

変分法による非等方ケプラー問題の周期解の存在証明

京都大学大学院情報学研究科 井口 翔太

Shota Iguchi

Graduate School of Informatics, Kyoto University

京都大学大学院情報学研究科 柴山 允瑠

Mitsuru Shibayama

Graduate School of Informatics, Kyoto University

非等方ケプラー問題は、 n 型半導体上の自由電子の運動をモデル化したものであり、非可積分なハミルトン系であることが知られている。数値計算によって近似的な周期解が多く発見されているが、厳密な存在証明はなされていないものが多い。本論文では、まず非等方ケプラー問題の作用積分について、境界条件を垂直な 2 半直線上にとった固定域条件のもとで最小点が存在することを示す。次に衝突解とテスト曲線の作用積分の比較によって、パラメータ μ の値の範囲が $1/16 < \mu < 16$ であるとき最小点が衝突解とならないことを示す。反転対称性により、得られた最小点は周期軌道になっている。また、テスト曲線の作用積分を数値計算で直接計算することにより $1/16$ よりさらに小さいパラメータ μ に対しても衝突解が除去できることを示す。

1 はじめに

n 個の質点が互いに万有引力により引きあっているときの運動を調べる問題を n 体問題という。 n 体問題は Newton により万有引力が発見されてから今なお研究され続けている。ポアンカレ以来、様々な設定のもとで 3 体問題が解けないことが証明されている。そのため n 体問題の一般解を求めることはできないが、特殊解、特に単純な周期解を求めることが可能な場合がある。そのような解を求める方法の一つが変分法である。例えば Chenciner と Montgomery が等質量の平面 3 体問題における 8 の字周期解の存在を変分法により証明したことは有名である ([1] 参照)。本論文ではこの手法を非等方ケプラー問題に適用する。

二次元のポテンシャル系の運動方程式は、ポテンシャル関数 $V(x, y)$ を用いて

$$\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad (1.1)$$

と表される。式 (1.1) において、ポテンシャル関数が

$$V(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + \mu y^2}} \quad (\mu > 0)$$

で与えられているとき、あるいはラグランジアンが

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(x, y) \quad (1.2)$$

で与えられているとき、この系を非等方ケプラー問題という。これは n 型半導体における自由電子が従う方程式として Gutzwiller によって導入された問題である ([4] 参照)。

非等方ケプラー問題は $\mu \neq 1$ において非可積分であることや ([10] 参照), $\mu > 9/8$ または $\mu < 8/9$ の範囲において horseshoe を持つことが知られている ([2] 参照)。また非等方ケプラー問題の周期解について数値計算による近似解は既にいくつも求められているが ([7] 参照), 数学的な存在証明がなされていないものが多い。本論文では変分法を用いて非等方ケプラー問題における単純な性質を持った周期軌道の存在証明を行う。

以下が主定理である。

主定理. $T > 0$ を任意に固定する。非等方ケプラー問題について $\frac{1}{16} < \mu < 16$ ならば、以下の性質を持つ周期 $4T$ の周期軌道 $\mathbf{q}(t) = (x(t), y(t))$ が存在する:

- $\dot{x}(0) = \dot{y}(T) = 0$
- $x(-t) = x(t), y(-t) = y(t), x(t+T) = -x(-t+T), y(t+T) = -y(t+T)$
- $\mathbf{q}(t)$ は $t = 0, T$ でそれぞれ x, y 軸に直交する。
- $t \in (0, T)$ で $x(t)$ は単調減少, $y(t)$ は単調増加

なお、現在では、任意の μ に対して証明できることが分かっている ([5] 参照)。

次節以降で主定理を証明する。次節では、反転対称性について述べ、変分法において作用積分が最小点を持つための条件を紹介し、さらに楕円積分と算術幾何平均について述べる。第 3 節では、非等方ケプラー問題を変分法により定式化する。第 4 節では、主定理である衝突解が最小点とならないことを保証できる μ の値の範囲について議論する。第 5 節では、数値計算を用いてより小さな μ の値について考察する。

2 準備

2.1 反転対称系

まずはじめに、反転対称系に関する定義と、のちに必要となる補題を以下に述べる。

定義 2.1 (反転対称系). 自励系の常微分方程式

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$$

を考える。 E を単位行列とし、 $d \times d$ 行列 R が $R^2 = E$ を満たすとする。 F が R について反転対称であるとは、

$$F(R\mathbf{x}) + R(F\mathbf{x}) = 0$$

が成り立つことである。

次が容易に分かる。

命題 2.2. F が R について反転対称であるとき、 $\mathbf{x}(t)$ が $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$ の解ならば $R(\mathbf{x}(-t))$ も解である。

2.2 作用積分の最小点

ここでは、ラグランジュ系の変分問題について知られている結果を述べる。 $I = [0, T]$ とする。 \mathcal{D} を配位空間とし、 $A, B \in \mathcal{D}$ を空でない部分空間とする。 TA, TB を A, B を原点を通るように平行移動してできる線形空間とする。関数の集合 $\mathcal{C}_{A,B,T}$ を

$$\mathcal{C}_{A,B,I} = \{\mathbf{q} \in C^2(I, \mathcal{D}) \mid \mathbf{q}(0) \in A, \mathbf{q}(T) \in B\} \quad (2.1)$$

とおく。 $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ をラグランジアンとするラグランジュ系を考える。作用積分は

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}) = \int_0^T L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt$$

である。

$$\mathcal{A}'(\mathbf{q}) = 0$$

を満たす \mathbf{q} を $\mathcal{A}(\mathbf{q})$ の臨界点と呼ぶ。

補題 2.3 ([6]). $\mathbf{q} \in \mathcal{C}_{A,B,T}$ が \mathcal{A} の臨界点であるとき、 $\mathbf{q}(t)$ は (t_0, t_1) で Euler-Lagrange 方程式を満たす。さらに $\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}(t_0), \dot{\mathbf{q}}(t_0))$ は TA に、 $\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}(t_1), \dot{\mathbf{q}}(t_1))$ は TB に直交する。特に、 $L = \frac{1}{2}|\dot{\mathbf{q}}|^2 - V(\mathbf{q})$ であれば、 $\dot{\mathbf{q}}(t_0)$ は TA に、 $\dot{\mathbf{q}}(t_1)$ は TB に直交する。

次に、関数の空間として Sobolev 空間

$$H^1(I, \mathcal{D}) = \left\{ \mathbf{q} : I \rightarrow \mathcal{D} \mid \mathbf{q} \in L^2(I, \mathcal{D}), \frac{d\mathbf{q}}{dt} \in L^2(I, \mathcal{D}) \right\}$$

をとる。

定義 2.4 (coercive). $\Omega \in H^1(I, \mathcal{D})$ とする。 $\mathcal{A}|_{\Omega}$ が coercive であるとは、 $\|\mathbf{q}\|_{H^1} \rightarrow \infty (\mathbf{q} \in \Omega)$ となるとき、 $\mathcal{A}(\mathbf{q}) \rightarrow \infty$ となることである。ここで、

$$\|\mathbf{q}\|_{H^1} := \sqrt{\int_0^T |\mathbf{q}|^2 + |\dot{\mathbf{q}}|^2 dt}$$

である。

補題 2.5.

$$\Omega = \{\mathbf{q} \in H^1(I, \mathcal{D}) \mid \mathbf{q}(0) \in A, \mathbf{q}(T) \in B\}$$

とし、 A, B は空集合でないとする。ある定数 $C_0 < 1$ が存在して任意の $\mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B$ に対して、

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq C_0 \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$$

が成り立つとする。このとき、 $\mathcal{A}|_{\Omega}$ は coercive である。

補題 2.6 ([8]). $\mathcal{A}|_{\Omega}$ が coercive のとき、 Ω の閉包 $\overline{\Omega}$ における \mathcal{A} の最小点 \mathbf{q}^* が存在する。

さらに、この最小点は $\mathbf{q}^* \in \mathcal{C}_{A,B,T}$ を満たす。つまり、滑らかであることが知られている。

2.3 算術幾何平均と楕円積分

ここでは算術幾何平均と楕円積分について述べる。

定義 2.7 (算術幾何平均). $a \geq b > 0$ が与えられたとき, $a_0 = a, b_0 = b$ とおき, 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を

$$a_{i+1} = \frac{a_i + b_i}{2}, \quad b_{i+1} = \sqrt{a_i b_i} \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

と定める. この数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の共通の極限を a と b の算術幾何平均と呼び, $M(a, b)$ で表す.

命題 2.8.

$$a_i \geq M(a, b) \geq b_i$$

が成り立つ. 特に

$$M(a, b) \geq \sqrt{ab}$$

また,

$$M(a, b) = aM(1, b/a)$$

が成り立つ.

定義 2.9 (第一種完全楕円積分). 次の積分値を第一種完全楕円積分と呼ぶ.

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad (0 \leq k < 1)$$

第一種完全楕円積分は算術幾何平均を用いて次のように表せる. 詳しくは [9] を参照されたい.

命題 2.10.

$$K(k) = \frac{\pi}{2M(1, k')} \quad (k' = \sqrt{1 - k^2})$$

3 変分法による問題の定式化

非等方ケプラー問題では原点は特異点となるので, 配位空間を $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ と定める. 解軌道の集合を (2.1) で定める. ここで境界条件を

$$A = \{(x, 0) | x > 0\}, \quad B = \{(0, y) | y > 0\} \quad (3.1)$$

とする. すなわち, x 軸の正の部分を出発して, y 軸の正の部分に到達する軌道を考える.

補題 3.1. A, B を (3.1) で定めたとき, 任意の $\mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B$ に対して,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq \frac{1}{2} |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$$

証明. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ とノルムの性質から直ちに導かれる. □

したがって補題 2.5, 補題 2.6 により, $\overline{\Omega}$ の範囲に最小点が存在する. さらに補題 2.3 より $\dot{\mathbf{q}}^*(0)$ は A と直交し, $\dot{\mathbf{q}}^*(T)$ は B と直交する. 最小点 \mathbf{q}^* は衝突解でなければ非等方ケプラー問題の解となる (図 1).

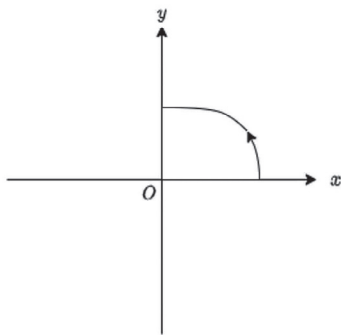


図1 得られる最小解

4 衝突解の評価

本節以降では非等方ケプラー問題のパラメータ μ を $0 < \mu \leq 1$ に制限する。これは適当な変数変換を行うことでパラメータ μ の代わりに $1/\mu$ とすることができ、上の仮定をしても一般性を失わず議論できるからである。

4.1 衝突解の作用積分

補題 4.1 (Gordon の評価式 [3]). $\nu > 0, \alpha > 0$ を定数とし, $r : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ に対し,

$$\mathcal{B}(r) = \int_0^T \frac{\nu}{2} \dot{r}^2 + \frac{\alpha}{r} dt$$

とする. $r(t)$ がある $t_0 \in [0, T]$ で $r(t_0) = 0$ となるとすると,

$$\mathcal{B}(r) \geq 2^{-1} \cdot 3(\nu\alpha^2\pi^2)^{1/3} T^{1/3}$$

が成り立つ。

証明. Gordon[3] による証明と本質的に同じだが, 少し設定が異なるので証明を述べておく. $r^*(t)$ を, $r^*(t_0) = 0$ を満たし, 作用積分 \mathcal{B} を最小化するように定める. このような $r^*(t)$ の存在は前節の議論により保証される。

$r^*(t)$ の定め方よりこれは $\mathcal{B}(r)$ の臨界点となるので, 区間 $[0, t_0)$ について次が成り立つ。

$$\mathcal{B}'(r^*)\delta = \int_0^{t_0} \left(-\nu\ddot{r}^*(t) - \frac{\alpha}{r^{*2}(t)} \right) \cdot \delta(t) dt + \nu\dot{r}^*(t_0)\delta(t_0) - \nu\dot{r}^*(0)\delta(0) = 0$$

$\dot{r}^*(t_0) = 0$ より

$$\int_0^{t_0} \left(-\nu\ddot{r}^*(t) - \frac{\alpha}{r^{*2}(t)} \right) \cdot \delta(t) dt - \nu\dot{r}^*(0)\delta(0) = 0$$

まず, $\delta(0) = 0$ となる任意の変分 $\delta(t)$ を考えることで $-\nu\dot{r}^*(t) - \frac{\alpha}{r^*(t)^2} = 0$ を得る (オイラー・ラグランジュ方程式). 次に $\delta(0) = 0$ とは限らない変分を考えることで $\dot{r}^*(0) = 0$ を得る.

$r^*(t)$ は, 衝突するまでの区間 $[0, t_0]$ ではラグランジアン $\frac{\nu}{2}\dot{r}^{*2} + \frac{\alpha}{r^*}$ に対するオイラー・ラグランジュ方程式を満たすから, エネルギー保存則

$$\frac{\nu}{2}\dot{r}^{*2} + \frac{\alpha}{r^*} = E$$

が成り立つ. これを変形して,

$$\frac{dr^*}{dt} = -\sqrt{\frac{2Er^* + 2\alpha}{\nu r^*}}$$

を得る. ここで $r^*(0) = r_0$ とおくと, $\dot{r}^*(0) = 0$ より $E = -\frac{\alpha}{r_0}$ である. ところで, r^* に関する条件は $r^*(t_0) = 0$ だけであり, r の値は大きいほど作用積分値は小さくなるから, $r^*(t)$ は区間 $[0, t_0]$ で単調減少である. よって置換積分が実行できて

$$\begin{aligned} \int_0^{t_0} \frac{\nu}{2}\dot{r}^{*2} + \frac{\alpha}{r^*} dt &= \int_{r_0}^0 \left(\frac{\nu}{2}\dot{r}^{*2} + \frac{\alpha}{r^*} \right) \frac{dt}{dr^*} dr^* = \int_0^{r_0} \left(-\frac{\alpha}{r_0} + \frac{2\alpha}{r^*} \right) \sqrt{\frac{\nu r^*}{-\frac{2\alpha}{r_0} r^* + 2\alpha}} dr^* \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{\alpha}{r_0} + \frac{2\alpha}{r_0 s} \right) \sqrt{\frac{\nu r_0 s}{-2\alpha s + 2\alpha}} r_0 ds = \sqrt{\frac{\alpha \nu r_0}{2}} \int_0^1 (2-s) \sqrt{\frac{1}{s(1-s)}} ds \\ &= \sqrt{\frac{\alpha \nu r_0}{2}} \int_0^{\pi/2} (2 - \sin^2 \theta) \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= \sqrt{2\alpha \nu r_0} \int_0^{\pi/2} (2 - \sin^2 \theta) d\theta = 2^{-3/2} \cdot 3\pi \sqrt{\alpha \nu r_0} \end{aligned}$$

となる. また,

$$\begin{aligned} t_0 &= \int_{r_0}^0 \frac{dt}{dr^*} dr^* = \int_0^{r_0} \sqrt{\frac{\nu r^*}{-\frac{\alpha}{r_0} 2r^* + 2\alpha}} = \sqrt{\frac{\nu}{2\alpha}} \int_0^{r_0} \sqrt{\frac{r^*}{-\frac{1}{r_0} r^* + 1}} dr^* \\ &= \sqrt{\frac{\nu r_0^3}{2\alpha}} \int_0^1 \sqrt{\frac{u}{-u+1}} du = \sqrt{\frac{\nu r_0^3}{2\alpha}} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\nu r_0^3}{2\alpha}} \end{aligned}$$

これを r_0 について解くと

$$r_0 = 2\pi^{-2/3} t_0^{2/3} \alpha^{1/3} \nu^{-1/3}$$

が得られる. よって一般の r に対して

$$\begin{aligned} \int_0^{t_0} \frac{\nu}{2}\dot{r}^2 + \frac{\alpha}{r} dt &\geq 2^{-3/2} \cdot 3\pi \alpha^{1/2} \nu^{1/2} (2\pi^{-2/3} t_0^{2/3} \alpha^{1/3} \nu^{-1/3})^{1/2} \\ &= 2^{-1} \cdot 3\alpha^{2/3} \nu^{1/3} \pi^{2/3} t_0^{1/3} \end{aligned}$$

となる. $[t_0, T]$ の部分も同様に評価できる (衝突から始まる軌道として考えればよい). よって

$$\mathcal{B}(r) \geq 2^{-1} \cdot 3(\nu \alpha^2 \pi^2)^{1/3} (t_0^{1/3} + (T - t_0)^{1/3})$$

右辺は $t_0 = 0, T$ の時最小となるので

$$B(r) \geq 2^{-1} \cdot 3(\nu\alpha^2\pi^2)^{1/3}T^{1/3}$$

を得る. □

補題 4.2. $\nu > 0, \alpha > 0$ を定数とし, $\mathbf{q} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ に対し,

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}) = \int_0^T \frac{\nu}{2} |\dot{\mathbf{q}}|^2 + \frac{\alpha}{|\mathbf{q}|} dt$$

とする. $\mathbf{q}(t)$ がある $t_0 \in [0, T]$ で $\mathbf{q}(t_0) = 0$ となるとすると,

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}) \geq 2^{-1} \cdot 3(\nu\alpha^2\pi^2)^{1/3}T^{1/3}$$

が成り立つ.

証明. $\mathbf{q}^*(t)$ を, $\mathbf{q}^*(t_0) = 0$ を満たし \mathcal{L} を最小化するように定める. $\mathbf{q}^*(t) = r(\cos \theta, \sin \theta)$ とすると,

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}) = \int_0^T \frac{\nu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{\alpha}{r} dt$$

である. 区間 $[0, t_0]$ での積分値を評価すると

$$\int_0^{t_0} \frac{\nu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{\alpha}{r} dt \geq \int_0^{t_0} \frac{\nu}{2} \dot{r}^2 + \frac{\alpha}{r} dt$$

等号は $\dot{\theta} = 0$ すなわち θ が一定のとき成立する. よってこのように θ を定めることにより補題 4.1 に帰着できる. □

補題 4.3. 非等方ケプラー問題における衝突解 \mathbf{q}_{col} の作用積分は次式で評価できる.

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}_{\text{col}}) \geq \frac{3}{2} \pi^{2/3} T^{1/3}$$

証明. 補題 4.2 において $\nu = \alpha = 1$ の場合の結果を利用して, $\mu \in (0, 1)$ より

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{q}_{\text{col}}) &= \int_0^T \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{\sqrt{x^2 + \mu y^2}} dt \\ &> \int_0^T \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{q}}|^2 + \frac{1}{|\mathbf{q}|} dt \\ &\geq \frac{3}{2} \pi^{2/3} T^{1/3} \end{aligned}$$

□

4.2 テスト曲線 1 の設定

テスト曲線 \mathbf{q}_{test} を,

$$\mathbf{q}_{\text{test}}(t) = \left(a \cos \frac{\pi}{2T} t, b \sin \frac{\pi}{2T} t \right), \quad a = \sqrt{\mu} b \tag{4.1}$$

で定める. このように定めた理由は, この曲線がポテンシャル $V(x, y)$ を一定に保つ曲線であり, 作用積分を容易に求めることができるからである.

4.3 テスト曲線 1 に対する作用積分の計算

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}_{\text{test}}) = \int_0^T \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{\sqrt{x^2 + \mu y^2}} dt$$

を計算する。後半の積分は

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{1}{\sqrt{x^2 + \mu y^2}} dt &= \int_0^{\pi/2} \frac{2T}{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\mu} b} \\ &= \frac{T}{\sqrt{\mu} b} \end{aligned}$$

と計算できる。また前半の積分は

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) dt &= \int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{4T} (b^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{\pi^2}{8T} b^2 + \frac{\pi^2}{16T} (a^2 - b^2) \\ &= \frac{\pi^2}{16T} (a^2 + b^2) \\ &= \frac{\pi^2}{16T} (\mu + 1) b^2 \end{aligned}$$

と計算できる。したがって、

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}_{\text{test}}) = \frac{\pi^2}{16T} (\mu + 1) b^2 + \frac{T}{\sqrt{\mu} b} \quad (4.2)$$

いま、この作用積分が小さくなるように b を定めたい。つまり、

$$\frac{\partial \mathcal{A}(\mathbf{q}_{\text{test}})}{\partial b} = \frac{\pi^2}{8T} (\mu + 1) b - \frac{T}{\sqrt{\mu} b^2} = 0$$

を満たすように b を定める。これを計算すると

$$b = 2T^{2/3} \pi^{-2/3} (\mu + 1)^{-1/3} \mu^{-1/6}$$

となる。これを式 (4.2) に代入して計算すると次式を得る、

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}_{\text{test}}) = \frac{3}{4} \pi^{2/3} T^{1/3} \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^{1/3}$$

4.4 衝突解が除去できる条件 1

衝突解が作用積分の最小点でないための条件は、 $\mathcal{A}(\mathbf{q}_{\text{col}}) > \mathcal{A}(\mathbf{q}_{\text{test}})$ であり、この十分条件は

$$\frac{3}{2} \pi^{2/3} T^{1/3} > \frac{3}{4} \pi^{2/3} T^{1/3} \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^{1/3}$$

と表せる。これは $\mu > 1/7$ と同値である。したがって、(少なくとも) $\mu > 1/7$ の範囲では衝突解が最小点とならない。

4.5 テスト曲線 2 の設定

前節ではテスト曲線 (4.1) において $a = \sqrt{\mu b}$ という条件を課していた。これは作用積分を容易に計算できるようにするために定めた条件だったのであるが、一般にこの条件を課さない場合を考える。

4.6 テスト曲線 2 に対する作用積分の計算

例えば $a > \sqrt{\mu b}$ の場合の作用積分は次のように計算できる。

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}_{\text{test}}) = \frac{\pi^2}{16T}(a^2 + b^2) + \frac{2T}{\pi a} K \left(\sqrt{1 - \frac{\mu b^2}{a^2}} \right) \quad (4.3)$$

ここで $K(k)$ は第一種完全楕円積分と呼ばれ

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

により定義される。ここで変数変換

$$(a, b) = \left(T^{2/3} A, \frac{T^{2/3}}{\sqrt{\mu}} B \right)$$

を施すと

$$\frac{\mathcal{A}(\mathbf{q}_{\text{test}})}{T^{1/3}} = \frac{\pi^2}{16} \left(A^2 + \frac{B^2}{\mu} \right) + \frac{2}{\pi A} K \left(\sqrt{1 - \frac{B^2}{A^2}} \right)$$

となる。これは楕円積分と算術幾何平均に関する補題 2.10 と命題 2.8 を用いて評価できて、

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A}(\mathbf{q}_{\text{test}})}{T^{1/3}} &= \frac{\pi^2}{16} \left(A^2 + \frac{B^2}{\mu} \right) + \frac{1}{M(A, B)} \\ &\leq \frac{\pi^2}{16} \left(A^2 + \frac{B^2}{\mu} \right) + \frac{1}{\sqrt{AB}} \end{aligned}$$

上の等式や不等式は $a < \sqrt{\mu b}$ でも成立する。

4.7 衝突解が除去できる条件 2

以上の議論を踏まえて、主定理を証明する。衝突解が作用積分の最小点でないための条件は、 $\mathcal{A}(\mathbf{q}_{\text{col}}) > \mathcal{A}(\mathbf{q}_{\text{test}})$ であり、この十分条件は

$$\frac{3}{2} \pi^{2/3} > \frac{\pi^2}{16} \left(A^2 + \frac{B^2}{\mu} \right) + \frac{1}{\sqrt{AB}}$$

となる $A > 0, B > 0$ が存在することである。これは μ について解くことができ、

$$\frac{1}{\mu} < \frac{1}{B^2} \left(24\pi^{-4/3} - A^2 - \frac{16}{\pi^2 \sqrt{AB}} \right) =: f(A, B)$$

よって $f(A, B)$ の最小点を求める問題に帰着できる. すなわち

$$\frac{\partial f(A, B)}{\partial A} = \frac{\partial f(A, B)}{\partial B} = 0$$

を満たすように A, B を定めたときの f の値を求めれば良い. これを計算すると, $A_0 = 2\pi^{-2/3}, B_0 = 1/2\pi^{-2/3}$ のとき, $f(A_0, B_0) = 16$ となる. これより $\mu > 1/16$ を得る. したがって, (少なくとも) $\mu > 1/16$ の範囲では衝突解が最小点とならない. 従ってこの範囲では図 1 のような衝突しない最小点が存在する.

4.8 周期解の構成

以下では, 求めた最小点から所望の周期解を構成できることを示す.

補題 4.4. $x(t), y(t)$ を最小点とすると, $x(t), y(t)$ は単調である.

証明. x についてのみ示す. いま $x(t)$ を最小点とすると, 境界条件 (3.1) より $x(0) > x(T) = 0$ であり, これが単調であるなら単調減少である. ここで $x(t)$ が単調減少でないと仮定すると, ある $a, b \in [0, T]$ が存在して $a < b$ かつ $x(a) < x(b)$ をみताす. $x(b) > x(T) = 0$ に注意して区間 $[a, b], [b, T]$ で平均値の定理を用いると, ある 2 数 $c \in [a, b], d \in [b, T]$ が存在して $x'(c) > 0, x'(d) < 0$. 中間値の定理よりある $e \in (c, d)$ が存在して $x'(e) = 0$. 以上より $x(t)$ は $t = e$ で極大値を取ることが分かる. ここで $x^*(t)$ を

$$x^*(t) = \begin{cases} \max(x(t), x(e)) & (t \in [0, e]) \\ x(t) & (t \in (e, T]) \end{cases}$$

と定めると $x(t) \leq x^*(t), |x'(t)| \geq |x'^*(t)|$ をみताす. よって $\mathcal{A}(x, y) < \mathcal{A}(x^*, y)$. これは $x(t)$ が最小点であることに反する. \square

ここで, 非等方ケプラー問題を

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_x, & \dot{y} &= p_y, \\ \dot{p}_x &= -\frac{\partial V}{\partial x}, & \dot{p}_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} \end{aligned}$$

と表すと,

$$R_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

について反転対称系となる. したがって $t \in I$ における解を $\mathbf{q}(t) = (x(t), y(t))$ とすると, 系 2.2 より, $\mathbf{q}_1(t) = (-x(-t), y(-t)), \mathbf{q}_2(t) = (x(-t), -y(-t)), \mathbf{q}_3(t) = (-x(t), -y(t))$ も解である. 以上の解軌道を組み合わせることで図 3 のような周期 $4T$ の周期解が得られる.

以上の議論から, (少なくとも) $\mu > 1/16$ の範囲で周期解を持つことが証明できた. これと本節の冒頭で触れたパラメータ μ の性質から $\mu > 1$ の範囲も考慮すると, (少なくとも) $1/16 < \mu < 16$ の範囲で周期解を持つことが結論できる.

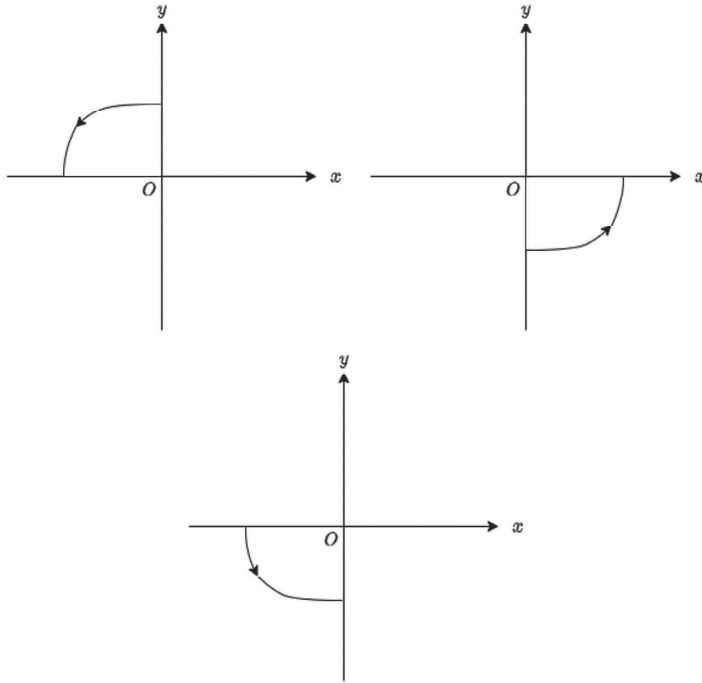


図2 反転対称な解

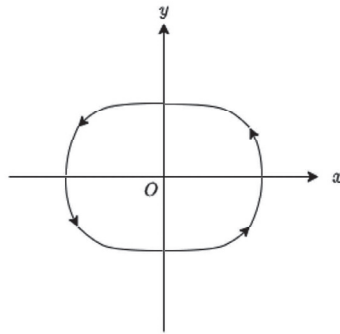


図3 得られる周期解

5 数値計算結果

テスト曲線の作用積分に含まれる楕円積分 $K(k)$ の値は、一般の k に対して求めることはできないが⁵、数値計算によって値を近似的に計算することができる。以下では条件 $a = \sqrt{\mu}b$ を課さない楕円をテスト曲線として衝突解が除去できる範囲を考察する。

数値計算を行ううえで不等式の条件式は扱いづらいため、等式制約 $\mathcal{A}(\mathbf{q}_{\text{col}}) = \mathcal{A}(\mathbf{q}_{\text{test}})$ と置き換えて考えると、これまでの議論から次式を得る。なお $k = \sqrt{1 - \frac{B^2}{A^2}}$ とした。

$$\frac{3}{2}\pi^{2/3} = \frac{\pi^2 A^2}{16} \left(1 + \frac{1-k^2}{\mu}\right) + \frac{2}{\pi A} K(k)$$

これは μ について解くことができて、 $a > \sqrt{\mu}b$ の場合

$$\mu^{-1} = \frac{1}{A^3(1-k^2)} \left(24\pi^{-4/3}A - 32\pi^{-3}K(k) - A^3\right)$$

なお、 $a < \sqrt{\mu}b$ の場合も同様に計算できて、 $k = \sqrt{1 - \frac{A^2}{B^2}}$ とすると

$$\mu^{-1} = \frac{1}{B^3} \left(24\pi^{-4/3}B - 32\pi^{-3}K(k) - (1-k^2)B^3\right)$$

この式を用いて、右辺の (A, B) を変化させた時の μ の値を Python を用いて計算した。これにより μ の最小値を求めたところ、

$$\mu = 0.04393488\dots$$

となった。したがって、楕円をテスト曲線とした場合は、 μ がこの値より大きく、この値の逆数より小さい範囲で衝突解を除去できることがわかる。

謝辞

著者の一人柴山は、科研費 (18K03366) の助成を受けた。

参考文献

- [1] A. Chenciner, and R. Montgomery, A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses. *Ann. of Math.* **152** (2000) 881-902.
- [2] R. L. Devaney, Collision orbits in the anisotropic Kepler problem. *Invent. Math.* **45** (1978) 221-251.
- [3] W. B. Gordon, A minimizing property of Keplerian orbits. *Amer. J. Math.* **99** (1977), 961 - 971.
- [4] M. C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*. Springer. (1991) 156-172.
- [5] S. Iguchi, and M. Shibayama, Variational proof of the existence of periodic orbits in the Anisotropic Kepler problem, in preparation.
- [6] 小磯憲史, 変分問題, 共立出版, 1998.
- [7] K. Sumiya, K. Kubo, and T. Shimada, A new shooting algorithm for the search of periodic orbits. *Artif Life Robotics.* **19** (2014) 262-269.

- [8] L. Tonelli, The calculus of variations. *Bull. Amer. Math. Soc.* **31**(1925) 163-172.
- [9] 梅村浩, 楕円関数論 : 楕円曲線の解析学, 東京大学出版会, 2000.
- [10] H. Yoshida, Exponential instability of collision orbit in the anisotropic Kepler problem. *Celestial Mech.* **40** (1987) 51-66.