非定常 Ruijisenaars 関数と DIM 代数

東京大学・数理科学研究科　大久保勇輔
Yusuke Ohkubo
Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

概 要

Macdonald 関数のある種の Affine 類似として, 非定常 Ruijisenaars 関数と呼ばれる関数が 2019 年に導入された．この関数はあるパラメータの極限によって, 楕円 Ruijsenaas 作用素の固有関数を与えることが予想されている．楕円 Ruijsenaars 作用素の固有値問題は未解決であり, 固有関数の組み合わせ論的な明示公式などは与えられていない．一方, 非定常 Ruijisenaars 関数は組み合わせ論的な表示で定義されており, この関数の性質を調べることで, 楕円 Ruijsenaars 作用素の固有値問題にアプローチすることができる．本稿ではこの関数のある特殊化（楕円 Ruijsenaars 関数への極限とは異なる）に対して, Ding-Iohara-Miki 代数（量子 toroidal $\mathfrak{gl}_1$ 代数）の intertwining 作用素による実現を与える．さらに, Macdonald 関数のある種の楕円化と非定常 Ruijisenaars 関数との対応についても簡単に説明する．尚, 本稿は [1] の内容に基づく．

記号

本稿では以下のような q-階乗積や楕円 Gamma 関数の記号を用いる：

$$(a;q)_\infty := \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{n-1}a), \quad (a;q)_m := \frac{(a;q)_\infty}{(aq^m;q)_\infty}, \tag{0.1}$$

$$(a;q,p)_\infty := \prod_{n,m=1}^{\infty}(1-q^{n-1}p^{m-1}a), \tag{0.2}$$

$$\Gamma(a;q,p) := \frac{(qp/a;q,p)_\infty}{(a;q,p)_\infty}. \tag{0.3}$$

また整数 $n \leq m$ に対して,

$$\overset{\curvearrowright}{\bigotimes_{n\leq i\leq m}} A_i := A_n \otimes A_{n+1} \otimes \cdots \otimes A_m \tag{0.4}$$

と書く．パーティションの記号は基本的には [2] に従う．本稿では 0 のみからなるパーティションを $\emptyset = (0,0,\ldots)$ と書き, P によってパーティション全体の集合を表す.

1　Macdonald 関数と非定常 Ruijsenaars 関数

まずは Macdonald 関数について説明する．本稿では, 対称多項式環上で定義される通常の Macdonald 多項式とは異なり, 形式的冪級数環

$$\Lambda = \mathbb{C}[[x_2/x_1, x_3/x_2 \ldots, x_N/x_{N-1}]] \tag{1.1}$$

上の関数を考える.

Definition 1.1. q, t, $\boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_N)$ を generic な複素パラメータとする. 形式的冪級数環 Λ 上の Macdonald 作用素 $D_N(\boldsymbol{s}; q, t)$ を

$$D_N(\boldsymbol{s}; q, t) := \sum_{k=1}^{N} s_k \prod_{1 \le \ell < k} \frac{1 - t x_k / x_\ell}{1 - x_k / x_\ell} \prod_{k < \ell \le n} \frac{1 - x_\ell / t x_k}{1 - x_\ell / x_k} T_{q, x_k}, \tag{1.2}$$

と定義する. ここに T_{q,x_k} は

$$T_{q,x_k} F(x_1, \dots, x_N) = F(x_1, \dots, q x_k, \dots, x_N). \tag{1.3}$$

によって定まる差分作用素である.

この作用素 D_N の固有関数には次のような組み合わせ論的明示公式が与えられており, 漸近自由な Macdonald 関数と呼ばれている. 本稿では単にこれを Macdonald 関数と呼ぶことにする.

Definition 1.2. 関数 $f^{\mathfrak{gl}_N}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{s}|q, t) \in \mathbb{C}[[x_2/x_1, x_3/x_2, \dots, x_N/x_{N-1}]]$ を

$$f^{\mathfrak{gl}_N}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{s}|q, t) = \sum_{\theta \in M_N} c_N(\theta; \boldsymbol{s}|q, t) \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j / x_i)^{\theta_{i,j}} \tag{1.4}$$

によって定義する. ここに, $M_N = \{\theta = (\theta_{i,j})_{1 \le i,j \le N} | \theta_{i,j} \in \mathbb{Z}_{\ge 0},\ \theta_{k,l} = 0 \text{ if } k \ge l\}$ は非負整数を成分に持つ上三角（ただし対角成分が 0）な $N \times N$ 行列全体の集合とする. また係数 $c_N(\theta; \boldsymbol{s}|q, t)$ は

$$\begin{aligned} c_N(\theta; \boldsymbol{s}|q, t) = &\prod_{k=2}^{N} \prod_{1 \le i < j \le k} \frac{(q^{\sum_{a>k}(\theta_{ia} - \theta_{ja})} t s_j / s_i; q)_{\theta_{ik}}}{(q^{\sum_{a>k}(\theta_{ia} - \theta_{ja})} q s_j / s_i; q)_{\theta_{ik}}} \\ &\times \prod_{k=2}^{N} \prod_{1 \le i \le j < k} \frac{(q^{-\theta_{jk} + \sum_{a>k}(\theta_{ia} - \theta_{ja})} q s_j / t s_i; q)_{\theta_{ik}}}{(q^{-\theta_{jk} + \sum_{a>k}(\theta_{ia} - \theta_{ja})} s_j / s_i; q)_{\theta_{ik}}} \end{aligned} \tag{1.5}$$

と定義する.

Fact 1.3 ([3, 4, 5])**.** 関数 $f^{\mathfrak{gl}_N}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{s}|q, t)$ は定数倍を除いて, 固有値方程式

$$D_N(\boldsymbol{s}; q, t) f^{\mathfrak{gl}_N}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{s}|q, t) = (s_1 + \cdots + s_N) f^{\mathfrak{gl}_N}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{s}|q, t) \tag{1.6}$$

の唯一の解である.

Remark 1.4. 通常の Macdonald 多項式 [2] は対称多項式環 $\mathbb{Q}(q, t)[x_1, \dots, x_N]^{\mathfrak{S}_N}$ 上に作用する差分作用素

$$\mathcal{D}_x = \sum_{i=1}^{N} \prod_{\substack{1 \le j \le N \\ j \ne i}} \frac{x_j - t x_i}{x_j - x_i} T_{q, x_i} \tag{1.7}$$

の固有関数として定義され, （また, これを形式的に無限変数へ拡張したものを Macdonald 対称関数と呼ぶ. ）パーティション $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ によってパラメトライズされる. 本稿で扱

う漸近自由な Macdonald 関数 $f^{\mathfrak{gl}_N}$ は, パラメータ s_i を $s_i = q^{\lambda_i} t^{N-i}$ と特殊化すると, 通常の Macdonald 多項式に対応する. つまり, パーティションの長さが $\ell(\lambda) \le N$ のとき $s_i = q^{\lambda_i} t^{N-i}$ とすると, 冪級数 $x^\lambda f^{\mathfrak{gl}_N}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{s}|q,t)$ $(x^\lambda := \prod_{i\ge1} x_i^{\lambda_i})$ は有限和の多項式となり, 固有値方程式

$$\mathcal{D}_x x^\lambda f^{\mathfrak{gl}_N}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{s}|q,t) = \sum_{i=1}^N q^{\lambda_i} t^{N-i} x^\lambda f^{\mathfrak{gl}_N}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{s}|q,t) \tag{1.8}$$

を満たす. このように $f^{\mathfrak{gl}_N}$ は全てのパーティションに付随する Macdonald 多項式を包括したものになっている.

非定常 Ruijsenaars 関数はこの Macdonald 関数 $f^{\mathfrak{gl}_N}$ をある種 Affine 化したものになっており, 次のように定義される.

Definition 1.5 ([6])**.** 関数 $f^{\widehat{\mathfrak{gl}}_N}(\boldsymbol{x}, p|\boldsymbol{s}, \kappa|q,t) \in \mathbb{Q}(q,t,\boldsymbol{s})[[px_2/x_1, \ldots, px_N/x_{N-1}, px_1/x_N]]$ を

$$f^{\widehat{\mathfrak{gl}}_N}(\boldsymbol{x}, p|\boldsymbol{s}, \kappa|q,t) = \sum_{\lambda^{(1)},\ldots,\lambda^{(N)}\in\mathsf{P}} \prod_{i,j=1}^N \frac{\mathsf{N}^{(j-i|N)}_{\lambda^{(i)},\lambda^{(j)}}(ts_j/s_i|q,\kappa)}{\mathsf{N}^{(j-i|N)}_{\lambda^{(i)},\lambda^{(j)}}(s_j/s_i|q,\kappa)} \cdot \prod_{\beta=1}^N \prod_{\alpha\ge1} (px_{\alpha+\beta}/tx_{\alpha+\beta-1})^{\lambda^{(\beta)}_\alpha} \tag{1.9}$$

と定義する. ここに変数 x_i の添字は巡回的に $x_{i+N} = x_i$ と同一視し,

$$\begin{aligned} &\mathsf{N}^{(k|N)}_{\lambda,\mu}(u|q,\kappa) = \mathsf{N}^{(k)}_{\lambda,\mu}(u|q,\kappa) \\ &= \prod_{\substack{j\ge i\ge1 \\ j-i\equiv k \pmod N}} (uq^{-\mu_i+\lambda_{j+1}}\kappa^{-i+j}; q)_{\lambda_j-\lambda_{j+1}} \cdot \prod_{\substack{\beta\ge\alpha\ge1 \\ \beta-\alpha\equiv -k-1 \pmod N}} (uq^{\lambda_\alpha-\mu_\beta}\kappa^{\alpha-\beta-1}; q)_{\mu_\beta-\mu_{\beta+1}} \end{aligned} \tag{1.10}$$

と置いた.

Macdonald 多項式は極限 $\hbar \to 0$（$q = e^\hbar, t = q^\beta$ とおいて β を固定）において Jack 多項式と呼ばれる対称多項式に退化する [2]. Jack 多項式とは Calogero-Sutherland 模型というある可積分な一次元量子多体模型のハミルトニアンの固有値方程式（CS 方程式）の解である. これと同様の極限において, 非定常 Ruijsenaars 関数は非定常楕円 CS 方程式 [7, 8] の解を与えることが予想されている. 非定常楕円 CS 方程式とは楕円版の CS 方程式の非定常化（ハミルトニアンが時間依存するような形への変形）であり, Atai, Langmann によって 2019 年に導入された. $f^{\widehat{\mathfrak{gl}}_N}$ は, 別の $t \to 0$ に付随する極限においては Affine 戸田ハミルトニアンの非定常化の固有関数を与えるということや, $\kappa \to 1$ 極限では楕円 Ruijsenaars 作用素の固有関数を与えるということも予想されている [6]. ただし, 非定常 Ruijsenaars 関数を固有関数に持つ差分作用素は未だ見つかっていない. [1] [6] では他にも, 非定常 Ruijsenaars 関数 $f^{\widehat{\mathfrak{gl}}_N}$ の満たす対称性など, 様々な予想が与えられている.

2 DIM 代数

本稿では Macdonald 関数 $f^{\mathfrak{gl}_N}$ や非定常 Ruijsenaars 関数 $f^{\widehat{\mathfrak{gl}}_N}$ の Ding-Iohara-Miki 代数に関する性質を紹介する. まずは Ding-Iohara-Miki 代数（DIM 代数）の定義を与える. DIM 代

[1]正確には [9] によって差分作用素の予想が与えられているが, 楕円 Ruijsenaars 作用素とは別のタイプのものであることが分かっており, この差分作用素の極限をとっても楕円 Ruijsenaars 作用素は現れない.

数は量子 toroidal 代数や楕円 Hall 代数とも呼ばれる代数であり, Affine 量子群のある種の一般化である．この代数は Macdonald 多項式と同じ 2 つの複素パラメータ $q, t \in \mathbb{C}^\times$ を持つ.

Definition 2.1 ([10, 11])**.** Ding-Iohara-Miki 代数 $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{q,t}$ とは生成元

$$x^\pm(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n^\pm z^{-n}, \quad \psi^\pm(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \psi_n^\pm z^{-n} \tag{2.1}$$

にって生成される単位的結合代数であり, 以下の定義関係式を満たす：

$$\psi^+(z)x^\pm(w) = g(c^{\mp 1/2}w/z)^{\mp 1}x^\pm(w)\psi^+(z), \qquad \psi^-(z)x^\pm(w) = g(c^{\mp 1/2}z/w)^{\pm 1}x^\pm(w)\psi^-(z), \tag{2.2}$$

$$\psi^\pm(z)\psi^\pm(w) = \psi^\pm(w)\psi^\pm(z), \qquad \psi^+(z)\psi^-(w) = \frac{g(c^{+1}w/z)}{g(c^{-1}w/z)}\psi^-(w)\psi^+(z), \tag{2.3}$$

$$[x^+(z), x^-(w)] = \frac{(1-q)(1-1/t)}{1-q/t}\Big(\delta(c^{-1}z/w)\psi^+(c^{1/2}w) - \delta(cz/w)\psi^-(c^{-1/2}w)\Big), \tag{2.4}$$

$$G^\mp(z/w)x^\pm(z)x^\pm(w) = G^\pm(z/w)x^\pm(w)x^\pm(z). \tag{2.5}$$

ここに

$$g(z) = \frac{G^+(z)}{G^-(z)}, \qquad G^\pm(z) = (1-q^{\pm 1}z)(1-t^{\mp 1}z)(1-q^{\mp 1}t^{\pm 1}z), \qquad \delta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n \tag{2.6}$$

とした.

Remark 2.2. $x^\pm(z)$ に関する Serr 関係式を DIM 代数の定義関係式に含める場合もある．ただし本稿で扱う表現では Serr 関係式は自動的に満たされるため省略した.

Fact 2.3 ([10])**.** DIM 代数 $\mathcal{U}$ は（位相的な）Hopf 代数の構造を持ち, 余積 Δ は以下の公式で与えられる：

$$\Delta(c^{\pm 1/2}) = c^{\pm 1/2} \otimes c^{\pm 1/2}, \tag{2.7}$$

$$\Delta(x^+(z)) = x^+(z) \otimes 1 + \psi^-(c_{(1)}^{1/2}z) \otimes x^+(c_{(1)}z), \tag{2.8}$$

$$\Delta(x^-(z)) = x^-(c_{(2)}z) \otimes \psi^+(c_{(2)}^{1/2}z) + 1 \otimes x^-(z), \tag{2.9}$$

$$\Delta(\psi^\pm(z)) = \psi^\pm(c_{(2)}^{\pm 1/2}z) \otimes \psi^\pm(c_{(1)}^{\mp 1/2}z). \tag{2.10}$$

ここに $c_{(1)}^{\pm 1/2} = c^{\pm 1/2} \otimes 1$, $c_{(2)}^{\pm 1/2} = 1 \otimes c^{\pm 1/2}$ とした．対合射と余単位射については省略する.

Remark 2.4. 生成元 ψ_0^+, ψ_0^- は DIM 代数の中心となっている．一般に中心元が $c = (t/q)^{n/2}$, $(\psi_0^+/\psi_0^-)^{1/2} = (q/t)^{m/2}$ として作用するとき, この代数の表現をレベル (n, m) 表現と呼ぶ.

本稿ではこの代数の 2 種類の表現を用いる．1 つ目は交換関係

$$[a_n, a_m] = n\frac{1-q^{|n|}}{1-t^{|n|}}\delta_{n+m,0} \tag{2.11}$$

によって定まる Heisenberg 代数 $\{a_n | n \in \mathbb{Z}\}$ によって構成される．$\mathcal{F}$ を真空 $|0\rangle$（$n > 0$ に対して $a_n|0\rangle = 0$ によって定まる最高ウエイトベクトル）によって生成される Fock 空間とする.

Fact 2.5 ([12])**.** u を 0 でない複素パラメータとする. 以下によって定まる代数準同型 $\rho_u : \mathcal{U} \to \mathrm{End}(\mathcal{F})$ は DIM 代数の表現になっている：

$$\begin{aligned} &c^{1/2} \mapsto (t/q)^{1/4}, \quad x^+(z) \mapsto u\eta(z), \quad x^-(z) \mapsto u^{-1}\xi(z), \\ &\psi^+(z) \mapsto \varphi^+(z), \quad \psi^-(z) \mapsto \varphi^-(z)\,, \end{aligned} \tag{2.12}$$

ここに,

$$\eta(z) = \exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-t^{-n}}{n} a_{-n} z^n\Big) \exp\Big(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-t^n}{n} a_n z^{-n}\Big) \tag{2.13}$$

$$\xi(z) = \exp\Big(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-t^{-n}}{n} q^{-n/2} t^{n/2} a_{-n} z^n\Big) \exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-t^n}{n} q^{-n/2} t^{n/2} a_n z^{-n}\Big). \tag{2.14}$$

$$\varphi^+(z) = \exp\Big(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-t^n}{n} (1-t^n q^{-n}) q^{n/4} t^{-n/4} a_n z^{-n}\Big), \tag{2.15}$$

$$\varphi^-(z) = \exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-t^{-n}}{n} (1-t^n q^{-n}) q^{n/4} t^{-n/4} a_{-n} z^n\Big). \tag{2.16}$$

とした. またこの表現の構造を持つ Fock 空間を $\mathcal{F}_u^{(1,0)}$ と書き, horizontal 表現とも呼ぶ.

もう一つの表現はレベル $(0,1)$ 表現（vertical 表現とも呼ぶ）で, パーティション λ によってパラメトライズされるベクトル $|\lambda\rangle$ の張る空間 $\mathcal{F}^{(0,1)} = Spann\{|\lambda\rangle\}$ 上の表現である.

Fact 2.6 ([13, 14])**.** u を不定元とする. 以下の作用は DIM 代数の $\mathcal{F}^{(0,1)}$ 上の表現を与える：

$$c^{1/2}\,|\lambda\rangle = |\lambda\rangle\,, \tag{2.17}$$

$$x^+(z)\,|\lambda\rangle = \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)+1} A^+_{\lambda,i}\,\delta(q^{\lambda_i} t^{-i+1} u/z)\,|\lambda + \mathbf{1}_i\rangle\,, \tag{2.18}$$

$$x^-(z)\,|\lambda\rangle = q^{1/2} t^{-1/2} \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} A^-_{\lambda,i}\,\delta(q^{\lambda_i-1} t^{-i+1} u/z)\,|\lambda - \mathbf{1}_i\rangle\,, \tag{2.19}$$

$$\psi^+(z)\,|\lambda\rangle = q^{1/2} t^{-1/2} B^+_\lambda(u/z)\,|\lambda\rangle\,, \tag{2.20}$$

$$\psi^-(z)\,|\lambda\rangle = q^{-1/2} t^{1/2}\, B^-_\lambda(z/u)\,|\lambda\rangle\,. \tag{2.21}$$

ここに, $A^\pm_{\lambda,i} \in \mathbb{Q}(q,t)$ と $B^+_\lambda(z) \in \mathbb{Q}(q,t)[[z]]$ は

$$A^+_{\lambda,i} = (1-t) \prod_{j=1}^{i-1} \frac{(1-q^{\lambda_i-\lambda_j} t^{-i+j+1})(1-q^{\lambda_i-\lambda_j+1} t^{-i+j-1})}{(1-q^{\lambda_i-\lambda_j} t^{-i+j})(1-q^{\lambda_i-\lambda_j+1} t^{-i+j})}, \tag{2.22}$$

$$A^-_{\lambda,i} = (1-t^{-1}) \frac{1-q^{\lambda_{i+1}-\lambda_i}}{1-q^{\lambda_{i+1}-\lambda_i+1} t^{-1}} \prod_{j=i+1}^{\infty} \frac{(1-q^{\lambda_j-\lambda_i+1} t^{-j+i-1})(1-q^{\lambda_{j+1}-\lambda_i} t^{-j+i})}{(1-q^{\lambda_{j+1}-\lambda_i+1} t^{-j+i-1})(1-q^{\lambda_j-\lambda_i} t^{-j+i})}, \tag{2.23}$$

$$B^+_\lambda(z) = \frac{1-q^{\lambda_1-1} tz}{1-q^{\lambda_1} z} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(1-q^{\lambda_i} t^{-i} z)(1-q^{\lambda_{i+1}-1} t^{-i+1} z)}{(1-q^{\lambda_{i+1}} t^{-i} z)(1-q^{\lambda_i-1} t^{-i+1} z)}, \tag{2.24}$$

$$B^-_\lambda(z) = \frac{1-q^{-\lambda_1+1} t^{-1} z}{1-q^{-\lambda_1} z} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(1-q^{-\lambda_i} t^i z)(1-q^{-\lambda_{i+1}+1} t^{i-1} z)}{(1-q^{-\lambda_{i+1}} t^i z)(1-q^{-\lambda_i+1} t^{i-1} z)}. \tag{2.25}$$

とした.

この表現の構造を持つ Fock 空間を $\mathcal{F}_u^{(0,1)}$ と書くことにする．以上の２つの表現を用いて, DIM 代数の intertwining 作用素を構成することができる．さらにそれを用いて, Macdonald 関数や非定常 Ruijsenaass 関数を実現することができる.

Fact 2.7 ([15])**.** M を整数とする．$w = -vu$ のとき, 線形作用素（intertwining 作用素）

$$\Phi\begin{bmatrix}(1, M+1), w \\ (0,1), v; (1, M), u\end{bmatrix} : \mathcal{F}_v^{(0,1)} \otimes \mathcal{F}_u^{(1,M)} \longrightarrow \mathcal{F}_w^{(1,M+1)} \tag{2.26}$$

が唯一存在して, $\langle 0| \Phi(|\emptyset\rangle \otimes |0\rangle) = 1$ と

$$a\Phi = \Phi\Delta(a) \qquad (\forall a \in \mathcal{U}) \tag{2.27}$$

を満たす．同様に

$$\Phi^*\begin{bmatrix}(1, M), u; (0,1), v \\ (1, M+1), -vu\end{bmatrix} : \mathcal{F}_{-uv}^{(1,M+1)} \longrightarrow \mathcal{F}_u^{(1,M)} \otimes \mathcal{F}_v^{(0,1)} \tag{2.28}$$

が唯一存在して $(\langle 0| \otimes \langle\emptyset|)\Phi^* |0\rangle = 1$ と

$$\Delta(a)\Phi^* = \Phi^* a \qquad (\forall a \in \mathcal{U}) \tag{2.29}$$

を満たす.

この intertwining 作用素の行列要素は Iqbal, Kozcaz, Vafa（あるいは粟田, 菅野）の refined topological vertex と呼ばれる因子に一致し，５次元ゲージ理論の Nekrasov 分配関数を再現することができる [15]. Intertwining 作用素 Φ, Φ^* は３つの Fock 空間の間の写像（２つの Fock 空間のテンソル積から１つの Fock 空間への写像, もしくはその逆）であるが, vertical 表現におけるベクトルを固定して，２つの horzontal 表現の間の写像を取り出すことができる.

Definition 2.8. パーティション λ に対して,

$$\Phi_\lambda\begin{bmatrix}(1, M+1), -uv \\ (0,1), v; (1, M), u\end{bmatrix} : \mathcal{F}_u^{(1,M)} \to \mathcal{F}_{-uv}^{(1,M+1)} \tag{2.30}$$

を

$$\Phi_\lambda(\alpha) = \Phi(|\lambda\rangle \otimes \alpha) \qquad (\forall \alpha \in \mathcal{F}_u^{(1,M)}) \tag{2.31}$$

によって定義する．同様に,

$$\Phi_\lambda^*\begin{bmatrix}(1, M), u; (0,1), v \\ (1, M+1), -vu\end{bmatrix} : \mathcal{F}_{-uv}^{(1,M+1)} \to \mathcal{F}_u^{(1,M)} \tag{2.32}$$

を

$$\Phi^*(\alpha) = \sum_{\lambda \in \mathsf{P}} \Phi_\lambda^*(\alpha) \otimes |\lambda\rangle \qquad (\forall \alpha \in \mathcal{F}_{-uv}^{(1,M+1)}). \tag{2.33}$$

と定義する.

この $\Phi_\lambda, \Phi_\lambda^*$ は Heisenberg 代数 a_n によって具体的に書くことができる.（本稿では省略する. ）その a_n による表示を用いて, intertwining 作用素の合成やその行列要素を実際に計算することができる.

Definition 2.9. 便宜上次の記号を導入する：

$$\Phi^{\mathrm{cr.}}\left[v;\begin{matrix} us/v \\ s\end{matrix};u\right]=\frac{\Phi^{*}\left[\begin{matrix}(1,0),v;(0,1),us/v\\(1,1),-us\end{matrix}\right]\circ\Phi\left[\begin{matrix}(1,1),-us\\(0,1),s;(1,0),u\end{matrix}\right]}{\langle 0|\,\Phi^{*}_{\emptyset}\left[\begin{matrix}(1,0),v;(0,1),us/v\\(1,1),-us\end{matrix}\right]\Phi_{\emptyset}\left[\begin{matrix}(1,1),-us\\(0,1),s;(1,0),u\end{matrix}\right]|0\rangle}, \tag{2.34}$$

$$\Phi^{\mathrm{cr.}}\left[v;\begin{matrix} us/v,\mu \\ s,\lambda\end{matrix};u\right]=\frac{\Phi^{*}_{\mu}\left[\begin{matrix}(1,0),v;(0,1),us/v\\(1,1),-us\end{matrix}\right]\Phi_{\lambda}\left[\begin{matrix}(1,1),-us\\(0,1),s;(1,0),u\end{matrix}\right]}{\langle 0|\,\Phi^{*}_{\emptyset}\left[\begin{matrix}(1,0),v;(0,1),us/v\\(1,1),-us\end{matrix}\right]\Phi_{\emptyset}\left[\begin{matrix}(1,1),-us\\(0,1),s;(1,0),u\end{matrix}\right]|0\rangle}. \tag{2.35}$$

3 Macdonald 関数の DIM 代数の intertwining 作用素による表示

前節で導入した intertwining 作用素と Macdonald 関数に深い関係がある．この節では intertwining 作用素を組み合わせていくことで，Macdonald 関数と非定常 Ruijsenaars 関数が実現できることを説明する．

Definition 3.1. $\boldsymbol{u}=(u_1,\dots,u_N)$ と $\boldsymbol{v}=(v_1,\dots,v_N)$ を N 個のパラメータの組とする．作用素

$$T^{V}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},w),\,\mathcal{T}^{V}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},w):\overset{\curvearrowright}{\bigotimes_{1\le i\le N}}\mathcal{F}^{(1,0)}_{u_i}\to\overset{\curvearrowright}{\bigotimes_{1\le i\le N}}\mathcal{F}^{(1,0)}_{v_i} \tag{3.1}$$

を

$$T^{V}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},w)=\sum_{\mu^{(1)},\dots,\mu^{(N-1)}\in\mathsf{P}}\ \overset{\curvearrowright}{\bigotimes_{1\le k\le N}}\Phi^{\mathrm{cr.}}\left[v_k;\begin{matrix}\frac{u_k}{v_k}w_k,\mu^{(k)}\\ w_k,\mu^{(k-1)}\end{matrix};u_k\right]\quad(\mu^{(0)}=\mu^{(N)}=\emptyset), \tag{3.2}$$

$$\mathcal{T}^{V}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},w)=\frac{T^{V}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},w)}{\langle\boldsymbol{0}|\,T^{V}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},w)\,|\boldsymbol{0}\rangle} \tag{3.3}$$

と定義する．ここに，$w_k=\frac{u_1\cdots u_{k-1}}{v_1\cdots v_{k-1}}w$, $|\boldsymbol{0}\rangle=|0\rangle\otimes\cdots|0\rangle$ とした．

Notation 3.2.

$$\mathcal{F}^{(N,0)}_{\boldsymbol{u}}=\overset{\curvearrowright}{\bigotimes_{1\le i\le N}}\mathcal{F}^{(1,0)}_{u_i} \tag{3.4}$$

と書く．

この作用素 $T^{V}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},w)$ は $N=2$ の場合に，$q\to1$ に付随する極限において，Virasoro 代数の Primary 場に対応することが直接計算により示されている [1]．N が一般の場合にも W_N-代数の Primary 場に相当し，5 次元 AGT 対応（T^{V} のある種の相関関数と 5 次元ゲージ理論の Nekrasov 分配関数との対応）において重要な役割を演じる [16]．

次の $\mathcal{T}^{H}$ は $\mathcal{T}^{V}$ の双対版（圏論的な意味ではなく，vertical 表現と horizontal 表現の役割を入れ替えたもの）である．

Definition 3.3. 合成

$$\left(\overset{\curvearrowright}{\bigotimes_{1\le i\le N}}\mathcal{F}^{(0,1)}_{v_i}\right)\otimes\mathcal{F}^{(1,0)}_{w'}\xrightarrow{id\otimes\cdots\otimes id\otimes\Phi^{\mathrm{cr.}}}\left(\overset{\curvearrowright}{\bigotimes_{1\le i\le N-1}}\mathcal{F}^{(0,1)}_{v_i}\right)\otimes\mathcal{F}^{(1,0)}_{\frac{v_N}{u_N}w'}\otimes\mathcal{F}^{(0,1)}_{u_N}$$
$$\xrightarrow{id\otimes\cdots\otimes id\otimes\Phi^{\mathrm{cr.}}\otimes id}\cdots\xrightarrow{\Phi^{\mathrm{cr.}}id\otimes\cdots\otimes id}\mathcal{F}^{(1,0)}_{w}\otimes\overset{\curvearrowright}{\bigotimes_{1\le i\le N}}\mathcal{F}^{(0,1)}_{u_i}\tag{3.5}$$

を取り（$w'=\frac{u_1\cdots u_N}{v_1\ldots v_N}w$）, 作用素

$$T^H(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},w):\overset{\curvearrowright}{\bigotimes_{1\le i\le N}}\mathcal{F}^{(0,1)}_{v_i}\to\overset{\curvearrowright}{\bigotimes_{1\le i\le N}}\mathcal{F}^{(0,1)}_{u_i}\tag{3.6}$$

を (3.5) のレベル $(1,0)$ 表現に関する真空期待値 $\langle 0|\cdots|0\rangle$ として定義する. さらに作用素 $\mathcal{T}^H(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},w)$ を

$$\mathcal{T}^H(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},w)=\frac{T^H(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},w)}{\langle\boldsymbol{\emptyset}|\,T^H(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},w)\,|\boldsymbol{\emptyset}\rangle}\tag{3.7}$$

と規格化したものとする. ただし, $|\boldsymbol{\emptyset}\rangle=|\emptyset\rangle\otimes\cdots\otimes|\emptyset\rangle$ とした.

さらに次のようなパラメータの特殊化を考える.

Definition 3.4. 番号 $1\le i\le N$ に対して,

$$\widetilde{\mathcal{T}}^V_i(z)=\widetilde{\mathcal{T}}^V_i(\boldsymbol{u};z):=T^V\big(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u};z\big)\Big|_{\substack{v_k\to\gamma^{-1}t^{-\delta_{k,i}}u_k\\(1\le k\le N)}},\tag{3.8}$$

$$\widetilde{\mathcal{T}}^H_i(z)=\widetilde{\mathcal{T}}^H_i(\boldsymbol{u};z):=T^H\big(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u};z\big)\Big|_{\substack{v_k\to\gamma^{-1}t^{-\delta_{k,i}}u_k\\(1\le k\le N)}}\tag{3.9}$$

とする

上記のように合成した intertwining 作用素を用いて Macdonald 関数を再現することができた.

Theorem 3.5 (Appendix A of [16])**.**

$$\langle\boldsymbol{0}|\,\widetilde{\mathcal{T}}^V_1(\boldsymbol{x};s_1)\widetilde{\mathcal{T}}^V_2(s_2)\cdots\widetilde{\mathcal{T}}^V_N(s_N)\,|\boldsymbol{0}\rangle=\prod_{1\le i<j\le N}\frac{(qx_j/x_i;q)_\infty}{(tx_j/x_i;q)_\infty}\cdot f^{\mathfrak{gl}_N}(\boldsymbol{s};\boldsymbol{x}|q,q/t)\tag{3.10}$$

が成立する.

非定常 Ruijsenaars 関数は, $\kappa=t^{-1/N}$ の場合において, 次のような intertwing 作用素のループ, (vertical 表現に関する p-トレースに対応するもの) を用いて構成できる.

Definition 3.6. N 個のパラメータの組 $\boldsymbol{u}=(u_1,\ldots,u_N)$ に対して

$$\gamma^{-1}t^{\pm\delta_i}\cdot\boldsymbol{u}:=(\gamma^{-1}u_1,\ldots,\gamma^{-1}u_{i-1},\gamma^{-1}t^{\pm1}u_i,\gamma^{-1}u_{i+1},\ldots,\gamma^{-1}u_N)\tag{3.11}$$

と書く．$\widetilde{\mathcal{T}}_i^{\mathrm{loop}}(\boldsymbol{x},p;s):\mathcal{F}^{(N,0)}_{\gamma^{-1}t^{-\delta_i}\cdot\boldsymbol{x}}\to\mathcal{F}^{(N,0)}_{\boldsymbol{x}}$ を

$$\widetilde{\mathcal{T}}_i^{\mathrm{loop}}(\boldsymbol{x},p;s)=\sum_{\substack{\mu^{(1)},\ldots,\mu^{(N)}\in\mathsf{P}\\(\mu^{(0)}=\mu^{(N)})}}p^{|\mu^{(N)}|}\overset{\curvearrowright}{\bigotimes_{1\le k\le N}}\Phi^{\mathrm{cr.}}\left[x_k;\begin{matrix}\frac{y_1\cdots y_k}{x_1\cdots x_k}s,\mu^{(k)}\\ \frac{y_1\cdots y_{k-1}}{x_1\cdots x_{k-1}}s,\mu^{(k-1)}\end{matrix};y_k\right]\Bigg|_{y_k\to\gamma^{-1}t^{-\delta_{i,k}}x_k}\tag{3.12}$$

と定義する．

Theorem 3.7 ([1])**.** パラメータの組 $\boldsymbol{x}^{(i)}$ $(0\le i\le N)$ を

$$\boldsymbol{x}^{(i)}=(\gamma^{-i}t^{-1}x_1,\ldots,\gamma^{-i}t^{-1}x_i,\gamma^{-i}x_{i+1}\ldots,\gamma^{-i}x_N)\tag{3.13}$$

とする．このとき

$$\begin{aligned}&\langle\mathbf{0}|\,\widetilde{\mathcal{T}}_1^{\mathrm{loop}}(\boldsymbol{x}^{(0)},p;s_1)\widetilde{\mathcal{T}}_2^{\mathrm{loop}}(\boldsymbol{x}^{(1)},p;s_2)\cdots\widetilde{\mathcal{T}}_N^{\mathrm{loop}}(\boldsymbol{x}^{(N-1)},p;s_N)\,|\mathbf{0}\rangle\\&=\prod_{1\le i<j\le N}\frac{(qs_j/s_i;q)_\infty}{(ts_j/s_i;q)_\infty}\cdot f^{\widehat{\mathfrak{gl}}_N}(\boldsymbol{x}',p^{\frac{1}{N}}|\boldsymbol{s}',t^{-\frac{1}{N}}|q,t)\end{aligned}\tag{3.14}$$

が成り立つ．ここに

$$\boldsymbol{s}'=(s_1',\ldots,s_N'),\quad s_k'=t^{\frac{k}{N}}s_k,\tag{3.15}$$

$$\boldsymbol{x}'=(x_1',\ldots,x_N'),\quad x_k'=p^{-\frac{k}{N}}x_k\tag{3.16}$$

とした．

4 Macdonald 関数の楕円変形との関係

前節で述べた $f^{\widehat{\mathfrak{gl}}_N}$ の表示は vertical 表現に関するトレースと見ることもできる．つまり, 演算子 $A\in\mathrm{End}((\mathcal{F}^{(0,1)})^{\otimes N})$ に対して, $\mathrm{Tr}_p(A)$ を p の形式的冪級数

$$\mathrm{Tr}_p(A)=\sum_{\substack{\lambda^{(i)}\in\mathsf{P}\\(1\le i\le N)}}p^{\sum_{i=1}^N|\lambda^{(i)}|}\langle\boldsymbol{\lambda}|\,A\,|\boldsymbol{\lambda}\rangle,\tag{4.1}$$

$$|\boldsymbol{\lambda}\rangle=|\lambda^{(1)}\rangle\otimes\cdots\otimes|\lambda^{(N)}\rangle,\tag{4.2}$$

$$\langle\boldsymbol{\lambda}|=\langle\lambda^{(1)}|\otimes\cdots\otimes\langle\lambda^{(N)}|\tag{4.3}$$

と定義すると,

$$\langle\mathbf{0}|\,\widetilde{\mathcal{T}}_1^{\mathrm{loop}}(\boldsymbol{x}^{(0)},p;s_1)\cdots\widetilde{\mathcal{T}}_N^{\mathrm{loop}}(\boldsymbol{x}^{(N-1)},p;s_N)\,|\mathbf{0}\rangle=\mathrm{Tr}_p\Big(\widetilde{\mathcal{T}}_N^H\left(\boldsymbol{s}^{(N-1)};x_N\right)\cdots\widetilde{\mathcal{T}}_1^H\left(\boldsymbol{s}^{(0)};x_1\right)\Big)\tag{4.4}$$

と書くことができる．ここに,

$$\boldsymbol{s}^{(i)}=(\gamma^{-i}t^{-1}s_1,\ldots,\gamma^{-i}t^{-1}s_i,\gamma^{-i}s_{i+1}\ldots,\gamma^{-i}s_N),\quad 0\le i\le N\tag{4.5}$$

とした．

実は, vertical 表現と horizontal 表現の役割を入れ替えて horizontal 表現に関するトレースを計算すると, Macdonald関数の楕円ガンマ関数によるシフト $f_N^{\mathrm{ellip}}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{s}|q,t,p)$（以下の Definition 4.1）が現れる．さらに $\mathcal{T}^H$ と $\mathcal{T}^V$ が本質的に等価なものであるという対称性 [16] を用いると非定常 Ruijsenaars 関数 $f^{\widehat{\mathfrak{gl}}_N}$ の $\kappa=t^{-1/N}$ の場合と, $f_N^{\mathrm{ellip}}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{s}|q,t,p)$ が一致することが証明できる．

Definition 4.1. 関数 $f_N^{\mathrm{ellip}}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{s}|q,t,p)\in\mathbb{Q}(q,t,\boldsymbol{s})[[p,x_2/x_1,\ldots,x_N/x_{N-1}]]$ を

$$f_N^{\mathrm{ellip}}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{s}|q,t,p)=\sum_{\theta\in\mathsf{M}_N}c_N^{\mathrm{ellip}}(\theta;\boldsymbol{s}|q,q/t,p)\prod_{1\le i<j\le N}(x_j/x_i)^{\theta_{ij}}, \tag{4.6}$$

と定義する．ここに 楕円ガンマ関数の比

$$\Theta(a;q,p)_n:=\frac{\Gamma(q^na;q,p)}{\Gamma(a;q,p)},\quad \Gamma(a;q,p):=\frac{(qp/a;q,p)_\infty}{(a;q,p)_\infty}. \tag{4.7}$$

を用いて

$$\begin{aligned}c_N^{\mathrm{ellip}}(\theta;\boldsymbol{s}|q,t,p)=&\prod_{k=2}^{N}\prod_{1\le i<j\le k}\frac{\Theta(q^{\sum_{a>k}(\theta_{ia}-\theta_{ja})}ts_j/s_i;q,p)_{\theta_{ik}}}{\Theta(q^{\sum_{a>k}(\theta_{ia}-\theta_{ja})}qs_j/s_i;q,p)_{\theta_{ik}}}\\&\times\prod_{k=2}^{N}\prod_{1\le i\le j<k}\frac{\Theta(q^{-\theta_{jk}+\sum_{a>k}(\theta_{ia}-\theta_{ja})}qs_j/ts_i;q,p)_{\theta_{ik}}}{\Theta(q^{-\theta_{jk}+\sum_{a>k}(\theta_{ia}-\theta_{ja})}s_j/s_i;q,p)_{\theta_{ik}}}\end{aligned} \tag{4.8}$$

とした．

Theorem 4.2. p, s_{i+1}/s_i, x_{i+1}/x_i $(i=1,\ldots,N-1)$ px_1/x_N の形式的冪級数として,

$$f^{\widehat{\mathfrak{gl}}_N}(\boldsymbol{x}',p^{\frac{1}{N}}|\boldsymbol{s}',t^{-\frac{1}{N}}|q,t)=\mathfrak{C}\times f_N^{\mathrm{ellip}}(\boldsymbol{s};\boldsymbol{x}|q,t,p) \tag{4.9}$$

が成立する．ここに,

$$\mathfrak{C}:=\left(\frac{(pq/t;q,p)_\infty}{(p;p)_\infty(pt;q,p)_\infty}\right)^N\prod_{1\le i<j\le N}\frac{\Gamma(tx_j/x_i;q,p)}{\Gamma(qx_j/x_i;q,p)}\cdot\prod_{1\le i<j\le N}\frac{(ts_j/s_i;q)_\infty}{(qs_j/s_i;q)_\infty} \tag{4.10}$$

とした．また $\boldsymbol{x}'$ と $\boldsymbol{s}'$ は Theorem 3.7 と同じものであり

$$\boldsymbol{s}'=(s_1',\ldots,s_N'),\quad s_k'=t^{\frac{k}{N}}s_k, \tag{4.11}$$

$$\boldsymbol{x}'=(x_1',\ldots,x_N'),\quad x_k'=p^{-\frac{k}{N}}x_k. \tag{4.12}$$

証明や詳しい議論については [1] を参照されたい．またトレースを用いた楕円版に関するこれらの主張には, 楕円量子群の頂点作用素 [17] において類似の構成がなせることを注意しておく．本稿では $\kappa=t^{-1/N}$ の場合において, 非定常 Ruijsenaars 関数 $f^{\widehat{\mathfrak{gl}}_N}$ を DIM 代数の intertwining 作用素によって構成し, Macdonald 関数のある種の楕円化 f^{ellip} が等価であるということを説明した．しかし, 楕円 Ruijsenaars 関数は $\kappa=t^{-1/N}$ ではなく, 極限 $\kappa\to1$ において現れる．κ が一般の場合における $f^{\widehat{\mathfrak{gl}}_N}$ の代数的な構成や, 満たす差分方程式を見つけること, さらに [6] で提唱された多くの性質を証明することが今後の課題として残されている．

謝辞

研究集会「組合せ論的表現論の最近の進展」での講演の機会を与えてくださった世話人の方々に深く感謝致します．また共同研究で力をお貸しいただいた白石潤一准教授と福田真之君にも心より感謝いたします．著者の研究は特別研究員奨励費（18J00754）の助成を受けています．

参考文献

[1] M. Fukuda, Y. Ohkubo, J. Shiraishi, *et al.*, "Non-Stationary Ruijsenaars Functions for $\kappa = t^{-1/N}$ and Intertwining Operators of Ding-Iohara-Miki Algebra," *SIGMA* **16** (2020) 116 `arXiv:2002.00243 [math.QA]`.

[2] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials.* Oxford Classic Texts in the Physical Sciences. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, second ed., 2015.

[3] M. Noumi and J. Shiraishi, "A direct approach to the bispectral problem for the Ruijsenaars-Macdonald q-difference operators," `arXiv:1206.5364 [math.QA]`.

[4] J. Shiraishi, "A conjecture about raising operators for Macdonald polynomials," *Lett. Math. Phys.* **73** no. 1, (2005) 71–81 `arXiv:math/0503727 [math.QA]`.

[5] A. Braverman, M. Finkelberg, and J. Shiraishi, "Macdonald polynomials, Laumon spaces and perverse coherent sheaves," *Perspectives in Representation Theory, Contemp. Math* **610** (2014) 23–41.

[6] J. Shiraishi, "Affine screening operators, affine Laumon spaces and conjectures concerning non-stationary Ruijsenaars functions," *J. Integrable Syst.* **4** no. 1, (2019) xyz010 `arXiv:1903.07495 [math.QA]`.

[7] F. Atai and E. Langmann, "Series solutions of the non-stationary Heun equation," *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications* **14** no. 0, (2018) 11–32 `arXiv:1609.02525 [math-ph]`.

[8] F. Atai and E. Langmann, "Exact solutions by integrals of the non-stationary elliptic Calogero-Sutherland equation," `arXiv:1908.00529 [math-ph]`.

[9] E. Langmann, M. Noumi, and J. Shiraishi, "Basic properties of non-stationary Ruijsenaars functions," *SIGMA* **16** (2020) 105 `arXiv:2006.07171 [math-ph]`.

[10] J. Ding and K. Iohara, "Generalization and deformation of Drinfeld quantum affine algebras," *Lett. Math. Phys.* **41** (1997) 181–193.

[11] K. Miki, "A (q, γ) analog of the $W_{1+\infty}$ algebra," *J. Math. Phys.* **48** no. 12, (2007) 123520, 35.

[12] B. Feigin, K. Hashizume, A. Hoshino, J. Shiraishi, and S. Yanagida, "A commutative algebra on degenerate $\mathbb{CP}^1$ and Macdonald polynomials," *J. Math. Phys.* **50** no. 9, (2009) 095215, 42 `arXiv:0904.2291 [math.CO]`.

[13] B. L. Feigin and A. I. Tsymbaliuk, "Equivariant K-theory of Hilbert schemes via shuffle algebra," *Kyoto J. Math.* **51** no. 4, (2011) 831–854 `arXiv:0904.1679 [math.RT]`.

[14] B. Feigin, E. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, and E. Mukhin, "Quantum continuous $\mathfrak{gl}_\infty$: semiinfinite construction of representations," *Kyoto J. Math.* **51** no. 2, (2011) 337–364 `arXiv:1002.3100 [math.QA]`.

[15] H. Awata, B. Feigin, and J. Shiraishi, "Quantum Algebraic Approach to Refined Topological Vertex," *JHEP* **03** (2012) 041 `arXiv:1112.6074 [hep-th]`.

[16] M. Fukuda, Y. Ohkubo, and J. Shiraishi, "Generalized Macdonald Functions on Fock Tensor Spaces and Duality Formula for Changing Preferred Direction," `arXiv:1903.05905 [math.QA]`.

[17] H. Konno, *Elliptic quantum groups: representations and related geometry.* Springer, 2020.