ軌道 z_{col} について

$$\mathcal{B}_T(z^*) < \mathcal{B}_T(z_{\mathrm{col}})$$

が成り立つことを示せばよい．詳細は述べないが，[CY] では x 軸に対して軌道を反転させても作用積分値は変わらないことが証明において重要な役割を果たす．そして Step 1 の後半で述べたように，PCR3BP の場合はこの補題が成り立たない．また，PnCP は T に関してスケール変換が可能である．つまり，ある T に固定した元で一方，PCR3BP は質量の大きな 2 体 m_1, m_2 の円運動の周期が与えられているから，同様の時間スケール変換は行えない．

T が極めて大きい場合の振る舞いを考えよう．静止座標系を想像しよう．単に $\{(x, 0) \mid x < -\mu\}$ から $\{(x, 0) \mid -\mu < x < 1-\mu\}$ への軌道の minimizer を考えると，原点から質点 m_3 は遠ざかっていき，その間，2π 周期で m_1, m_2 は原点の周りを回転し続ける．この運動を回転座標系に戻して，どのようなパターンの syzygy が生じているのかを考えると，$(0, 2, 0, 2, ...)$ という記号列に対応することがわかる．したがって，$(0, 2, 1)$-syzygy 解を考えても，T が十分大きい場合は実際に minimizer は $(0, 2, 0, 2, ..., 2, 1)$-syzygy 解になってしまう．T についても制約が必要となる．そこで，$\boldsymbol{s} \in \Sigma$ に対

して，

$$\mathcal{A}_{T^*}(x^*, y^*; \mu) = \inf_{T>0} \inf_{(x,y)\in\Omega_{\boldsymbol{s}}} \mathcal{A}_T(x, y; \mu) \tag{8}$$

を考えると，Step 1, 2 でみた問題点は回避される．

2.2 minimizer の存在

では (8) を満たす T^* が存在することを示そう．$T^* \neq 0, \infty$ であることを示せばよい．したがって $\lim_{T\to 0} \mathcal{A}_T(x, y; \mu) = \infty$ かつ $\lim_{T\to\infty} \mathcal{A}_T(x, y, ; \mu) = \infty$ を示せば十分である．まず，

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_T(x, y; \mu) &= \int_0^T \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + x\dot{y} - y\dot{x} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + U(x, y; \mu)dt \\ &= \int_0^T \frac{1}{2}\{(\dot{x} - y)^2 + (\dot{y} + x)^2\} + U(x, y; \mu)dt > 0\end{aligned}$$

であるから，$\mathcal{A}_T$ は下に有界である．

$T \to \infty$ で作用積分値が有限になるためには，被積分項は 0 になる，つまり $\dot{x} - y = 0$ かつ $\dot{y} + x = 0$ であることが必要だが，このような解は R3BP の解にはならないから矛盾し，

$$\lim_{T\to\infty} \mathcal{A}_T(x, y; \mu) = \infty$$

を得る．したがって $T^* \neq \infty$ となる．

$l(x, y) > 0$ を軌道 (x, y) の長さとし，$A > 0$ を軌道が描く面積としよう．等周不等式より，$A \leq l^2/(2\pi)$ が成り立ち，

$$A = \left| \int_0^T (x\dot{y} - \dot{x}y)dt \right|$$

であること，また $\displaystyle\int_0^T \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)dt$ で与えられる汎関数の minimizer は等速運動であることに注意すると，

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_T(x, y; \mu) &\geq \int_0^T \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)dt - C \\ &\geq \frac{l^2}{2T} - \frac{l^2}{2\pi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{\pi}\right) l^2 \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{\pi}\right)\end{aligned} \tag{9}$$

と表せるから，$T^* \neq 0$ も示せた.

2.3 衝突解の作用積分値の評価

さて，(8) で与えられる syzygy 解を調べたい．$k = 2$ の場合は既に [KS] で扱っているから，$k \geq 3$ の場合が問題になる．まずは $n = 3$ を考えよう．以下．$\boldsymbol{s} = (0, 2, 1)$ とする．

1 章の最後に述べたように，以下では minimizer の正則性を示すのではなく，minimizer の特異性を示すための不等式評価を用意する．どのような定数で上から評価できるか，現時点での計算結果を示す．作用積分 (2) を考え，被積分項を $L(x, y; \mu)$ とおく．

まず極座標変換 $(x,y)\mapsto(r,\theta)$ をして考える：

$$r_1=\sqrt{(x+\mu)^2+y^2},\ \theta_1=\tan^{-1}\frac{y}{x+\mu}.$$

変数変換はラグランジアンの値には影響せず，$L(x,y;\mu)=L_1(r_1,\theta_1;\mu)$ が成り立ち，$\mathcal{A}_T$ の値と Euler-Lagrange 方程式は変わらない．極座標表示した場合の作用積分を計算すると，

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_T(x,y;\mu)&=\int_0^T L(x,y;\mu)dt=\int_0^T L_1(r,\theta;\mu)dt\\&=\int_0^T \frac{1}{2}\dot{r}^2+\frac{1}{2}r^2(1+\dot{\theta})^2+\frac{1-\mu}{r}+\frac{\mu}{\sqrt{r^2-2r\cos\theta+1}}-\mu r\cos\theta dt-\frac{1}{2}\mu^2T\end{aligned}$$

となる．ただし $\dot{y}$ の積分値は境界条件より 0 になることに注意する．

では，衝突解の軌道の作用積分値を評価しよう．衝突解の中で minimizer を与えるような軌道を $r^*_{\mathrm{col}},\theta^*_{\mathrm{col}}$，またその積分区間を $[0,T^*_{\mathrm{col}}]$ としよう．また，衝突を持つテスト曲線として次のような軌道を考える：

$$\begin{aligned}r_{\mathrm{test}}(t)&=\begin{cases}r_K(t) & (t\le\pi/8)\\ 1+r_K(\pi/4-t) & (\pi/8<t\le\pi/4)\end{cases}\\ \theta_{\mathrm{test}}(t)&=-t+\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

ただし．$r_k(t)$ は質量 1 のケプラー問題の直線解とする．以下 $T_1=\pi/4$ とすると，

$$\begin{aligned}&\int_0^{T_1} L_1(r_k,\theta_{\mathrm{test}};\mu)dt\\&=\int_0^{T_1}\frac{1}{2}\dot{r}_k^2+\frac{1}{2}r^2(1+\dot{\theta})^2+\frac{1-\mu}{r_k}+\frac{\mu}{\sqrt{r_k^2-2r\cos(-t+T_1)+1}}-\mu r_k\cos(-t+T_1)dt-\frac{1}{2}\mu^2T_1\\&\le\int_0^{T_1}\frac{1}{2}\dot{r_k}^2+\frac{1-\mu}{r_k}+\frac{\mu}{|r_k-1|}-\mu r_k\cos(-t+T_1)dt-\frac{1}{2}\mu^2T_1\\&=\mu\int_0^{T_1}\frac{1}{2}\dot{r}_k^2+\frac{1}{|r_k-1|}dt+(1-\mu)\int_0^{T_1}\frac{1}{2}\dot{r}_k^2+\frac{1}{r_k}dt-\mu\int_0^{T_1}r_k\cos(-t+T_1)dt-\frac{1}{2}\mu^2T_1\\&\le\mu\int_0^{T_1}\frac{1}{2}\dot{r}_k^2+\frac{1}{|r_k-1|}dt+(1-\mu)\int_0^{T_1}\frac{1}{2}\dot{r}_k^2+\frac{1}{r_k}dt-\frac{1}{8}\mu^2\pi\end{aligned}$$

と変形できる．T_1 はテスト曲線に用いる直線解が m_1 と m_2 間の距離 1 分だけ進むように選んでいる．ここで，

$$\int_0^{\pi/8}\frac{1}{2}\dot{r}_k^2+\frac{1}{r_k}dt=\frac{3}{2^{(5/3)}}\pi$$

となることが知られている．これを用いると，

$$\int_0^{T_1}\frac{1}{2}\dot{r}_k^2+\frac{1}{r_k}dt=\int_0^{\pi/8}\frac{1}{2}\dot{r}_k^2+\frac{1}{r_k}dt+\int_{\pi/8}^{\pi/4}\frac{1}{2}\dot{r}_k^2+\frac{1}{r_k}dt<\frac{3}{2^{(2/3)}}\pi$$

と評価できるから，

$$\int_0^{T_1}L_1(r_k,\theta_{\mathrm{test}};\mu)dt<\left(\frac{3}{2^{(2/3)}}-\frac{1}{8}\mu^2\right)\pi$$

を得る．質量が μ の質点を中心に極座標を考えた場合も考慮しても同様の評価式が得られるから，衝突解が minimizer となった場合の作用積分の上からの評価

$$\mathcal{A}_{T^*_{\mathrm{col}}}(x^*_{\mathrm{col}}, y^*_{\mathrm{col}}; \mu) < \left(\frac{3}{2^{(2/3)}} - \frac{1}{8} \max\{\mu, 1-\mu\}^2 \right) \pi \tag{10}$$

が得られた．

3 予想

ここからは厳密な評価ではないが，作用積分の形から予想される正則解のふるまいについて考え，最終的にどのようなことが予想されるのかについて述べる．

(9) で $T \ll 1$ のときの評価式は得ているから，まずは $T \gg 1$ のときにどのような振る舞いをするかを調べることが必要である．回転座標系を用いずに PCR3BP を考えると，作用積分は次で与えられる：

$$\int_0^T (1-\mu) \left(\frac{1}{2}|\dot{z}|^2 + \frac{1}{|z+\mu e^{it}|} \right) + \mu \left(\frac{1}{2}|\dot{z}|^2 + \frac{1}{|z-(1-\mu)e^{it}|} \right) dt$$

ただし，$z = x + iy \in \mathbb{C}$ である．作用積分値を minimize するように振る舞うことから，$T \gg 1$ では質点が原点から遠くに離れていく（そして，また境界条件を満たすように原点付近に戻ってくる）ことが予想される．そのとき，上の被積分項の形から，原点から離れたところでの振る舞いはケプラー問題と同等であり，ケプラー問題におけるよく知られた結果を適応することで，作用積分値のオーダーは $T^{1/3}$ になることがわかる．したがって，ある $\underline{T}, \overline{T}$ があって，

$$\underline{T} < T < \overline{T}$$

の範囲でのみ衝突解と正則解を比べれば良い．(9), (10) から軌道の長さ l を与えるごとに $\underline{T}$ は具体的に求まる．考えるべき軌道の長さが限定されると，$L(x, y; \mu)$ で現れる $x\dot{y} - \dot{x}y$ や $x^2 + y^2$ といった，ケプラー問題とは異なる項を具体的に評価できる．したがって，$(0, 2, 1)$-syzygy 解に対応する軌道は，x 軸に関して反転させることで，$(0, 2, 1, 2, 0)$-syzygy 解となるが，このとき $(2, 1, 2)$ に対応する軌道は質点の周りをぐるりと一周しているはずである．ここでの軌道の作用積分値と衝突軌道に置き換えた場合の作用積分値を比較することで，衝突軌道がより小さな作用積分値を与えることを示せるのではないかと考えている．

謝辞

本研究は，科研費（20J21214）の助成を受けた．

参考文献

[CY] K-C.Chen & G. Yu, Syzygy sequences of the N-center problem, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **38** (2018), 566–582.

[G] W. B, Gordon, A minimizing property of Keplerian orbits, *Amer. J. Math.* **99** (1977), 961–971.

[KS] Y. Kajihara & M. Shibayama, Variational existence proof for multiple periodic orbits in the planar circular restricted three-body problem, submitted.