Tame elements of the Grothendieck groups of special biserial algebras

大阪大学情報科学研究科　　淺井　聡太
Sota Asai
Graduate School of Information Science and Technology,
Osaka University

この報告は、伊山修氏（東京大学）との共同研究に基づいて、RIMS 共同研究「組合せ論的表現論の最近の進展」において、私が 2020 年 10 月 6 日に講演した内容をまとめたものである。

以下では、K は代数閉体とし、A は有限次元 K 多元環であるとする。$\mathsf{mod}\, A$ は有限次元右 A 加群全体がなす圏を表し、$\mathsf{proj}\, A \subset \mathsf{mod}\, A$ を有限次元射影右 A 加群からなる充満部分圏とする。

完全圏あるいは三角圏 $\mathcal{C}$ について、$K_0(\mathcal{C})$ で $\mathcal{C}$ の Grothendieck 群を表す。n を単純 A 加群の同型類の個数とすると、自由 $\mathbb{Z}$ 加群としての標準的な基底として、$K_0(\mathsf{mod}\, A)$ では単純加群の全体が与える元 $[S(1)], [S(2)], \ldots, [S(n)]$ が、$K_0(\mathsf{proj}\, A)$ では直既約射影加群の全体が与える元 $[P(1)], [P(2)], \ldots, [P(n)]$ がとれる。また、$\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\, A)$ という記号で $\mathsf{proj}\, A$ 上の複体のホモトピー圏を表すと、Grothendieck 群の自然な同型 $K_0(\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\, A)) \cong K_0(\mathsf{proj}\, A)$ が存在する。詳細は [Hap] などに記載されている。

1　序論

Q を非輪状な有限箙とし、有限次元道多元環 $A = KQ$ を考える。このとき、有限次元 A 加群 $M \in \mathsf{mod}\, A$ に対して、次元ベクトル $\underline{\mathsf{dim}}_K M \in \mathbb{Z}^{Q_0} \cong K_0(\mathsf{mod}\, A)$ が自然に定まる。次元ベクトルが $\boldsymbol{d}$ であるような加群の全体は、既約な代数多様体 $\mathsf{mod}(A, \boldsymbol{d})$ と同一視できる。さて、$\boldsymbol{d}$ を固定するとき、加群 $M \in \mathsf{mod}(A, \boldsymbol{d})$ が加群圏 $\mathsf{mod}\, A$ でどのように直既約分解されるかという問題が考えられる。Kac [Kac] は、この問いについての答えとして、次元ベクトルの**標準分解 (canonical decomposition)** という概念を導入した。ここで、次元ベクトル $\boldsymbol{d}$ の標準分解が $\bigoplus_{i=1}^m \boldsymbol{d}_i$ であるとは、稠密な Zariski 開集合 $X \subset \mathsf{mod}(A, \boldsymbol{d})$ で、「任意の $M \in X$ は、直既約加群 $M_i \in \mathsf{mod}(A, \boldsymbol{d}_i)$ $(i \in \{1, 2, \ldots, m\})$ を用いて $M = \bigoplus_{i=1}^m M_i$ と書ける」という条件を満たすものが存在するということを表す。任意の次元ベクトル $\boldsymbol{d}$ に対し、その標準分解は順番を除いて一意に存在することが、[Kac] により示されている。

一般の有限次元多元環 A については、代数多様体 $\mathsf{mod}(A, \boldsymbol{d})$ が既約とは限らないため、同様の問題を考えることは、そのままでは不可能である。そこで Derksen–Fei [DF] は、扱う圏を加群圏 $\mathsf{mod}\, A$ から射影加群圏 $\mathsf{proj}\, A$ に変え、各元 $\theta \in K_0(\mathsf{proj}\, A)$ の標準分解を提

唱した。具体的には、各 $\theta \in K_0(\mathsf{proj}\,A)$ について、$[\theta] = [P_0^\theta] - [P_1^\theta]$ を満たし共通な直既約因子を持たない 2 つの射影加群 $P_0^\theta, P_1^\theta \in \mathsf{proj}\,A$（同型を除いて一意的である）をとり、表示空間 (presentation space) $\mathsf{PHom}_A(\theta) := \mathsf{Hom}_A(P_1^\theta, P_0^\theta)$ の各元 f が定める 2 項複体 $P_1^\theta \xrightarrow{f} P_0^\theta$ がホモトピー圏 $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,A)$ において、どのように直既約分解されるかということに着目している。詳細は本文で述べるが、各元 $\theta \in K_0(\mathsf{proj}\,A)$ の標準分解も順番を除いて一意に存在することが、Derksen–Fei [DF] と Plamondon [Pla] により証明されている。特に、$K_0(\mathsf{proj}\,A)$ の元について、直和や直既約性といった概念が自然に定義されていることに着目されたい。

また、[DF] においては、直既約な元 $\theta \in K_0(\mathsf{proj}\,A)$ を、$\mathsf{PHom}_A(\theta)$ の性質に応じて、rigid, tame, wild[*1]の 3 種類に分類している。θ が rigid であるとは、$\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,A)$ の 2 項準傾複体 (2-term presilting complex) U で $[U] = \theta$ となるものが存在することを意味している。このとき、ある稠密な Zariski 開集合 $X \subset \mathsf{PHom}_A(\theta)$ 上で、任意の $f \in X$ に対して $P_f \cong U$ となり [Pla]（[DK] も参照）、$K_0(\mathsf{proj}\,A)$ において直和 $\theta \oplus \theta$ が成立する。一方、θ が tame であるとは rigid ではないが直和 $\theta \oplus \theta$ が可能であること、θ が wild であるとは tame でないことと定める。

本稿では、有限次元 K 多元環 A について、直既約な元 $\theta \in K_0(\mathsf{proj}\,A)$ がすべて rigid または tame であるとき、A は E-tame であるということにする。E-tame な多元環においては、任意の元 $\theta \in K_0(\mathsf{proj}\,A)$ が自分自身と直和可能であることから、[BKT] によって導入された実数係数 Grothendieck 群 $K_0(\mathsf{proj}\,A)_{\mathbb{R}} := K_0(\mathsf{proj}\,A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ の元に付随する数値的ねじれ対と、上記の $K_0(\mathsf{proj}\,A)$ の標準分解との相性がよいことが、私たちの研究で明らかになっている。また、A が tame 表現型であれば E-tame であることが [GLFS, PY] によって示されている。

本稿では E-tame な多元環として、特殊双列多元環 (special biserial algebra) を扱い、与えられた特殊双列多元環 A について、tame な元 $\theta \in K_0(\mathsf{proj}\,A)$ が存在するかどうかを判定し、さらに存在する場合は tame な元をいくつか得る方法について述べる。

2　一般論

この章では $K_0(\mathsf{proj}\,A)$ の標準分解や $K_0(\mathsf{proj}\,A)_{\mathbb{R}} := K_0(\mathsf{proj}\,A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ の数値的ねじれ対などについて、一般論を述べる。後者については、[BST, Bri, Y, Asa] も参照されたい。

まずは表示空間の定義を与える。

定義 2.1　[DF, Definition 1.1] $\theta \in K_0(\mathsf{proj}\,A)$ とする。

[*1] 日本語であえて書くと、剛、順、暴が適切であろうか。なお、rigid は原論文では real と称されている。

(1) 射影加群 $P_0^\theta, P_1^\theta \in \mathsf{proj}\,A$ を、$\theta = [P_0^\theta] - [P_1^\theta]$ が成立し、かつ共通な直既約因子をもたないように定める。

(2) $\mathsf{PHom}_A(\theta) := \mathsf{Hom}_A(P_1^\theta, P_0^\theta)$ を θ の**表示空間** (presentation space) と呼ぶ。

(3) 各 $f \in \mathsf{PHom}_A(\theta)$ に対し、2 項複体 $P_f \in \mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,A)$ を、$P_f := (P_1^\theta \xrightarrow{f} P_0^\theta)$ で定める。

$\mathsf{PHom}_A(\theta)$ は明らかにベクトル空間であるから、既約な代数多様体であり、Zariski 位相が入る。以下では、「一般の各元 $f \in \mathsf{PHom}_A(\theta)$ について」という言葉を、「ある稠密な開集合 $X \subset \mathsf{PHom}_A(\theta)$ の任意の元 $f \in X$ について」という意味で用いる。

次に $K_0(\mathsf{proj}\,A)$ での直和は次のように定義される。

定義 2.2 [DF, Definition 4.3] $\theta, \theta_1, \theta_2 \in K_0(\mathsf{proj}\,A)$ とする。

(1) θ_1 と θ_2 が直和可能、つまり $\theta_1 \oplus \theta_2$ であるとは、一般の各元 $f \in \mathsf{PHom}_A(\theta_1 + \theta_2)$ に対し、$f_i \in \mathsf{PHom}_A(\theta_i)$ $(i \in \{1,2\})$ で、$P_f \cong P_{f_1} \oplus P_{f_2} \in \mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,A)$ となるものがとれることと定義する。このとき、$\theta_1 + \theta_2 = \theta_1 \oplus \theta_2$ と書く。

(2) θ が**直既約** (indecomposable) であるとは、$\theta \neq 0$ であり「$\theta = \theta_1 \oplus \theta_2$ ならば $\theta_1 = 0$ または $\theta_2 = 0$」が成立することとする。

次の結果は私たちの研究の出発点である。

定理 2.3 [DF, Theorem 4.4][Pla, Theorem 2.7] $\theta, \theta_1, \theta_2 \in K_0(\mathsf{proj}\,A)$ とする。

(1) $\theta_1 \oplus \theta_2$ であることは、ある $f_i, f_i' \in \mathsf{PHom}_A(\theta_i)$ $(i \in \{1,2\})$ で、

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,A)}(P_{f_1}, P_{f_2}[1]) = 0, \quad \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,A)}(P_{f_2'}, P_{f_1'}[1]) = 0$$

を満たすものが存在することと同値である。このとき、一般の組 $(f_1, f_2) \in \mathsf{PHom}_A(\theta_1) \times \mathsf{PHom}_A(\theta_2)$ について、両方の条件が成立する。

(2) 有限個の直既約な元 $\theta_i \in K_0(\mathsf{proj}\,A)$ $(i \in \{1, 2, \ldots, m\})$ で、$\theta = \bigoplus_{i=1}^m \theta_i$ となるものが、順番を除いて一意的に存在する。このとき、$\theta = \bigoplus_{i=1}^m \theta_i$ を θ の**標準分解** (canonical decomposition) という。

以下のように、直既約な元には性質の良いものとそうでないものがある。

定義 2.4 [DF, Definition 4.6] $\theta \in K_0(\mathsf{proj}\,A)$ を直既約とする。

(1) θ が rigid であるとは、ある $f \in \mathsf{PHom}_A(\theta)$ で、$\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,A)}(P_f, P_f[1]) = 0$ となるものが存在することとする。

(2) θ が tame であるとは、θ は rigid ではないが、$\theta \oplus \theta$ が成立することと定める。

(3) θ が wild であるとは、θ が tame でないことと定める。

$\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,A)}(P_f, P_f[1]) = 0$ とは、P_f が $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,A)$ の 2 項準傾複体であることに他ならない。もし θ が rigid であれば、U を $[U] = \theta \in K_0(\mathsf{proj}\,A)$ となる 2 項準傾複体とすると、一般の $f \in \mathsf{PHom}_A(\theta)$ が $P_f \cong U$ を満たすことが知られている（例えば [Pla, Lemma 2.16] を参照)。よって、$K_0(\mathsf{proj}\,A)$ の rigid な元と $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,A)$ の直既約 2 項準傾複体とは、一対一に対応する。

tame な元はいわばそれに準ずる状況であり、典型例は次のとおりである。

例 2.5　A を道多元環 $K(1 \rightrightarrows 2)$ とすると、$\theta := [P(1)] - [P(2)]$ は tame である。

wild な元は自分自身と直和可能でないため、途端に扱いが難しくなってしまう。そこで wild な元が存在しないような状況を考える。

定義 2.6　A が E-tame であるとは、任意の直既約な元 $\theta \in K_0(\mathsf{proj}\,A)$ が rigid か tame であることと定める。

以下に記すように、tame 表現型の多元環は必ず E-tame である。証明には、tame 表現型の多元環に関する Crawley-Boevey [CB1] の結果が鍵となった。

定理 2.7　[GLFS, Theorem 3.2][PY, Theorem 3.8] A が tame 表現型であれば A は E-tame である。さらに、$\theta \in K_0(\mathsf{proj}\,A)$ が tame な元であれば、一般の各元 $f \in \mathsf{PHom}_A(\theta)$ に対し、

- $H^0(P_f) = \mathsf{Coker}\,f$,
- $H^{-1}(\nu P_f) = \mathsf{Ker}\,\nu f \cong \tau\,\mathsf{Coker}\,f$

は同型な煉瓦である。

ここで ν は中山関手 $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,A) \to \mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{inj}\,A)$ を表し、τ は $\mathsf{mod}\,A$ での Auslander–Reiten 移動である。また $X \in \mathsf{mod}\,A$ が煉瓦であるとは $\mathsf{End}_A(X) \cong K$ であることをいう。

特に、特殊双列多元環は tame 表現型であるから、E-tame であり、wild な元は存在しない。そこで、私たちの研究では、与えられた特殊双列多元環 A について、tame な元 $\theta \in K_0(\mathsf{proj}\,A)$ が存在するかどうかを判定することを、目標とした。当然ながら、tame な元は rigid な元を直和因子に持つことはないため、与えられた元 $\theta \in K_0(\mathsf{proj}\,A)$ が rigid な直和因子を持つための条件を、何らかの方法で言い換えることが鍵となる。

そこで、私たちは、Euler 形式を経由して定義される数値的ねじれ対に着目した。以降では、各 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して、全射 $P(i) \to S(i)$ が存在するよう、直既約射影加群と単純加群を並べ替えておく。

まず、Euler 形式 (Euler form) $\langle ?, ! \rangle \colon K_0(\mathsf{proj}\,A) \times K_0(\mathsf{mod}\,A) \to \mathbb{Z}$ とは、$i, j \in \{1, \ldots, n\}$ に対して、$\langle P(i), S(j) \rangle = \delta_{i,j}$ で定まる $\mathbb{Z}$ 双線型形式である。Euler 形式より、$\theta \in$

$K_0(\mathsf{proj}\,A)$ は、$\mathbb{Z}$ 線型写像 $\langle\theta, ?\rangle\colon K_0(\mathsf{mod}\,A) \to \mathbb{Z}$ とみなせる。これらは自然に実数係数 Grothendieck 群 $K_0(\mathsf{proj}\,A)_{\mathbb{R}} := K_0(\mathsf{proj}\,A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, $K_0(\mathsf{mod}\,A)_{\mathbb{R}} := K_0(\mathsf{mod}\,A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ へ拡張できる。

すると、各 $\theta \in K_0(\mathsf{proj}\,A)_{\mathbb{R}}$ に対し、数値的ねじれ対 2 つと半安定部分圏が次のように与えられる。

定義 2.8　$\theta \in K_0(\mathsf{proj}\,A)_{\mathbb{R}}$ とする。

(1)　[BKT, Subsection 3.1] $\mathsf{mod}\,A$ のねじれ対 $(\overline{\mathcal{T}}_\theta, \mathcal{F}_\theta)$ と $(\mathcal{T}_\theta, \overline{\mathcal{F}}_\theta)$ を、

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathcal{T}}_\theta &:= \{X \in \mathsf{mod}\,A \mid Y \text{ が } X \text{ の商加群ならば } \theta(Y) \geq 0\},\\
\mathcal{F}_\theta &:= \{X \in \mathsf{mod}\,A \mid Y \text{ が } X \text{ の } 0 \text{ でない部分加群ならば } \theta(Y) < 0\},\\
\mathcal{T}_\theta &:= \{X \in \mathsf{mod}\,A \mid Y \text{ が } X \text{ の } 0 \text{ でない商加群ならば } \theta(Y) > 0\},\\
\overline{\mathcal{F}}_\theta &:= \{X \in \mathsf{mod}\,A \mid Y \text{ が } X \text{ の部分加群ならば } \theta(Y) \leq 0\}
\end{aligned}
$$

で定義する。

(2)　[Ki, Definition 1.1] $\mathcal{W}_\theta := \overline{\mathcal{T}}_\theta \cap \overline{\mathcal{F}}_\theta$ とおき、これを**半安定部分圏** (semistable subcategory) と呼ぶ。

数値的ねじれ対は、元々は [BKT] で前射影的多元環と量子群の結晶基底を調べるために用いられた。King [Ki] による安定性条件は、それよりも前に導入されたもので、幾何学的不変式論と関連がある。

数値的ねじれ対と $K_0(\mathsf{proj}\,A)$ での直和との関係を述べるため、各 $\theta \in K_0(\mathsf{proj}\,A)$ と $f \in \mathsf{PHom}_A(\theta)$ に対し、$C_f := \mathsf{Coker}\,f$ と $K_{\nu f} := \mathsf{Ker}\,\nu f$ とおく。

このとき、$\theta_i \in K_0(\mathsf{proj}\,A)$ と $f_i \in \mathsf{PHom}_A(\theta_i)$ $(i \in \{1,2\})$ に対し、

$$
\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,A)}(P_{f_1}, P_{f_2}[1]) \cong D\,\mathsf{Hom}_A(C_{f_2}, K_{\nu f_1})
$$

となり、また任意の $X \in \mathsf{mod}\,A$ に対して、

$$
\theta(X) = \mathsf{dim}_K\,\mathsf{Hom}_A(C_f, X) - \mathsf{dim}_K\,\mathsf{Hom}_A(X, K_{\nu f})
$$

が成立する。

さらに、σ が rigid な元である場合は、対応する直既約 2 項準傾複体を $U \in \mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,A)$ として、$C_\sigma := H^0(U)$ と $K_\sigma := H^{-1}(\nu U)$ とおく。すると一般の $f \in \mathsf{PHom}_A(\sigma)$ に対して、$C_f \cong C_\sigma$ と $K_{\nu f} \cong K_\sigma$ となる。

定理 2.7 を利用すると、次の性質が得られる。なお、(2) は任意の有限次元 K 多元環で成立する。

補題 2.9　A を tame 表現型とする。

(1) $\theta \in K_0(\mathsf{proj}\, A)$ とすると、一般の各元 $f \in \mathsf{PHom}_A(\theta)$ に対して、$C_f \in \overline{\mathcal{T}}_\theta$ かつ $K_{\nu f} \in \overline{\mathcal{F}}_\theta$ となる。

(2) [Y, Proposition 3.3][BST, Proposition 3.27] $\sigma \in K_0(\mathsf{proj}\, A)$ が rigid な元ならば、$C_\sigma \in \mathcal{T}_\sigma$ かつ $K_\sigma \in \mathcal{F}_\sigma$ である。

(3) $\eta \in K_0(\mathsf{proj}\, A)$ が tame な元ならば、一般の各元 $f \in \mathsf{PHom}_A(\eta)$ に対して、$C_f \cong K_{\nu f}$ となり、これはアーベル圏 $\mathcal{W}_\eta$ の単純対象である。

これを用いて、私たちの研究では、tame 表現型の多元環について、以下の直和判定法を得ることができた。この補題の一部は Laurent Demonet 氏の協力による。

補題 2.10　A を tame 表現型とする。

(1) $\theta_1, \theta_2 \in K_0(\mathsf{proj}\, A)$ に対し、次は同値である。
   (a) $\theta_1 \oplus \theta_2$ である。
   (b) $\mathcal{T}_{\theta_1} \subset \overline{\mathcal{T}}_{\theta_2}$ かつ $\mathcal{F}_{\theta_1} \subset \overline{\mathcal{F}}_{\theta_2}$ である。
   (c) ある $f_1 \in \mathsf{PHom}_A(\theta_1)$ で、$C_{f_1} \in \overline{\mathcal{T}}_{\theta_2}$ かつ $K_{\nu f_1} \in \overline{\mathcal{F}}_{\theta_2}$ となるものが存在する。

(2) $\theta, \sigma \in K_0(\mathsf{proj}\, A)$ とし、σ は rigid であるとする。このとき $\theta = \sigma \oplus (\theta - \sigma)$ であることは、$C_\sigma \in \mathcal{T}_\theta$ かつ $K_\sigma \in \mathcal{F}_\theta$ であることと同値である。

この (2) に基づき、次の概念に私たちは着目した。

定義 2.11　部分集合 $N_\sigma, R_0 \subset K_0(\mathsf{proj}\, A)_\mathbb{R}$ を以下で定める。

(1) [Asa, Section 4.1] rigid な各元 $\sigma \in K_0(\mathsf{proj}\, A)$ に対し、$\mathbb{R}_{>0}\sigma$ の開近傍 N_σ を、

$$N_\sigma := \{\theta \in K_0(\mathsf{proj}\, A)_\mathbb{R} \mid C_\sigma \in \mathcal{T}_\theta,\ K_\sigma \in \mathcal{F}_\theta\}$$

で定義する。

(2) 閉集合 R_0 を、

$$R_0 := K_0(\mathsf{proj}\, A)_\mathbb{R} \setminus \bigcup_{\sigma \in K_0(\mathsf{proj}\, A):\ \mathrm{rigid}} N_\sigma$$

と定める。

すると、補題 2.10 より次のことがわかる。

補題 2.12　A を tame 表現型とする。

(1) 任意の $\theta \in K_0(\mathsf{proj}\, A)$ に対し、$\theta \in R_0$ であることは、θ の直既約因子がすべて tame であることと同値である。

(2) $R_0 \cap K_0(\mathsf{proj}\, A) \neq \{0\}$ であることは、$K_0(\mathsf{proj}\, A)$ に tame な元が存在することと同値である。

注意 2.13　tame 表現型の多元環に限っても、$R_0 \neq \{0\}$ ならば $R_0 \cap K_0(\mathsf{proj}\, A) \neq \{0\}$ が成立するかは、現時点では判明していない。ちなみに、任意の有限次元 K 多元環について、$R_0 \neq \{0\}$ であることは、$K_0(\mathsf{proj}\, A)$ に rigid な元が無限個存在することと同値である [ZZ]（[Asa, Theorem 4.7] も参照）。

次章では特殊双列多元環について、R_0 を具体的に書き表す。これが本稿の主結果である。

3　具体論

まず、特殊双列多元環の定義を復習する。

定義 3.1　Q を有限箙、I を KQ の許容イデアルとするとき、$A := KQ/I$ が**特殊双列多元環** (special biserial algebra) であるとは、次の 5 条件を満たすことである。

(a)　イデアル I の生成元として、有限部分集合 $X \subset KQ$ で、各 $x \in X$ は、Q の道 p であるか、2 つの道の差 $p - q$ であるようなものがとれる。
(b)　任意の頂点 $i \in Q_0$ に対し、i から出る Q の矢印は 2 本以下である。
(c)　任意の頂点 $i \in Q_0$ に対し、i に入る Q の矢印は 2 本以下である。
(d)　各頂点 $i \in Q_0$ について、$\alpha \in Q_1$ が i に入る矢印、$\beta, \gamma \in Q_1$ が i から出る矢印ならば、$\alpha\beta \in I$ または $\alpha\gamma \in I$ である。
(e)　各頂点 $i \in Q_0$ について、$\alpha \in Q_1$ が i から出る矢印、$\beta, \gamma \in Q_1$ が i に入る矢印ならば、$\beta\alpha \in I$ または $\gamma\alpha \in I$ である。

以下では Q を有限箙、I を KQ の許容イデアル、$A := KQ/I$ が特殊双列多元環であるとする。特殊双列多元環については、以下の組合せ論的概念が重要である。

定義 3.2　$A = KQ/I$ を特殊双列多元環とし、s, b を箙 Q の walk とする。

(1)　s が A での**紐** (string) であるとは、s の部分 walk に、
- $\alpha\alpha^{-1}$ や $\alpha^{-1}\alpha$ の形の walk
- イデアル I に属す道
- $p - q \in I$ となるような道 p, q

がいずれも現れないことをいう。
(2)　b が A での**帯** (band) であるとは、b^2 が A での紐であり、b はより短い walk b' の冪では表せないこととする。

A での紐 s に対しては、紐加群 $M(s) \in \mathsf{mod}\, A$ が定義され、帯 b に対しては、パラメータ $\lambda \in K^\times$ と重複度 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を加えることで, 帯加群 $M(b, \lambda, m)$ が定義される。また、I の生成元に 2 つの道の差 $p - q$ $(p, q \notin I)$ が現れた場合は、これに応じて直既約射影入射加

群が定まる。特殊双列多元環上の直既約加群は、以上 3 種類のうちのどれかであることが知られており [BR, WW]、その間の準同型についても組合せ論的な解釈が完全に与えられている [CB2, Kra]。

以上の準備のもとで、補題 2.9 を特殊双列多元環にあてはめると以下のようになる。

補題 3.3　$A = KQ/I$ を特殊双列多元環とする。

(1)　$\sigma \in K_0(\mathsf{proj}\, A)$ が rigid な元であれば、C_σ, K_σ は紐加群か 0 であり、$C_\sigma \in \mathcal{T}_\sigma$ かつ $K_\sigma \in \mathcal{F}_\sigma$ となる。

(2)　$\eta \in K_0(\mathsf{proj}\, A)$ が tame な元であれば、A での帯 b_η で、一般の各元 $f \in \mathsf{PHom}_A(\theta)$ に対し、$C_f \cong K_{\nu f}$ は帯加群 $M(b_\eta, \lambda_f, 1)$ に同型となり、$\mathcal{W}_\eta$ の単純対象であるものがとれる。ここでパラメータ $\lambda_f \in K^\times$ は f に依存するが、帯 b_η は依存しない。

さて、私たちの研究では、特殊双列多元環について R_0 を求めるにあたり、A での極大な道を重要な道具として用いる。これは次のように定義されるものである。

定義 3.4　$A = KQ/I$ を特殊双列多元環とする。

(1)　集合 $\mathsf{MP}(A)$ を、次の条件を満たす Q の道 p 全体の集合と定める。
  (a)　p は長さ 1 以上で、p は A において 0 ではなく、また Q の他の道 q と A において等しくない。
  (b)　任意の矢印 $\alpha \in Q_1$ に対して、αp と $p\alpha$ はいずれも (a) を満たさない。

(2)　集合 $\overline{\mathsf{MP}}(A)$ を、$\mathsf{MP}(A)$ に、出る矢印と入る矢印がいずれも 1 本以下であるような頂点 $i \in Q_0$ に対応する長さ 0 の道 e_i をすべて加えて得られる集合とする。

いきなり全ての特殊双列多元環を考えることは困難であるため、まずは $\overline{\mathsf{MP}}(A)$ が良い性質を満たすようなものに焦点を当てる。

定義 3.5　$A = KQ/I$ を特殊双列多元環とする。このとき A が**切断 gentle 多元環 (truncated gentle algebra)** であるとは、イデアル $I_1, I_2 \subset KQ$ で、$I = I_1 + I_2$ および次の条件を満たすものがとれることとする。

(i)　I_1 の生成元として、長さ 2 の道からなる集合 J_1 で、以下を満たすものが存在する。
  – 各頂点 $i \in Q_0$ について、$\alpha \in Q_1$ が i に入る矢印、$\beta, \gamma \in Q_1$ が i から出る矢印ならば、$\alpha\beta \notin J_1$ または $\alpha\gamma \notin J_1$ である。
  – 各頂点 $i \in Q_0$ について、$\alpha \in Q_1$ が i から出る矢印、$\beta, \gamma \in Q_1$ が i に入る矢印ならば、$\beta\alpha \notin J_1$ または $\gamma\alpha \notin J_1$ である。

(ii)　I_2 の生成元として、長さ 3 以上のサイクル J_2 で、以下を満たすものが存在する。
  – 任意の $c \in J_2$ に対し、$c^2 \notin I_1$ である。

– 矢印 $\alpha \in Q_1$ が Q のサイクル c, c' に現れ、$c \in J_2$ とする。このとき、$c' \in J_2$ であることは、c' が c の巡回置換であることと同値である。

例えば、有限次元の gentle 多元環は $I_2 = 0$ とすることで、切断 gentle 多元環である。また、十分大きな重複度を持つ Brauer グラフ多元環 A について、$A/\mathsf{soc}\,A$ が切断 gentle 多元環となる。なお、A と $A/\mathsf{soc}\,A$ との間で R_0 は変化しないことが、[DIRRT, Corollary 5.21] と [EJR] からしたがう。

例 3.6　$A = KQ/(I_1 + I_2)$ を、

$$Q := \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & 3 \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, "\beta_1"] & 5 \arrow[r, "\delta_3"] \arrow[d, "\gamma_1"] & 7 \arrow[d, "\delta_4"] \\ 2 \arrow[r, "\alpha_2"'] & 4 \arrow[r, "\beta_2"'] \arrow[ul, "\alpha_3"] & 6 \arrow[r, "\gamma_2"'] \arrow[ul, "\beta_3"] & 8 \arrow[ul, "\gamma_3"] \end{tikzcd},$$

$$I_1 := \langle \alpha_3\delta_1, \delta_1\beta_1, \beta_3\delta_2, \alpha_2\beta_2, \beta_1\alpha_3, \delta_2\gamma_1, \gamma_3\delta_3, \beta_2\gamma_2, \gamma_1\beta_3, \delta_4\gamma_3 \rangle,$$
$$I_2 := \langle \alpha_i\alpha_{i+1}\alpha_{i+2}, \beta_i\beta_{i+1}\beta_{i+2}, \gamma_i\gamma_{i+1}\gamma_{i+2} \mid i \in \{1,2,3\} \rangle.$$

で与える（$\alpha_{i+3} = \alpha_i$ などとみなす)。このとき A は切断 gentle 多元環であり、

$$\mathsf{MP}(A) = \{\alpha_i\alpha_{i+1}, \beta_i\beta_{i+1}, \gamma_i\gamma_{i+1}, \delta_1\delta_2\delta_3\delta_4 \mid i \in \{1,2,3\}\},$$
$$\overline{\mathsf{MP}}(A) = \mathsf{MP}(A) \cup \{e_2, e_7\}$$

となる。

切断 gentle 多元環については、極大な道の記述は容易である。

命題 3.7　$A = KQ/I$ を切断 gentle 多元環であるとする。このとき、集合 $\mathsf{MP}(A)$ は次の (i), (ii) からなり、$\overline{\mathsf{MP}}(A)$ は次の (i), (ii), (iii) からなる。ここで (i), (ii) での α と β は、それぞれ p の最初と最後の矢印を表す。

(i)　長さ 1 以上の道 p で、A において $p \neq 0$ であり、任意の矢印 $\gamma \in Q_1$ に対し、A において $\beta\gamma = 0$, $\gamma\alpha = 0$ となるもの全体。

(ii)　長さ 2 以上の道 p で、A において $p \neq 0$ であり、ある矢印 $\gamma \in Q_1$ で、「$c_p := p\gamma$ と $c^p = \gamma p$ はともに Q でのサイクルであり、また A において $\beta\gamma \neq 0$, $\gamma\alpha \neq 0$, $p\gamma = 0$, $\gamma p = 0$ となる」ものが存在するようなもの全体。

(iii)　長さ 0 の道 e_i で、頂点 $i \in Q_0$ から出る矢印と i に入る矢印がいずれも 1 本以下であるようなもの全体。

そして私たちは（広義の）極大な道を活用して、切断 gentle 多元環の R_0 を記述することに成功した。

定理 3.8　$A = KQ/I$ を切断 gentle 多元環であるとする。$\theta \in K_0(\mathsf{proj}\,A)_{\mathbb{R}}$ について、$\theta \in R_0$ であることは、任意の $p \in \overline{\mathsf{MP}}(A)$ に対して、「もし p が命題 3.7 の (ii) の形であれば $\theta(M(p)) = 0$ であり、そうでなければ $M(p) \in \mathcal{W}_\theta$ である」ことと同値である。特に、R_0 は $K_0(\mathsf{proj}\,A)_{\mathbb{R}}$ における有理多面錐である。

注意 3.9　補題 2.12 より、$\theta \in K_0(\mathsf{proj}\,A)$ が R_0 の 1 次元の面に属し、かつ係数の公約数が 1 であれば、θ は tame な元であることがわかる。一方、他にも tame な元は存在することがあり、異なる tame な元どうしが直和可能かを見極める必要がある。

例 3.10　例 3.6 の切断 gentle 多元環に、定理 3.8 を適用すると、$\theta \in R_0$ は、

$$\theta\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} = 0, \quad \theta\begin{pmatrix}3\\4\\6\end{pmatrix} = 0, \quad \theta\begin{pmatrix}5\\6\\8\end{pmatrix} = 0, \quad \begin{smallmatrix}1\\3\\5\\7\\8\end{smallmatrix} \in \mathcal{W}_\theta, \quad S(2) \in \mathcal{W}_\theta, \quad S(7) \in \mathcal{W}_\theta$$

がすべて満たされることと同値である。これより、

$$\begin{aligned}&R_0 = \{x\eta_1 + y\eta_2 \mid x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}\},\\ &\eta_1 := [P(1)] - [P(4)] - [P(5)] + [P(6)], \quad \eta_2 := [P(5)] - [P(8)]\end{aligned}$$

を得る。η_1 と η_2 は、R_0 の 1 次元の面に存在し、係数の公約数が 1 であるため、ともに tame な元である。対応する帯は、

$$b_{\eta_1} = \begin{tikzcd}[sep=small] & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & 6 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ 2 \arrow[ddrrr] & & 3 \arrow[dr] & & 8 \arrow[dl] & & 3 \arrow[ddlll] \\ & & & 5 & & & \\ & & & 4 & & & \end{tikzcd}, \quad b_{\eta_2} = \begin{tikzcd}[sep=small] & 5 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ 6 \arrow[dr] & & 7 \arrow[dl] \\ & 8 & \end{tikzcd}$$

である。ここで $S(5)$ が $\mathcal{T}_{\eta_1} \cap \mathcal{F}_{\eta_2}$ に属すことから、補題 2.10 より、直和 $\eta_1 \oplus \eta_2$ は成立しない。そこで $\eta_3 := \eta_1 + \eta_2 = [P(1)] - [P(4)] + [P(6)] - [P(8)]$ とおくと、実はこれも tame な元であり、帯は

$$b_{\eta_3} = \begin{tikzcd}[sep=small] & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & & & \\ 2 \arrow[ddddrrr] & & 3 \arrow[dr] & & & & & \\ & & & 5 \arrow[dr] & & & & \\ & & & & 7 \arrow[dr] & & 6 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ & & & & & 8 & & 3 \arrow[dllll] \\ & & & 4 & & & & \end{tikzcd}.$$

である。$\eta_1 \oplus \eta_3$ かつ $\eta_2 \oplus \eta_3$ であることは、補題 2.10 を用いて確かめられ、ほかに tame な元は存在しないことがわかる。

一般の特殊双列多元環 $A = KQ/I$ については、KQ の許容イデアル $I' \subset I$ をうまくとることで、$\widetilde{A} := KQ/I'$ を切断 gentle 多元環とできる。このとき多元環の全射準同型 $\widetilde{A} \to A$ が存在することから、自然に $\mathsf{mod}\, A \subset \mathsf{mod}\, \widetilde{A}$ とみなせる。そこで任意の $\theta \in K_0(\mathsf{proj}\, A)_{\mathbb{R}}$ に対して、$\mathcal{W}'_\theta := \mathsf{Filt}_{\widetilde{A}}(\mathcal{W}_\theta \cap \mathsf{mod}\, A)$ とおく。すなわち、$\mathcal{W}'_\theta$ とは $\mathcal{W}_\theta \cap \mathsf{mod}\, A$ に属す加群の、$\mathsf{mod}\, \widetilde{A}$ における有限回の拡大で得られる加群全体がなす部分圏を表す。そのうえで、特殊双列多元環についても、私たちは R_0 を決定した。

定理 3.11　$A = KQ/I$ を特殊双列多元環とし、$\theta \in K_0(\mathsf{proj}\, A)_{\mathbb{R}}$ とする。$\theta \in R_0$ であることは、任意の $p \in \overline{\mathsf{MP}}(\widetilde{A})$ に対して、「もし p が命題 3.7 の (ii) の形であれば、$q \in \overline{\mathsf{MP}}(\widetilde{A})$ で c_q が c_p の巡回置換であり $M(q) \in \mathcal{W}'_\theta$ であるものが存在し、そうでなければ $M(p) \in \mathcal{W}'_\theta$ である」ことと同値である。特に、R_0 は $K_0(\mathsf{proj}\, A)_{\mathbb{R}}$ における有限個の有理多面錐の和集合である。

以上の定理に、補題 2.12 と注意 2.13 を組み合わせると、次のこともわかる。

系 3.12　A を特殊双列多元環とすると、$R_0 \neq \{0\}$ ならば $R_0 \cap K_0(\mathsf{proj}\, A) \neq \{0\}$ である。したがって、$K_0(\mathsf{proj}\, A)$ に tame な元が存在することと、rigid な元が無限個存在することとは同値である。

参考文献

[Asa] S. Asai, *The wall-chamber structures of the real Grothendieck groups*, Adv. Math., **381** (2021), 107615.

[BKT] P. Baumann, J. Kamnitzer, P. Tingley, *Affine Mirković-Vilonen polytopes*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **120** (2014), 113–205.

[Bri] T. Bridgeland, *Scattering diagrams, Hall algebras and stability conditions*, Algebr. Geom., **4**, no. 5 (2017), 523–561.

[BST] T. Brüstle, D. Smith, H. Treffinger, *Wall and Chamber Structure for finite-dimensional Algebras*, Adv. Math., **354** (2019), 106746.

[BR] M. C. R. Butler, C. M. Ringel, *Auslander–Reiten sequences with few middle terms and applications to string algebras*, Comm. Algebra, **15**, no. 1-2 (1987), 145–179.

[CB1] W. Crawley-Boevey, *On tame algebras and bocses*, Proc. London Math. Soc. (3), **56** (1988), 451–483.

[CB2] W. Crawley-Boevey, *Maps between representations of zero-relation algebras*, J. Algebra, **126**, no. 2 (1989), 259–263.

[DK] R. Dehy, B. Keller, *On the combinatorics of rigid objects in 2-Calabi–Yau categories*, Int. Math. Res. Not., IMRN 2008, no. 11, `https://doi.org/10.1093/imrn/rnn029`.

[DIRRT] L. Demonet, O. Iyama, N. Reading, I. Reiten, H. Thomas, *Lattice theory of torsion classes*, arXiv:1711.01785v2.

[DF] H. Derksen, J. Fei, *General presentations of algebras*, Adv. Math., **278** (2015), 210–237.

[EJR] F. Eisele, G. Janssens, T. Raedschelders, *A reduction theorem for τ-rigid modules*, Math. Z., **290** (2018), 1377–1413.

[GLFS] C. Geiss, D. Labardini-Fragoso, J. Schröer, *Schemes of modules over gentle algebras and laminations of surfaces*, arXiv:2005.01073v1.

[Hap] D. Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 119, Cambridge University Press, 1988.

[Kac] V. G. Kac, *Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory*, Invent. Math., **56** (1980), 57–92.

[Ki] A. D. King, *Moduli of representations of finite dimensional algebras*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), **45**, no. 180 (1994), 515–530.

[Kra] H. Krause, *Maps between tree and band modules*, J. Algebra, **137**, no. 1 (1991), 186–194.

[Pla] P.-G. Plamondon, *Generic bases for cluster algebras from the cluster category*, Int. Math. Res. Not., IMRN 2013, no. 10, 2368–2420.

[PY] P.-G. Plamondon, T. Yurikusa, with an appendix by B. Keller, *Tame algebras have dense g-vector fans*, arXiv:2007.04215v1.

[WW] B. Wald and J. Waschbüsch, *Tame biserial algebras*, J. Algebra, **95**, no. 2 (1985), 480–500.

[Y] T. Yurikusa, *Wide subcategories are semistable*, Doc. Math., **23** (2018), 35–47.

[ZZ] A. Zimmermann, A. Zvonareva, Talk in 'Algèbres amassées et théories des représentations', at Université de Caen, November 2017.