# Hankel type Pfaffians
# and
# the associated Jacobi polynomials

石川 雅雄

岡山大学, 理学部

mi@math.okayama-u.ac.jp

**概要**

もともとの動機は平面分割の数え上げであるが, ここでは独立に行列式とパフィアンの評価の方法について研究する. 特に, パフィアンの計算と直交多項式の関係を述べる. その過程で, より一般化した超パフィアンの枠組みの中で公式を述べることが可能である. この話はリヨン大学の Jiang Zeng 氏との共同研究である. この話は Masao Ishikawa and Jiang Zeng, “Hankel hyperpfaffian calculations and Selberg integrals”, `arXiv:2008.09776` に基づいている.

## 1 序論

数列 $\{d_{i,j}\}_{i,j\geq 0}$ が与えられたとき, $n$ に対して $n$ 次の行列式

$$\det(d_{i,j})_{0\leq i,j\leq n-1} \tag{1}$$

を考える. その母関数が形式的べき級数として

$$D(x,y)=\sum_{i,j} d_{i,j}x^i y^j$$

であるとする. このとき (1) の行列式を $\det_n[D(x,y)]$ と書く. このとき, 次はすぐにわかる.

1) 形式的べき級数 $u(x)$ の定数項が 1 (i.e., $u(0)=1$) ならば

$$\det_n[u(x)D(x,y)]=\det_n[D(x,y)] \tag{2}$$

である.

2) 形式的べき級数 $v(x)$ の定数項が 0 で, $x$ の 1 次の係数が 1 (i.e., $v(0)=0$, $v'(0)=1$) ならば

$$\det_n[D(v(x),y)]=\det_n[D(x,y)] \tag{3}$$

である.

例えば, [13] の中で Mills-Robbins-Rumsey は $[2n]^3$ の中に含まれる回転対称かつ転置自己補完な平面分割 (cyclically symmetric transpose complement plane partitions) の個数が $\det\left(\binom{i+j}{2j-i}\right)_{0\leq i,j\leq n-1}$ で与えられることを示した. [13] の中では, この行列式が

$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(3k+1)!(6k)!(2k)!}{(4k+1)!(4k)!}$ に等しいことを証明しているが, それは Andrews [1] の結果に帰着していて, Andrews [1] の結果は, 超幾何関数を使った難しいものであった. この行列式の成分の母関数を計算すると

$$\sum_{i,j\geq 0} \binom{i+j}{2j-i} x^i y^j = \frac{1-xy}{1-x^2y-xy^2-3xy} \tag{4}$$

となる. 母関数を計算する手法は, いくつもあるが, 右辺がわかっている場合には分母を払って計算することによっても簡単かつ直接的に証明できる. 母関数がわからない場合の手法については [9] の中に紹介されている. この節では, [9] の中に述べられているハンケル行列式に帰着させる方法を, まず紹介したい.

良く知られているように

$$\det(a_{i+j})_{0\leq i,j\leq n-1}$$

の形の行列式を**ハンケル行列式 (Hankel determinant)** という. 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の母関数を

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = A(x) \tag{5}$$

とするとき, ハンケル行列式 $\det(a_{i+j+r})_{0\leq i,j\leq n-1}$ を $\mathrm{H}_n^{(r)}(A)$ で表すことにする. このとき

$$\mathrm{H}_n^{(0)}(A) = \det\nolimits_n \left[\frac{xA(x)-yA(y)}{x-y}\right]$$
$$\mathrm{H}_n^{(1)}(A) = \det\nolimits_n \left[\frac{A(x)-A(y)}{x-y}\right]$$

となることは明らかであろう. 例えば

$$a_n = \frac{1}{2n+1}\binom{3n}{n} \tag{6}$$

を取る. $a_n$ の最初の方は $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 12$, $a_4 = 55$ で, $n$ 個の内部ノードと $3n$ 個の辺を持つ三分探索木 (ternary trees) の数として知られている. $g(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2n+1}\binom{3n}{n} x^n$ とおけば

$$g(x) = 1 + xg(x)^3 \tag{7}$$

をみたす. このとき $g(x) = 1 + f(x)$ とおくと $f(x) = x + 3x^2 + 12x^3 + 55x^4 + \cdots$ は $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ をみたし

$$\sum_{i,j\geq 0} a_{i+j} x^i y^j = \frac{xg(x)-yg(y)}{x-y} = 1 + \frac{xf(x)-yf(y)}{x-y}$$

となる. $f(x) = X$, $f(y) = Y$ とおくと (7) 式より $x = \frac{X}{(X+1)^3}$, $y = \frac{Y}{(Y+1)^3}$ なので

$$1 + \frac{xf(x)-yf(y)}{x-y} = 1 + \frac{\frac{X^2}{(X+1)^3} - \frac{Y^2}{(Y+1)^3}}{\frac{X}{(X+1)^3} - \frac{Y}{(Y+1)^3}} = \frac{(1+X)(1+Y)(1-XY)}{1-X^2Y-XY^2-3XY}$$

となる. これを (4) 式と比べると (2) 式から $[2n]^3$ に含まれる回転対称かつ転置自己補完な平面分割の個数はハンケル行列式 $\mathrm{H}_n^{(0)}(g)$ の値に等しいことがわかる. ハンケル行列式の計算については, 古典的な直交多項式の理論により連分数等を使った手法で比較的難しくない方法で計算することができる. Gessel と Xin [9] は $[2n]^3$ に含まれる回転対称かつ転置自己補完な平面分割の個数が上記の積なることを連分数展開を使って示した. ここでは, 同様の方法でパフィアンの計算をすることを目標にする.

## 1.1 超幾何関数とハンケル行列式

ここで上に述べた連分数を使った古典的手法について触れておく．Gessel-Xin [9] は, 上記の $a_n$ 以外に $\{b_n\}_{n\geq 0}$, $\{c_n\}_{n\geq 0}$, $\{d_n\}_{n\geq 0}$, $\{e_n\}_{n\geq 0}$ という数列を

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n+1}\binom{3n+1}{n}, & c_n &= \frac{2}{n+1}\binom{3n}{n} \\ d_n &= \frac{2}{(3n+1)(3n+2)}\binom{3n+2}{n+1}, & e_n &= \frac{9n+5}{(3n+1)(3n+2)}\binom{3n}{n} \end{aligned} \tag{8}$$

によって定義した．これらの数列の特徴は, その母関数が次のような超幾何級数の比で書けることである．

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} a_n x^n &= \frac{{}_2F_1\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3};\frac{3}{2};\frac{27}{4}x\right)}{{}_2F_1\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3};\frac{1}{2};\frac{27}{4}x\right)}, & \sum_{n\geq 0} b_n x^n &= \frac{{}_2F_1\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3};\frac{5}{2};\frac{27}{4}x\right)}{{}_2F_1\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3};\frac{3}{2};\frac{27}{4}x\right)}, \\ \sum_{n\geq 0} c_n x^n &= 2\,\frac{{}_2F_1\left(\frac{5}{3},\frac{7}{3};\frac{7}{2};\frac{27}{4}x\right)}{{}_2F_1\left(\frac{5}{3},\frac{4}{3};\frac{5}{2};\frac{27}{4}x\right)}, & \sum_{n\geq 0} d_n x^n &= 2\,\frac{{}_2F_1\left(\frac{5}{3},\frac{7}{3};\frac{5}{2};\frac{27}{4}x\right)}{{}_2F_1\left(\frac{5}{3},\frac{4}{3};\frac{3}{2};\frac{27}{4}x\right)}, \\ \sum_{n\geq 0} e_n x^n &= 5\,\frac{{}_2F_1\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3};\frac{5}{2};\frac{27}{4}x\right)}{{}_2F_1\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3};\frac{3}{2};\frac{27}{4}x\right)}. \end{aligned} \tag{9}$$

左辺はモーメント母関数だと考えられ, 超幾何関数の比で書けると, 連分数展開がすぐにわかるというメリットがある．すなわち $n\geq 1$ のとき

$$\frac{{}_2F_1(a,b+1;c+1;x)}{{}_2F_1(a,b;c;x)} = S(x;\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\dots) \tag{10}$$

という Stieltjes 連分数に展開される．ここで, Stieltjes 連分数とは

$$S(x;\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\dots) = \cfrac{1}{1-\cfrac{\lambda_1 x}{1-\cfrac{\lambda_2 x}{1-\cfrac{\lambda_3 x}{\ddots}}}}.$$

の形の連分数展開であり, 各 $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ は, 偶数と奇数に分けて

$$\lambda_{2n-1} = \frac{(a+n-1)(c-b+n-1)}{(c+2n-2)(c+2n-1)}, \qquad \lambda_{2n} = \frac{(b+n)(c-a+n)}{(c+2n-1)(c+2n)} \tag{11}$$

と記述される．これは古典的な直交多項式論から周知の事実である．これと以下の定理を使うと, ハンケル行列式の値は容易に計算できる．

**定理 1.1.** ([9, Lemma 2.1], [8, Theorem 30]) 数列 $\{\mu_k\}_{k\geq 0}$ の母関数の Stieltjes 連分数への展開が

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k x^k = S(x;\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\dots).$$

の形であるとする．このとき, この数列から作られるハンケル行列式の値は

$$\det(\mu_{i+j})_{0\leq i,j\leq n-1} = (\lambda_1\lambda_2)^{n-1}(\lambda_3\lambda_4)^{n-2}\cdots(\lambda_{2n-3}\lambda_{2n-2}).$$

である．

# 2　超パフィアン (hyperpfaffian)

自然数 $n$ に対して $[n]=\{1,2,\dots,n\}$ と書く. また, 有限集合 $s$ に対して $s$ の $r$-元部分集合全体の集合を $\binom{s}{r}$ と書く. また, 自然数 $l,n$ に対して $\binom{[ln]}{l,\dots,l}$ (下段は $l$ が $n$ 個) は $n$ 個の長さ $l$ のブロックからなる順列 $\sigma=(\boldsymbol{\sigma}_1,\dots,\boldsymbol{\sigma}_n)\in\mathfrak{S}_{ln}$ で, 各 $\boldsymbol{\sigma}_i$ の中の数は単調増加であるようなもの全体とする. すなわち

$$\binom{[ln]}{l,\dots,l}=\left\{\,\sigma=(\sigma(1),\dots,\sigma(ln))\in\mathfrak{S}_{ln}\;\middle|\;\sigma((k-1)l+1)<\cdots<\sigma(kl)\text{ for }1\le k\le n\,\right\}.$$

である.

## 2.1　超パフィアン

Barvinok [2] は超パフィアン (hyperpfaffian) の定義を最初に与えた. $l$ 正の偶数とし, $n$ を正整数とする. サイズが $ln$ の $l$-ブロック配列とは

$$B=(B(I))_{I\in\binom{[ln]}{l}}.$$

のような形のテンソルとする. このとき, サイズが $ln$ の $l$-ブロック配列 $B$ の**超パフィアン (hyperpfaffian)** $\mathrm{Pf}^{[l}(B)$ を

$$\mathrm{Pf}^{[l]}(B)=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\binom{[ln]}{l,\dots,l}}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{k=1}^{n}B\left(\boldsymbol{\sigma}_k\right),$$

によって定義する. ここで $\sigma$ は $\sigma=(\boldsymbol{\sigma}_1,\dots,\boldsymbol{\sigma}_n)\in\binom{[ln]}{l,\dots,l}$ の形をしているとする.

## 2.2　De Bruijn の公式

ここで主に使うのは, 次の形の De Bruijn の公式である. 我々は, さらに一般的な形の定理を得たが, ここで使うのは, この形のみであるので, さらなる定義等の煩雑性を避けるために, この形で引用する.

**定理 2.1.** $l$ を正の偶数, $n$ を正整数とする. $d\psi(x)=w(x)dx$ を $[0,a]$ 上の測度とし, $i\in[ln]$ と $t\in[l]$ に対して $\phi_i^{(t)}(x)$ を $[0,a]$ 上の関数とする. このとき

$$\int_{0\le x_1<\cdots<x_n\le a}\det\left(\phi_i^{(1)}(x_j)\middle|\cdots\middle|\phi_i^{(l)}(x_j)\right)_{i\in[ln],\,j\in[n]}d\psi(\boldsymbol{x})=\mathrm{Pf}^{[l]}\left(Q(I)\right)_{I\in\binom{[ln]}{l}},$$

が成り立つ. ここで $I=\{i_1,\dots,i_l\}\in\binom{[ln]}{l}$ に対して

$$Q(I)=\int_0^a\det(\phi_{i_\lambda}^{(\mu)}(x))_{1\le\lambda,\mu\le l}\,d\psi(x)$$

であり, $\left(\phi_i^{(1)}(y_j)\middle|\cdots\middle|\phi_i^{(l)}(y_j)\right)_{i\in[ln],\,j\in[n]}$ は, 第 $i$ 行が

$$\left(\phi_i^{(1)}(y_1),\cdots,\phi_i^{(l)}(y_1),\dots,\phi_i^{(1)}(y_n),\cdots,\phi_i^{(l)}(y_n)\right).$$

である $ln$ 次の正方行列を表すものとする.

ここでは, さらに左辺の行列式がヴァンデルモンドの行列式になる場合を考察することにより, 次の系が得られる.

**系 2.2.** $l$ を正の偶数, $n$ を正整数とする. また, $u$ は任意の整数とする.. $d\psi(x) = \psi'(x)dx$ を区間 $[0, a]$ 上の測度とし, $\mu_i = \int_0^a x^i d\psi(x)$ を測度 $\psi$ の第 $i$ モーメント (the $i$th moment) とする. このとき

$$\mathrm{Pf}^{[l]}\Big(\prod_{1\le\lambda<\mu\le l}(i_\mu - i_\lambda)\cdot\mu_{\sum_{\nu=1}^{l} i_\nu - l + u}\Big)_{1\le i_1<\cdots<i_l\le ln} = \frac{\prod_{k=1}^{l}\{(k-1)!\}^n}{n!}\int_{[0,a]^n}\prod_i x_i^{u+\binom{l}{2}}\prod_{i<j}(x_j - x_i)^{l^2}\,d\psi(\boldsymbol{x}). \tag{12}$$

である.

この形の公式は Luque-Thibon [10] で述べられた. 我々は, もっと一般的な公式に拡張し, その $q$-類似も与えた. しかし, 今回述べる応用では, 一般化された形の公式は必要ないので, ここには述べない.

# 3　ナラヤナ数

## 3.1　ナラヤナ多項式

$A, B, D$ 型の有限コクセター群の元の数を descent の数によって分類することによって**ナラヤナ数 (Narayana numbers)** が定義される (cf. Peterson [14]):

$$N_k(A_n) = \frac{1}{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k-1},\ N_k(B_n) = \binom{n}{k}^2,\ N_k(D_n) = \binom{n}{k}\left\{\binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-2}\right\}.$$

$X = A, B, D$ のとき, $X$ 型のナラヤナ数の母関数として, **ナラヤナ多項式 (Narayana polynomials)** を

$$N(X_n, a) = \sum_{k=0}^{n} N_k(X_n)a^k$$

と定義する. ここでは $N(A_0, a) = (D_0, a) = 1$, $N(D_1, a) = \frac{a+1}{2}$ と約束する. 簡単な計算で次の命題を示すことができる.

**命題 3.1.** $n$ を非負整数とし, $\omega = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ を 1 の原始三乗根とする. このとき, 次の等式が成り立つ.

(1) $\mathrm{Cat}(n) = N(A_n, 1) = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}$ は**カタラン数 (Catalan numbers)** と言われる.
(2) $\mathrm{Sch}(n) = N(A_n, 2) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{2k}\mathrm{Cat}(k)$ は**シュレッダー数 (large Schröder numbers)** と言われれる.
(3) $\mathrm{CBC}(n) = N(B_n, 1) = \binom{2n}{n}$ は**中央二項係数 (central binomial coefficients)** と言われる.
(4) $\mathrm{Del}(n) = N(B_n, 2) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}$ は**中央デラノイ数 (central Delannoy numbers)** と言われる.
(5) $\mathrm{Mot}(n) = (-1)^n\omega^{n+2}N(A_{n+1}, \omega) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k}\mathrm{Cat}(k)$, は**モツキン数 (Motzkin numbers)** と言われる.
(6) $\mathrm{CTC}(n) = (-1)^n\omega^n N(B_n, \omega)$ は**中央三項係数 (central trinomial coefficient)** といわれ, $(1+x+x^2)^n$ の展開の $x^n$ の係数である.

## 3.2 超パフィアンとセルバーグ積分

セルバーグ積分 [15] は

$$\begin{aligned} S_n(\alpha,\beta,\gamma) &= \int_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^{n} t_i^{\alpha-1}(1-t_i)^{\beta-1} \prod_{1\le i<j\le n} |t_i-t_j|^{2\gamma}\, d\boldsymbol{t} \\ &= \prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma(\alpha+(j-1)\gamma)\,\Gamma(\beta+(j-1)\gamma)\,\Gamma(j\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+(n+j-2)\gamma)\,\Gamma(\gamma+1)}. \end{aligned} \tag{13}$$

の形をしている．その $q$-類似等も知られているが, 今回の話では扱わない．セルバーグ積分についての解説は Forrester-Warnaar [4] による解説やその引用文献を参照して欲しい．また, 青本先生によるセルバーグ積分の拡張は次の形をしている．

$$\begin{aligned} &\int_{[0,1]^n} e_k(\boldsymbol{t}) \prod_{i=1}^{n} t_i^{\alpha-1}(1-t_i)^{\beta-1} \prod_{1\le i<j\le n} |t_i-t_j|^{2\gamma}\, d\boldsymbol{t} \\ &= \binom{n}{k} S_n(\alpha,\beta,\gamma) \prod_{j=1}^{k} \frac{\alpha+(n-j)\gamma}{\alpha+\beta+(2n-j-1)\gamma}, \end{aligned}$$

ここで $e_k(\boldsymbol{t}) = e_k(t_1,\dots,t_n)$ は $t_1,\dots,t_n$ についての基本対称式であり $\sum_{k=0}^{n} e_k(\boldsymbol{t})y^k = \prod_{i=1}^{n}(1+t_iy)$ により定義される．ここでは, 両方の応用として, いろいろ超パフィアンを計算する．次の補題は, $A, B, D$ 型のナラヤナ多項式のハンケル型超パフィアンをセルバーグ積分に帰着させるための公式を与える．

**補題 3.2.** $l$ と $n$ が正整数で $l$ は偶数とする．このとき, 次の公式が成り立つ:

$$\begin{aligned} I_A &= \mathrm{Pf}^{[l]}\Big(\prod_{1\le\lambda<\mu\le l}(i_\mu-i_\lambda)\cdot N\left(A_{|I|+r-l},a\right)\Big)_{I\in\binom{[ln]}{l}} \\ &= C_A \int_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^{n} \left\{t_i+\frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}}\right\}^{r+\binom{l}{2}-1} \sqrt{t_i(1-t_i)} \prod_{i<j}(t_j-t_i)^{l^2}\, d\boldsymbol{t}, \\ I_B &= \mathrm{Pf}^{[l,1]}\Big(\prod_{1\le\lambda<\mu\le l}(i_\mu-i_\lambda)\cdot N\left(B_{|I|+r-l},a\right)\Big)_{I\in\binom{[ln]}{l}} \\ &= C_B \int_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^{n} \frac{\left\{t_i+\frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}}\right\}^{r+\binom{l}{2}}}{\sqrt{t_i(1-t_i)}} \prod_{i<j}(t_j-t_i)^{l^2}\, d\boldsymbol{t} \\ I_D &= \mathrm{Pf}^{[l]}\Big(\prod_{1\le\lambda<\mu\le l}(i_\mu-i_\lambda)\cdot N(D_{|I|+r-l},a)\Big)_{I\in\binom{[ln]}{l}} \\ &= C_D \int_{[0,1]^n} \frac{\prod_{i=1}^{n}\left\{t_i+\frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}}\right\}^{r+\binom{l}{2}-2}\left(t_i-D_a^+\right)\left(t_i-D_a^-\right)\prod_{i<j}(t_j-t_i)^{l^2}}{\prod_{i=1}^{n}\sqrt{t_i(1-t_i)}}\, d\boldsymbol{t}, \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} C_A &= \frac{\prod_{k=1}^{l}\{(k-1)!\}^n}{(2\pi)^n n!}\left(4\sqrt{a}\right)^{\left\{r+\binom{l}{2}+1\right\}n+l^2\binom{n}{2}}, \\ C_B = C_D &= \frac{\prod_{k=1}^{l}\{(k-1)!\}^n}{\pi^n n!}\left(4\sqrt{a}\right)^{\left\{r+\binom{l}{2}\right\}n+l^2\binom{n}{2}}, \\ D_a^{\pm} &= \frac{-3(a+1)+8\sqrt{a}\pm\sqrt{4a-7(a-1)^2}}{16\sqrt{a}} \end{aligned}$$

とする.

この補題の右辺はセルバーグ積分に近い形をしているが, いつもセルバーグ積分になるとは限らない. そこでセルバーグの公式が適用できる場合を注意深く分類すると次の定理が得られる. ここで, 式を見やすくするために

$$\Phi_n(r,s,m)=\prod_{j=1}^{n}\frac{\binom{2m(j-1)+2r}{m(j-1)+r}\binom{2m(j-1)+2s}{m(j-1)+s}\binom{mj}{m}}{\binom{2m(j-1)+r+s}{m(j-1)+r}\binom{m(2j-3)+r+s}{m(j-1)}}.$$

と置こう. この積には別の表示もあり得ることを注意しておく.

**定理 3.3.** $l$ と $n$ が正整数で $l$ は偶数とする. 上のセルバーグ (または青本) の公式を使うことによって, 次の結果を得る.

$$I_A=\begin{cases}\frac{\prod_{k=1}^{l}\{(k-1)!\}^n}{2^n n!}\cdot\Phi_n\left(r+\binom{l}{2},1,\frac{l^2}{2}\right) & \text{if } a=1,\\ \frac{a^{n+\frac{l^2}{2}\binom{n}{2}}\prod_{k=1}^{l}\{(k-1)!\}^n}{2^n n!}\Phi_n\left(1,1,\frac{l^2}{2}\right) & \text{if } r=1-\binom{l}{2},\\ \frac{2^n a^{\frac{3}{2}n+\frac{l^2}{2}\binom{n}{2}}\prod_{k=1}^{l}\{(k-1)!\}^n}{n!}\Phi_n\left(1,1,\frac{l^2}{2}\right) & \\ \times\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_a^{n-k}\prod_{j=1}^{k}\frac{\frac{3}{2}+\frac{l^2}{2}(n-j)}{3+\frac{l^2}{2}(2n-j-1)} & \text{if } r=2-\binom{l}{2}.\end{cases}$$

$$I_B=\begin{cases}\frac{\prod_{k=1}^{l}\{(k-1)!\}^n}{n!}\cdot\Phi_n\left(r+\binom{l}{2},0,\frac{l^2}{2}\right) & \text{if } a=1,\\ \frac{a^{\frac{l^2}{2}\binom{n}{2}}\prod_{k=1}^{l}\{(k-1)!\}^n}{n!}\Phi_n\left(0,0,\frac{l^2}{2}\right) & \text{if } r=-\binom{l}{2},\\ \frac{2^{2n} a^{\frac{n}{2}+\frac{l^2}{2}\binom{n}{2}}\prod_{k=1}^{l}\{(k-1)!\}^n}{n!}\Phi_n\left(0,0,\frac{l^2}{2}\right) & \\ \times\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_a^{n-k}\prod_{j=1}^{k}\frac{\frac{1}{2}+\frac{l^2}{2}(n-j)}{1+\frac{l^2}{2}(2n-j-1)} & \text{if } r=1-\binom{l}{2}.\end{cases}$$

$$I_D=\begin{cases}\frac{2^{2n}\prod_{k=1}^{l}\{(k-1)!\}^n}{n!}\Phi_n\left(r+\binom{l}{2}-1,0,\frac{l^2}{2}\right) & \\ \times\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-k}\prod_{j=1}^{k}\frac{r+\binom{l}{2}-\frac{1}{2}+\frac{l^2}{2}(n-j)}{r+\binom{l}{2}+\frac{l^2}{2}(2n-j-1)} & \\ \qquad\qquad\text{if } a=1, & \\ \frac{2^{2n}\omega^{n+\frac{l^2}{2}\binom{n}{2}}\prod_{k=1}^{n}\{(k-1)!\}^n}{n!}\Phi_n\left(1,0,\frac{l^2}{2}\right) & \\ \times\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(-\frac{5}{8}\right)^{n-k}\prod_{j=1}^{k}\frac{\frac{3}{2}+\frac{l^2}{2}(n-j)}{2+\frac{l^2}{2}(2n-j-1)} & \\ \qquad\qquad\text{if } a=\omega \text{ and } r=2-\binom{l}{2}. & \end{cases}$$

これ以外の場合は, セルバーグ (または青本) の公式を適用することはできない.

超パフィアンと言ってもピンとこない人も多いと思う. そこで普通のパフィアンの場合で, きれいな形を場合に特殊化した例をいくつか述べよう.

**系 3.4.** $n$ を正整数とする. このとき, 次の等式が成り立つ:

$$\mathrm{Pf}\Big((j-i)\,\mathrm{Mot}(i+j-3)\Big)_{1\le i,j\le 2n}=\prod_{k=0}^{n-1}(4k+1),$$

$$\mathrm{Pf}\Big((j-i)\,\mathrm{Del}(i+j-3)\Big)_{1\le i,j\le 2n}=2^{n^2-1}(2n-1)\prod_{k=1}^{n-1}(4k-1),$$

$$\mathrm{Pf}\Big((j-i)\,\mathrm{Sch}(i+j-2)\Big)_{1\le i,j\le 2n}=2^{n^2}\prod_{k=0}^{n-1}(4k+1).$$

これが最初にコンピュータ実験によって予想した式であった. これらは, 特別の $r$ に対して, 右辺がセルバーグ積分の形になるものである. また, 測度の重み関数の形によっては, 次のように任意の $r$ に対してセルバーグまたは青本の公式に帰着できる場合がある.

**系 3.5.** $n$ を正整数とする. このとき, 次の等式が成り立つ:

$$\mathrm{Pf}\left((j-i)\,\mathrm{Cat}(i+j+r-2)\right)_{1\le i,j\le n}=\prod_{j=0}^{n-1}\frac{(4j+2)!(4j+2r+1)!}{(4j+r)!(4j+r+2)!},$$

$$\mathrm{Pf}\left((j-i)\,\mathrm{CBC}(i+j+r-2)\right)_{1\le i,j\le n}=2^n\prod_{j=0}^{n-1}\frac{(4j)!(4j+2r+1)!(2j+1)}{(4j+r-1)!(4j+r)!(2j+r)},$$

$$\mathrm{Pf}\left((j-i)\{3(i+j+r)-8\}\,\mathrm{Cat}(i+j+r-3)\right)_{1\le i,j\le n}$$
$$=2^{3n}\prod_{j=0}^{n-1}\frac{(4j)!(4j+2r-1)!(2j+1)}{(4j+r)!(4j+r-2)!(2j+r-1)}\left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-k}\prod_{j=1}^{k}\frac{r+\frac{1}{2}+2(n-j)}{r-1+2(2n-j)}\right|.$$

特に, 最後の式はパフィアンの成分のカタラン数に不思議な係数が掛かっている上に, 右辺は和でコンピュータ実験からは予想が作れない形であり, ナラヤナ多項式という一般化によって出てきたものである.

また, 系 3.4 の $r$ を 1 ずらすと青本の公式が適用できるので, 次のような系が出てくる.

**系 3.6.** $n$ を正整数とする. このとき, 次の等式が成り立つ:

$$\mathrm{Pf}\Big((j-i)\,\mathrm{Mot}(i+j-2)\Big)_{1\le i,j\le 2n}$$
$$=2^{2n}\prod_{k=0}^{n-1}(4k+1)\left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-k}\prod_{j=1}^{k}\frac{\frac{3}{2}+2(n-j)}{3+2(2n-j-1)}\right|,$$

$$\mathrm{Pf}\Big((j-i)\,\mathrm{Del}(i+j-2)\Big)_{1\le i,j\le 2n}$$
$$=2^{n\left(n+\frac{5}{2}\right)-1}(2n-1)\prod_{k=1}^{n-1}(4k-1)\left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{3\sqrt{2}-4}{8}\right)^{n-k}\prod_{j=1}^{k}\frac{\frac{1}{2}+2(n-j)}{1+2(2n-j-1)}\right|,$$

$$\mathrm{Pf}\Big((j-i)\,\mathrm{Sch}(i+j-1)\Big)_{1\le i,j\le 2n}$$
$$=2^{n\left(n+\frac{5}{2}n\right)}\prod_{k=0}^{n-1}(4k+1)\left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{3\sqrt{2}-4}{8}\right)^{n-k}\prod_{j=1}^{k}\frac{\frac{3}{2}+2(n-j)}{3+2(2n-j-1)}\right|.$$

これも, 和の形なのでコンピュータでは予想が作れないが, チェックはできて正しい. この他にも, 命題 3.1 を使った類似の公式が作れるが省略する. 1 つの大きな問題としては, これらの等式の応用として, 何かを数え上げることができるかということである.

## 3.3　ジャック多項式

また, もう 1 つの問題としては, 次のようなものがある我々は, 補題 3.2 に, セルバーグ (または青山) の公式を適用できる場合を全て調べたが, それ以外の場合に, 補題 3.2 を利用して超パフィアンの値を計算する方法として, ジャック多項式 [7, 16] が挙げられる. $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ を $n$ 個の変数の組とし, $\lambda$ を $\ell(\lambda)\le n$ をみたす分割とする. 正の実数 $\alpha$ に対して, $P_\lambda^{(\alpha)}(\boldsymbol{x})$ によってジャック多項式 (Jack symmetric function) を表す. (詳細な定義は述べないので [11] を参照して欲しい.) $k$ を正整数とするとき,

$$\int_{[0,\infty)^n}P_\lambda^{(1/k)}(\boldsymbol{x})\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\alpha-1}}{(1+x_i)^{\alpha+\beta+2(n-1)\gamma}}\prod_{1\le i<j\le n}|x_i-x_j|^{2k}\,d\boldsymbol{x}$$
$$=P_\lambda^{(1/k)}(1,\ldots,1)\prod_{j=1}^{n}\frac{\Gamma\left(\alpha+(n-j)k+\lambda_j\right)\Gamma\left(\beta+(j-1)k-\lambda_j\right)\Gamma\left(jk+1\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta+(n+j-2)k\right)\Gamma\left(k+1\right)}.$$

という直交性が Warnaar [16] によって得られている. ここで $P_\lambda^{(1/k)}(1,\dots,1)=\prod_{1\le i<j\le n}\frac{((j-i)k+\lambda_i-\lambda_j)_k}{((j-i)k)_k}$ である. ここでは, 詳しく述べないが, 補題 3.2 の重み関数を, この式の形に書き変えることができて, $x_i$ に関する積は対称関数なのでジャック多項式に関する展開がわかれば, 直交性より積分の値を計算することが可能である.

ここまで, $A, B, D$ 型のナラヤナ多項式について調べたが, その他の型については調べていない. 有限コクセター群については, 例外型は有限列であり, 有限列でない場合は多項式にならないので少し工夫が必要である.

# 4 パフィアンと随伴ヤコビ多項式

## 4.1 予想

最後に, 第 1 節で考察した $a_n$, $b_n$, $c_n$, $d_n$, $e_n$ について, 計算機により $\mathrm{Pf}\left((j-i)x_{i+j+r}\right)_{1\le i,j\le n}$ $(x=a,b,c,d,e)$ の形のパフィアンの値を計算すると, 次のような予想を作ることができる.

**Conjecture 4.1.**

$$\mathrm{Pf}\left((j-i)a_{i+j-1}\right)_{1\le i,j\le 2n}=2^{-n}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(12k+6)!(4k+1)!(3k+2)!}{(8k+2)!(8k+5)!(3k+1)!},\tag{14}$$

$$\mathrm{Pf}\left((j-i)b_{i+j-2}\right)_{1\le i,j\le 2n}=12^{-n}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(12k+10)!(4k+2)!(4k+1)}{(8k+3)!(8k+7)!(3k+2)(12k+5)},\tag{15}$$

$$\mathrm{Pf}\left((j-i)c_{i+j-1}\right)_{1\le i,j\le 2n}=\left(\frac{4}{3}\right)^n\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(12k+15)!(4k+5)!(2k+1)}{(8k+8)!(8k+11)!(12k+13)},\tag{16}$$

$$\mathrm{Pf}\left((j-i)d_{i+j-1}\right)_{1\le i,j\le 2n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n(6n+1)!\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(12k+6)!(4k+5)!(4k+3)}{(8k+5)!(8k+10)!(k+1)(3k+1)},\tag{17}$$

$$\mathrm{Pf}\left((j-i)e_{i+j-2}\right)_{1\le i,j\le 2n}=3^{-n}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(6k+6)!(2k)!}{(4k+1)!(4k+4)!(3k+2)}.\tag{18}$$

行列式とパフィアンは別物なので, $x=a,b,c,d,e$ に対してうまく行く理由もわからないし, 他にないとは言えない. ただ, 右辺が非常に美しい積の形をしているので, 計算機で見つけやすいことは確かだ. この予想のパフィアンが前節のパフィアンに比べて難しいのは, 数列の母関数を作ると前節の場合は二次方程式の解であったのに対して, この節の数列の母関数が三次方程式の解になっていることである. 詳述はしなかったが, 前節で重み関数を求めるには, モーメント関数にスティルチェスの逆定理 (Stieltjes inversion formula) というのを使って計算した. 今回の場合には, このスティルチェスの逆定理の計算が難しいのが, この予想の難しさの所以である. 幸いにして, 最近になって Wimp [17] により, スティルチェスの逆定理をつかって重み関数が計算されていることがわかった. それは, 随伴ヤコビ多項式と関係が深いので, 最後に触れたい. まだ, 計算途中であり, この予想は完全に解決していない.

## 4.2 ヤコビ多項式

かの有名なヤコビによって導入された**ヤコビ多項式 (Jacobi polynomials)** $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}$ は具体的に

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+\alpha}{n-k}\binom{n+\beta}{k}(x-1)^k(x+1)^{n-k}.$$

と書くことができる ([3]). ヤコビ多項式 $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}$ の重み関数は $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ で, その直交関係式は

$$\int_{-1}^{1} P_m^{(\alpha,\beta)}(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2\,n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)n!}\delta_{m,n}$$

と書ける. ヤコビ多項式 $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}$ のみたす三項間漸化式は $n\geq 0$ に対して

$$A(n)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = (B(n)x - C(n))\,P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - D(n)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)$$

であり, また初期条件として $P_{-1}^{(\alpha,\beta)}(x)=0$, $P_0^{(\alpha,\beta)}(x)=1$ をみたす, ここで

$$\begin{aligned} A(n) &= 2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta), \\ B(n) &= (2n+\alpha+\beta)_3, \\ C(n) &= (\beta^2-\alpha^2)(2n+\alpha+\beta+1), \\ D(n) &= 2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2) \end{aligned} \tag{19}$$

である. ここで $(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$ はポッホハマー記号 (pochhammer symbol) である.

## 4.3 随伴ヤコビ多項式

直交多項式 (orthogonal polynomials) とその拡張である随伴多項式 (associated orthogonal polynomials) の関係は簡単なものであるが, 重み関数やその他の性質を調べるのは必ずしも易しくない. 随伴ヤコビ多項式 (the Jacobi associated polynomials) $P_n^{(\alpha,\beta)}(x;\gamma)$ は $n\geq 0$ のときの三項間漸化式

$$A(n+\gamma)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x;\gamma) = (B(n+\gamma)x - C(n+\gamma))\,P_n^{(\alpha,\beta)}(x;\gamma) - D(n+\gamma)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x;\gamma) \tag{20}$$

と初期条件

$$P_{-1}^{(\alpha,\beta)}(x;\gamma)=0, \qquad P_0^{(\alpha,\beta)}(x;\gamma)=1.$$

によって定義される [5, 6, 17]. 随伴ヤコビ多項式は Wimp [17] や Ismail-Mason [5, 6] によって研究された. その結果を述べる為に, 変数を少しずらそう.

$$R_n^{(\alpha,\beta)}(x;\gamma) = P_n^{(\alpha,\beta)}(2x-1;\gamma).$$

は, **ずれ多項式 (shifted polynomoals)** と呼ばれる. 次の定理は, この話の中で直接使うことはないが Wimp [17] は $R_n^{(\alpha,\beta)}(x;\gamma)$ について, 具体的に超幾何級数による表示を与えた.

**定理 4.2.** (Wimp)　ずれ多項式は次のように書ける:

$$
\begin{aligned}
R_n^{(\alpha,\beta)}(x;\gamma) &= \frac{(-1)^n(\alpha+\beta+2\gamma+1)_n(\beta+\gamma+1)_n}{(\alpha+\beta+\gamma+1)_n n!} \\
&\quad \times \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k(n+\alpha+\beta+2\gamma+1)_k x^k}{(\gamma+1)_k(\beta+\gamma+1)_k} \\
&\quad \times {}_4F_3\left( {k-n, n+k+\alpha+\beta+2\gamma+1, \beta+\gamma, \gamma \atop k+\beta+\gamma+1, k+\gamma+1, \alpha+\beta+2\gamma} ; 1 \right).
\end{aligned}
$$

ここで, 重要なのは Wimp [17] が, スティルチェスの逆定理を使って, 随伴ヤコビ行列の重み関数を, 次のように具体的に与えている点である.

**定理 4.3.** (Wimp)　$\gamma \geq 0$, $\alpha+\gamma > 0$, $\beta+\gamma > 0$ とする. このとき $\left\{ R_n^{(\alpha,\beta)}(x;\gamma) \right\}$ は, 区間 $[0,1]$ 上の次の重み関数に関して直交している.

$$
W(t;\gamma) = \frac{(1-t)^\alpha t^\beta}{\left| {}_2F_1\left( {\gamma, 1-\alpha-\beta-\gamma \atop 1-\beta} ; t \right) + K e^{i\pi\beta} t^\beta \, {}_2F_1\left( {\beta+\gamma, 1-\alpha-\gamma \atop \beta+1} ; t \right) \right|^2}. \tag{21}
$$

ここで

$$
K = \frac{\Gamma(-\beta)\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\gamma)}. \tag{22}
$$

とする.

重み関数 (21) は, 決して易しいとは言えないが, Wimp が具体的に与えていることは幸いである. そこで二つの問題が残っている. 一つ目は, 我々の数列 $\{x_n\}_{n\geq 0}$ $(x = a, b, c, d, e)$ をモーメント列とするような随伴ヤコビ多項式 $P_n^{(\alpha,\beta)}(x;\gamma)$ の $\alpha, \beta, \gamma$ の値を決定することである. そして二つ目の問題は, この重み関数 (21) に対して (12) 式の右辺の積分を計算することである.

## 4.4　随伴ヤコビ多項式の monic 化

一つ目の問題を解決する為に, モーメント列 $\{x_n\}_{n\geq 0}$ $(x = a, b, c, d, e)$ が決定する直交多項式の三項間漸化式を求め, 随伴ヤコビ多項式の三項間漸化式 (20) と比較する. そのためには, モーメント列の Jacobi 連分数展開と三項間漸化式の間の関係を使う. まず

$$
Q_n^{(\alpha,\beta)}(x;\gamma) = \frac{(\gamma+1)_n}{(\beta+\gamma+1)_n} R_n^{(\alpha,\beta)}(x;\gamma) = \frac{(\gamma+1)_n}{(\beta+\gamma+1)_n} P_n^{(\alpha,\beta)}(2x-1;\gamma)
$$

とおくと, (19) 式からの直接計算によって, $n \geq 0$ に対する三項間漸化式

$$
\Lambda_n Q_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x;\gamma) = (x - \Lambda_n - M_n)\, Q_n^{(\alpha,\beta)}(x;\gamma) - M_n Q_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x;\gamma) \tag{23}
$$

と初期条件 $Q_{-1}^{(\alpha,\beta)}(x;\gamma) = 0$, $Q_0^{(\alpha,\beta)}(x;\gamma) = 1$ が成り立つことを示せる. ここで

$$
\begin{aligned}
\Lambda_n &= \frac{(n+\beta+\gamma+1)(n+\alpha+\beta+\gamma+1)}{(2n+\alpha+\beta+2\gamma+1)_2}, \\
M_n &= \frac{(n+\gamma)(n+\alpha+\gamma)}{(2n+\alpha+\beta+2\gamma)_2}
\end{aligned}
$$

とする. この多項式列 $Q_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x;\gamma)$ は monic (最高次の係数が 1) でないので, monic にするために

$$
S_n^{(\alpha,\beta)}(x;\gamma) = \Lambda_0\Lambda_1\cdots\Lambda_{n-1} Q_n^{(\alpha,\beta)}(x;\gamma)
$$

とおく. すると $\{S_n^{(\alpha,\beta)}(x;\gamma)\}_{n\geq 0}$ のみたす三項間漸化式は (23) より, $n \geq 0$ に対して

$$
S_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x;\gamma) = (x - \Lambda_n - M_n)\, S_n^{(\alpha,\beta)}(x;\gamma) - \Lambda_{n-1} M_n S_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x;\gamma) \tag{24}
$$

となる. また, 初期条件は $S_{-1}^{(\alpha,\beta)}(x;\gamma) = 0$, $S_0^{(\alpha,\beta)}(x;\gamma) = 1$ である.

## 4.5 ヤコビ連分数展開と三項間漸化式

良く知られているように, モーメント母関数のヤコビ連分数展開と三項間漸化式の間には深い関係がある. まず, 最初に, 次の形の連分数を**ヤコビ連分数 (the Jacobi continued fraction)** という:

$$J(t;\xi_0,\xi_1,\xi_2,\dots;\eta_1,\eta_2,\dots)=\cfrac{1}{1-\xi_0x-\cfrac{\eta_1x^2}{1-\xi_1x-\cfrac{\eta_2x^2}{\cfrac{\ddots}{1-\xi_nx-\cfrac{\eta_{n+1}x^2}{\ddots}}}}}.$$

**定理 4.4.** (Favard の定理) モーメント列 $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ $(\mu_0=1)$ の Jacobi 連分数への展開が

$$\sum_{n\geq 0}\mu_nx^n=J(x;\xi_0,\xi_1,\xi_2,\dots;\eta_1,\eta_2,\dots)$$

で与えられるとき, $\mathscr{L}[x^n]=\mu_n$ によって与えられる線型汎函数 $\mathscr{L}$ に関する monic な直交多項式 $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ は $n\geq 0$ に対する三項間漸化式

$$p_{n+1}(x)=(x-\xi_n)p_n(x)-\eta_np_{n-1}(x)$$

と初期条件 $p_{-1}(x)=0$, $p_0(x)=1$ で決まる.

ここで (9), (10), (11) より, モーメント列 $\{x_n\}_{n\geq 0}$ $(x=a,b,c,d,e)$ の母関数の Stieltjes 連分数展開はわかっている. そこで, 次の Stieltjes 連分数と Jacobi 連分数の関係を使う.

**補題 4.5.** (contraction formula) Stieltjes 連分数と Jacobi 連分数が

$$S(x;\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\dots)=J(t;\xi_0,\xi_1,\xi_2,\dots;\eta_1,\eta_2,\dots)$$

となるならば $\xi_0=\lambda_1$ かつ $n\geq 1$ に対して

$$\xi_n=\lambda_{2n}+\lambda_{2n+1},\quad \eta_n=\lambda_{2n-1}\lambda_{2n},$$

が成り立つ.

この Stieltjes 連分数と Jacobi 連分数の間の関係を使い, 方程式

$$\begin{aligned}\Lambda_n(\alpha,\beta,\gamma)+M_n(\alpha,\beta,\gamma)&=\lambda_{2n}(a,b,c)+\lambda_{2n+1}(a,b,c)\\ \Lambda_{n-1}(\alpha,\beta,\gamma)M_n(\alpha,\beta,\gamma)&=\lambda_{2n-1}(a,b,c)\lambda_{2n}(a,b,c)\end{aligned}\tag{25}$$

を解くと

$$(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{cases}(a+b-c,a-b-1,c-a),\\(-a-b+c,a-b-1,b),\\(a+b-c,-a+b+1,-b+c-1),\\(-a-b+c,-a+b+1,a-1).\end{cases}\tag{26}$$

という解が得られる. これらを (9) の場合に表にすると, 次のようになる.

| Moment | $a$ | $b$ | $c$ | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | $2/3$ | $1/3$ | $1/2$ | $1/2$ | $-2/3$ | $-1/6$ |
| | | | | $-1/2$ | $-2/3$ | $1/3$ |
| | | | | $1/2$ | $2/3$ | $-5/6$ |
| | | | | $-1/2$ | $2/3$ | $-1/3$ |
| $b_n$ | $4/3$ | $2/3$ | $3/2$ | $1/2$ | $-1/3$ | $1/6$ |
| | | | | $-1/2$ | $-1/3$ | $2/3$ |
| | | | | $1/2$ | $1/3$ | $-1/6$ |
| | | | | $-1/2$ | $1/3$ | $1/3$ |
| $c_n$ | $5/3$ | $4/3$ | $5/2$ | $1/2$ | $-2/3$ | $5/6$ |
| | | | | $-1/2$ | $-2/3$ | $4/3$ |
| | | | | $1/2$ | $2/3$ | $1/6$ |
| | | | | $-1/2$ | $2/3$ | $2/3$ |
| $d_n$ | $5/3$ | $4/3$ | $3/2$ | $3/2$ | $-2/3$ | $-1/6$ |
| | | | | $-3/2$ | $-2/3$ | $4/3$ |
| | | | | $1/2$ | $2/3$ | $1/6$ |
| | | | | $-1/2$ | $2/3$ | $2/3$ |
| $e_n$ | $2/3$ | $1/3$ | $3/2$ | $-1/2$ | $-2/3$ | $5/6$ |
| | | | | $1/2$ | $-2/3$ | $1/3$ |
| | | | | $-1/2$ | $2/3$ | $1/6$ |
| | | | | $1/2$ | $2/3$ | $-1/3$ |

最後に, 二つ目の問題として, 重み関数 (21) に対して (12) 式の右辺の積分を計算することである. この問題は (21) の一般的な問題では難しいが, これらの特別な値に関しては簡略化ができることがわかっている. だが, まだ, 今後の問題でリヨン大学の Jiang Zeng 氏や Theresia Eisenkölbl 氏と研究中である. もし, その手法が確立できれば, 予想 4.1 のようなコンピュータで見つけられない和の形の公式もできると期待される.

## 参考文献

[1] G. E. Andrews, “Plane partitions (III): The weak Macdonald conjecture”, *Invent. Math.* **53** (1979), 193 – 225.

[2] A. I. Barvinok, “New algorithms for linear k-matroid intersection and matroid $k$-parity problems”, *J. Mathematical Programming*, **69** (1995), 449–470.

[3] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach 1978 (Dover Books on Mathematics).

[4] P. J. Forrester and S. O. Warnaar, “The importance of the Selberg integral”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **45** (2008), 489–534.

[5] M. Ismail, *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable*, Cambridge University Press (2005).

[6] M. Ismail and D. Masson, “Two families of orthogonal polynomials related to Jacobi polynomials”, *Rocky Mountain J. Math.*, **21** (1991), 359–375.

[7] K. W. J. Kadell, “The Selberg-Jack symmetric functions”, *Adv. Math.* **130** (1997), 33–102.

[8] K. Krattenthaler, “Advanced determinant calculus: A complement”, *Linear Algebra Appl.* **411** (2005), 68–166.

[9] I. Gessel and G. Xin, “The Generating Function of Ternary Trees and Continued

Fractions" *Electron. J. Combin.* **13** (2006), R53.

[10] J. Luque and J. Thibon, "Pfaffian and Hafnian identities in shuffle algebras", *Advances in Applied Mathematics* **29** (2002), 620–646.

[11] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials* (Oxford Mathematical Monographs), Clarendon Press, Oxford (1995).

[12] W.H. Mills, David P. Robbins, and Howard Rumsey, Jr., "Alternating Sign Matrices and Descending Plane Partitions", *J. Combin. Theory Ser. A*, **34** (1983) 340 – 359.

[13] W.H. Mills, David P. Robbins, and Howard Rumsey, Jr., "Enumeration of a symmetry class of plane partitions", *Discrete Math.*, **67** (1987) 43 – 55.

[14] T. K. Petersen, *Eulerian Numbers*, Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher (2015).

[15] A. Selberg, "Remarks on a multiple integral", *Norsk Mat. Tidsskr.* **26** (1944), 71–78.

[16] O. Warnaar, "$q$-Selberg Integrals and Macdonald Polynomials", *Ramanujan J.* **10** (2005), 237–268.

[17] J. Wimp, "Explicit formula for the associated Jacobi polynomials and some applications", *Can. J. Math.* **39** (1987), 983–1000.